F 762
5.1(498)
KAT

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

Budapesti Műszaki Könyvtár

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

1—2
ANUL III
IANUARIE—IUNIE
1952

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

1—2
ANUL III
IANUARIE—IUNIE
1952

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Academician S. STOILOV — Redactor responsabil; Academician GR. C. MOISIL; GH. MIHOC; G. VRĂNCEANU; MIHAIL NECULCEA

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul III, Nr. 1—2 Ianuarie—Iunie 1952

SUMAR

Pag.

MIRON NICOLESCU, Contribuţiuni la o analiză de tip hiperbolic a planului 7
TIBERIU POPOVICIU, Asupra restului în unele formule de derivare numerică. I. Câteva proprietăţi ale formulelor de derivare numerică de exactitate maximă 53
MILLU ROTH, Studiul direcţiilor înfăşurătoare într'un spaţiu cu conexiune afină 123
MIHAIL BENADO, Asupra teoremelor de descompunere ale algebrei . . . 263

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome III, Nos 1—2 Janvier—Juin 1952

SOMMAIRE

	Page
MIRON NICOLESCU, Contributions à une analyse du plan, de type hyperbolique	7
TIBERIU POPOVICIU, Sur le reste dans quelques formules de dérivation numérique. I. Quelques propriétés des formules de dérivation numérique d'exactité maximum	53
MILLU ROTH, L'étude des directions enveloppantes dans un espace à connexion affine	123
MIHAIL BENADO, Sur les théorèmes de décomposition de l'algèbre	263

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том III, № 1-2 Январь—июнь 1952

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

М. НИКОЛЕСКУ, К анализу плоскости гиперболического типа 7

Т. ПОПОВИЧ, Относительно остатка в нескольких формулах числовой деривации. Несколько свойств формул числовой деривации максимальной точности 53

М. РОТ, Изучение огибающих направлений в пространстве аффинной связности 123

М. БЕНАДО, О теоремах разложения алгебры 263

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul III, Nr. 1—2, 1952

CONTRIBUŢIUNI LA O ANALIZĂ DE TIP HIPERBOLIC A PLANULUI

DE

MIRON NICOLESCU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

INTRODUCERE

Ideea care stă la baza teoriei funcţiunilor de mai multe variabile este individualizarea fiecărei variabile independente. Atunci când scriu $f(x_1, x_2, \ldots)$ înţeleg că f este funcţiune de x_1, dar şi de x_2, etc., iar fiecare din aceste variabile apare ca atare în enunţuri şi formule. Noţiunea fundamentală, corespunzătoare derivatei pentru funcţiunile de o singură variabilă, este noţiunea de diferenţială totală. Or, aceasta este o formă *liniară* de diferenţialele variabilelor independente. Analiza bazată pe o astfel de concepţie poate fi numită, din această cauză, o *analiză liniară* a planului, sau a spaţiului cu $n > 2$ dimensiuni, etc.

Incercările de a construi noţiuni pornind dela ideea considerării unei funcţiuni de mai multe variabile ca o funcţiune de ansamblu a acestora, concepute ca definind un punct în plan, în spaţiul cu trei dimensiuni, etc., sunt destul de vechi. Rezultate importante în această direcţie nu au putut însă apărea decât după teoria integralei lui Lebesgue, ca şi după teoria acestuia asupra derivării funcţiunilor de mulţime. Intr'adevăr, limitându-ne la două variabile (lucru pe care îl vom face în tot cursul acestei lucrări), oricărei funcţiuni de punct $f(x, y)$ i se poate ataşa următoarea funcţiune de interval:

$$p(\omega) = \Delta_2 f(x, y) =$$

$$f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y),$$

unde ω este intervalul bidimensional cu vârfurile opuse (x, y) şi $(x + h, y + k)$. Lebesgue a arătat că, dacă $f(x, y)$ este absolut continuă, atunci $p(\omega)$ se poate *prelungi* pe orice mulţime măsurabilă e, printr'o funcţiune absolut continuă de mulţime. Dacă $p(e)$ este această funcţiune, se ştie că $p(e)$ este derivabilă aproape pretutindeni şi că avem

$$p(e) = \int_e Dp \cdot d\sigma,$$

Dp fiind derivata lui p. Aplicând această formulă intervalului ω, obținem

$$p(\omega) = \Delta_2 f(x, y) =$$

$$= \int_\omega \lim_{h' \to 0,\ k' \to 0} \frac{f(x + h', y + k') - f(x, y + k') - f(x + h', y) + f(x, y)}{h'k'} \, d\sigma.$$

de unde se vede că:

$$Dp = \lim_{h' \to 0,\ k' \to 0} \frac{f(x + h', y + k') - f(x, y + k') - f(x + h', y) + f(x, y)}{h'k'}.$$

Limita din dreapta poate fi notată $Df(x, y)$. Dacă $f(x, y)$ admite derivate parțiale de ordinul II, atunci

$$Df(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}.$$

Acest lucru l-a făcut pe de la Vallée-Poussin să scrie: «Aceasta arată că derivatele de mulțime superficială corespund unor derivate parțiale de ordinul II al funcțiunilor de puncte»[1]). Dar de la Vallée-Poussin nu a tras nicio consecință a acestei observații. Mai târziu, Tonneli [15] a introdus noțiunea de funcțiune cu variație mărginită de două variabile cu ajutorul aceleiași funcțiuni auxiliare de interval $p(\omega)$, în vederea cercetărilor sale asupra seriilor trigonometrice duble. Cel dintâi care a întreprins un studiu sistematic, bazat pe această idee, a funcțiunilor de mai multe variabile, a fost Karl Bögel în două Memorii [2], [3], publicate în 1934 și 1935. El numește expresia $Df(x, y)$, definită mai sus, derivată bidimensională a lui $f(x, y)$ — polidimensională în cazul mai multor variabile — și introduce, alături de acest concept, fundamental în cercetările sale, pe acela de continuitate bidimensională, definit în modul următor: $f(x, y)$ este bidimensional continuă în punctul (x, y), dacă

$$\lim_{h \to 0,\ k \to 0} \Delta_2 f(x, y) = f.$$

Rezultatele lui Bögel au trezit un interes deosebit printre cercetători din țara noastră. Acad. D. Pompeiu [12] a atras atenția, într'o comunicare făcută la Societatea Română de Matematice în 1934 asupra importanței acestor rezultate. N. Ciorănescu a făcut o interesantă aplicație a acestora la funcțiunile complexe [4]. Intr'o altă ședință a acestei Societăți, în 1937, am făcut observarea că s'ar putea face un studiu analog cu acela al desvoltării lui Almansi pentru funcțiunile poliarmonice, înlocuindu-se operatorul lui Laplace cu operatorul hiperbolic D. Dar N. Ciorănescu, după cum ne-a comunicat, începuse un astfel de studiu, care a și apărut ulterior [5]. Intr'o lucrare publicată în 1938, am precizat unele din rezultatele lui Bögel și am simplificat unele din enunțuri [7]. In anul 1940 am extins proprietățile de derivabilitate a seriilor de funcțiuni la operatorul D [8]. In sfârșit, în 1946 am dat, în aceeași ordine de idei, o generalizare a celei de a doua formule, a mediei la integralele duble [9].

[1]) Ch. de la Vallée-Poussin, Intégrale de Lebesgue, fonctions d'ensemble classes de Baire, Gauthier-Villars, Paris, ed. 2, 1934.

In lucrarea de față aduc noi contribuții la analiza, din acest punct de vedere, a funcțiunilor reale de mai multe variabile.

Unul din rezultatele fundamentale ale lucrării îl constitue o desvoltare a unei funcțiuni cu anumite proprietăți diferențiale, desvoltare în același timp analoagă desvoltării lui Taylor și desvoltării lui Almansi. Această desvoltare promite să fie bogată în consecințe. Unele din aceste consecințe sunt expuse în lucrarea de față, dar subiectul este departe de a fi epuizat.

Lucrarea este împărțită în mai multe paragrafe. In primul paragraf, introduc unele noțiuni și notații necesare și reamintesc rezultatele de care voiu avea nevoie, din lucrările citate. In particular, voiu restabili, sub o formă mai generală, o formulă de «integrare prin părți» a integralelor duble, pe care am dat-o într'o lucrare anterioară [9].

In al doilea paragraf, mă ocup de așa numitele pseudo-polinoame *hiperbolice*, care corespund pentru operatorul D, funcțiunilor poliarmonice. Aceste funcțiuni au fost definite anterior drept funcțiuni de forme

$$H_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} [x^k g_k(y) + y^k f_k(x)] \qquad (A)$$

cu f_k și g_k de k ori derivabile. Ele sunt soluțiuni, după cum se verifică ușor, ale ecuației

$$D^{n+1} u = 0. \qquad (B)$$

Nu s'a cercetat însă, până acum, dacă această ecuație mai are și alte soluții decât funcțiunile $H_n(x, y)$ date de expresia precedentă. Rezultatul fundamental al acestui paragraf îl constitue tocmai faptul că singurele soluții ale ecuației de mai sus sunt pseudo-polinoamele hiperbolice. Demonstrația acestui fapt a cerut o oarecare pregătire, deoarece nu am presupus nimic în această demonstrație asupra derivabilității ordinare a funcțiunii $u(x, y)$, în afară de existența derivatelor $D^k u$. Un alt rezultat important îl constitue extensiunea la operatorul DD, definit *direct*, a unei celebre teoreme a lui Schwarz privitoare la derivata a doua directă a unei funcțiuni de o singură variabilă. Tot în acest paragraf, arăt că orice funcțiune $u(x, y)$, hiperbolic continuă într'un interval, poate fi aproximată, uniform în acest interval, prin pseudo-polinoame hiperbolice, care să coincidă, toate, pe frontiera intervalului cu funcțiunea dată.

Paragraful 2 este urmat de un scurt paragraf consacrat seriilor de tipul

$$\sum_{0}^{\infty} [x^n g_n(y) + y^n f_n(x)], \qquad (C)$$

extensiune firească a polinoamelor hiperbolice, și asupra cărora a atras atenția N. Ciorănescu, în lucrarea citată [5]. Pentru o astfel de serie, se poate determina un domeniu, anume domeniul intersectat pe intervalul bidimensional J de existență a funcțiunilor f_n, g_n, de hiperbolele

$$|xy| = \rho,$$

unde ρ este o constantă depinzând de seria dată, domeniu în care seria este absolut și uniform convergentă. Dar acest domeniu nu conține toate punctele

în care seria este convergentă. Cercetarea în această direcție merită, de sigur, să fie continuată.

Paragrafele 4 și 5 sunt consacrate formulei fundamentale de care am vorbit mai sus.

Ultimul paragraf este consacrat studiului restului din formula fundamentală. Dacă acest rest tinde uniform către zero în intervalul în care $u(x, y)$, presupusă indefinit derivabilă hiperbolic este dată, atunci obținem pentru $u(x, y)$ o desfășurare în serie, menită să joace, în problemele de frontieră de tip hiperbolic, același rol pe care formula lui Taylor îl joacă în analiza funcțiunilor de o variabilă. Seria obținută este tocmai o serie de tipul (C): o funcțiune desfășurabilă într'o astfel de serie este numită *hiperbolic analitică*. După ce demonstrez *unicitatea* unei astfel de desfășurări, dau trei criterii de analiticitate hiperbolică, care generalizează, la operatorul D, criteriile cunoscute de analiticitate obișnuită a funcțiunilor de o variabilă, între care și criteriul Acad. Serghei Bernstein. Este important de subliniat faptul că în formularea acestor criterii, intervin condiții privitoare *numai* la derivatele D^k ale funcțiunii.

§ 1. Preliminarii

1. Fie $u(x, y)$ o funcțiune reală, definită în intervalul bidimensional

$$a \leqq x \leqq \alpha, \quad b \leqq y \leqq \beta. \tag{J}$$

Vom spune că, $u(x, y)$ este hiperbolic continuă [1]) în punctul (x, y); dacă oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, punând

$$\Delta_2 u(x, y) = u(x + h, y + k) - u(x, y + k) - u(x + h, y) + u(x, y),$$

să avem

$$|\Delta_2 u(x, y)| < \varepsilon,$$

îndată ce $|h| < \delta$, $|k| < \delta$.

Dacă raportul

$$\frac{\Delta_2 u(x, y)}{hk}$$

tinde, pentru $h \to 0$, $k \to 0$, către o limită unică finită, vom spune că u este hiperbolic derivabilă în punctul (x, y).

Vom pune

$$Du(x, y) = \lim_{h \to 0,\, k \to 0} \frac{\Delta_2 u(x, y)}{hk} \tag{1}$$

și vom numi funcțiunea $Du(x, y)$ *derivata hiperbolică* a lui $u(x, y)$. Există în raport cu operatorul D, o teoremă a «creșterilor finite», datorită lui Karl Bögel [2] și care se poate enunța astfel:

[1]) In lucrările mele anterioare, am întrebuințat calificativul «global» pentru «hiperbolic».

Dacă funcțiunile u (x, y) *și* v (x, y) *sunt hiperbolic derivabile într'un interval bidimensional* J, *atunci, pentru orice pereche de puncte* (x, y) *și* (a, b) *din acest interval, există cel puțin un punct* (ξ, η) *interior intervalului, având extremitățile opuse în* (x, y), (a, b), *astfel încât să avem*

$$\frac{u(x,y) - u(x,b) - u(a,y) + u(a,b)}{v(x,y) - v(x,b) - v(a,y) + v(a,b)} = \frac{Du(\xi,\eta)}{Dv(\xi,\eta)}. \tag{2}$$

In particular, pentru $v(x, y) = xy$, obținem formula

$$u(x,y) - u(x,b) - u(a,y) + u(a,b) = (x-a)(y-b) \cdot Du(\xi,\eta). \tag{3}$$

Punând $x - a = h$, $y - b = k$ și scriind (x, y) în loc de (a, b), formula ia aspectul următor:

$$\Delta_2 u(x,y) = hk \cdot Du(\xi,\eta). \tag{3'}$$

O concluzie importantă a acestor formule este următoarea:

Dacă avem

$$Du(x,y) = 0,$$

identic într'un interval J, *atunci* u (x, y) *este de forma*

$$u(x,y) = f(x) + g(x),$$

unde f *și* g *sunt funcțiuni arbitrare.*

Vom numi, pentru prescurtare, o astfel de funcțiune, o *constantă hiperbolică.*

2. In cazul în care funcțiunea $u(x, y)$ are derivate parțiale de primul ordin

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y},$$

se poate da derivatei hiperbolice o interpretare geometrică interesantă. Să considerăm suprafața $Z = u(x, y)$. Prin ipoteză, această suprafață admite, în fiecare punct, un plan tangent. Să presupunem acum că u este hiperbolic derivabilă și să considerăm, odată cu punctul (x, y), și punctele

$$(x+h, y), \quad (x, y+k), \quad (x+h, y+k),$$

unde h și k sunt arbitrari. Prin aceste patru puncte putem face să treacă un paraboloid hiperbolic având ca plane directoare planele yOz și zOx, și unul singur. Intr'adevăr, dacă

$$Z - z = A(X-x)(Y-y) + B(X-x) + C(Y-y), \tag{4}$$

este acest paraboloid, scriind că trece prin fiecare din acele patru puncte, obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned} Ahk + Bh + Ck &= u(x+h, y+k) - u(x,y), \\ Bh &= u(x+h, y) - u(x,y), \\ Ck &= u(x, y+k) - u(x,y), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

de unde

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k}, \\ B &= \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}, \\ A &= \frac{u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y)}{hk} = \frac{\Delta_2 u}{hk}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Pentru ca acest paraboloid să tindă către o poziție bine determinată când $h \to 0$, $k \to 0$, trebue și este deajuns ca cei trei coeficienți dați de relațiile (6) să tindă, în aceleași condițiuni, către limite bine determinate. Pentru aceasta trebue și este deajuns ca funcțiunea $u(x, y)$ să admită, în punctul (x, y), derivatele

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Du(x, y),$$

condițiune care este îndeplinită prin ipoteză. In aceste condițiuni, ecuația poziției-limită a paraboloidului (4) este

$$Z - z = Du(x, y) \cdot (X - x)(Y - y) + \frac{\partial u}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial u}{\partial y}(Y - y). \quad (7)$$

Vom numi acest paraboloid, paraboloidul tangent *principal* la suprafața dată. El joacă, din punctul nostru de vedere, același rol pe care, în analiza lineară, îl joacă tangenta. Pe ecuația (7) se citește interpretarea geometrică a operatorului $Du(x, y)$: este coeficientul lui XY din ecuația, sub forma normală, a paraboloidului hiperbolic tangent principal la suprafața dată.

Ecuația

$$Du(x, y) = 0 \quad (8)$$

se interpretează și ea geometric, datorită aceleiași relații: punctele în care derivata hiperbolică se anulează, sunt punctele în care paraboloidul hiperbolic tangent principal se reduce la un plan.

3. Lui K a r l B ö g e l i se datorește și următorul important rezultat, pe care îl vom utiliza în lucrarea noastră: *Orice funcțiune* u (x, y), *hiperbolic continuă într'un interval, este de forma*

$$u(x, y) = U(x, y) + f(x) + g(y), \quad (9)$$

unde U *este continuă în sensul lui Cauchy, iar* f *și* g *arbitrare.* Cu terminologia noastră, *orice funcțiune hiperbolic continuă diferă de o funcțiune continuă în sensul lui Cauchy printr'o constantă hiperbolică.*

Un alt rezultat, pe care l-am demonstrat anterior [8] și de care vom avea nevoie și aici, este următorul:

Dacă seria

$$\sum u_n(x, y)$$

cu termenii hiperbolic derivabili în intervalul J, *este convergentă, de sumă* S(x, y) *și dacă seria*

$$\sum Du_n(x, y) \tag{10}$$

converge uniform în J, *atunci* S(x, y) *este hiperbolic derivabil în* J *și avem, în tot acest interval,*

$$DS(x, y) = \sum Du_n(x, y). \tag{11}$$

4. Într'o lucrare anterioară [9], am dat următorul rezultat:
Dacă u(x, y) *este absolut continuă în intervalul*

$$(J): \quad a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq g \leqq d,$$

și V(x, y) *este sumabilă în același interval, și dacă punem*

$$\varphi(x, y) = \int_a^x \int_c^y V(x', y')\, dx'\, dy',$$

atunci avem, în afară de punctele (x, y) *aparținând unei «grile» de măsură nulă,*

$$\int_a^x \int_c^y u(x', y') \cdot V(x', y')\, dx'\, dy' = u(x, y) \cdot \varphi(x, y) -$$
$$- \int_a^x \varphi(x', y) \frac{\partial u(x', y)}{\partial x'} dx' - \int_c^y \varphi(x, y') \frac{\partial u(x, y')}{\partial y'} dy' + \tag{12}$$
$$+ \int_a^x \int_c^y \varphi(x', y') \cdot Du(x', y')\, dx'\, dy'.$$

Această formulă este analoagă formulei de integrare prin părți pentru integralele simple. Funcțiunea $\varphi(x, y)$ din această formulă prezintă totuși particularitatea de a se anula pe dreptele $x = a$, $y = c$. Să considerăm, atunci, o funcțiune absolut continuă oarecare $w(x, y)$ și să punem

$$\varphi(x, y) = w(x, y) - w(x, c) - w(a, y) + w(a, b). \tag{13}$$

Avem

$$\varphi(x, c) = \varphi(a, y) = 0.$$

Putem, atunci, aplica formula precedentă funcțiunilor $u(x, y)$ și $\varphi(x, y)$, aceasta din urmă definită prin relația (13). Vom avea, succesiv,

$$\int_a^x \int_c^y u(x', y') \cdot D\varphi(x', y')\, dx'\, dy' = \int_a^x \int_c^y u(x', y') \cdot w(x', y')\, dx'\, dy,$$

$$\int_a^x \varphi(x', y) \frac{\partial u(x', y)}{\partial x'} dx' = \int_a^x w(x', y) \frac{\partial u(x', y)}{\partial x'} dx' -$$

$$- \int_a^x w(x', b) \frac{\partial u(x', y)}{\partial x'} dx' + [w(a, c) - w(a, y)] \cdot [u(x, y) - u(a, y)],$$

$$\int_c^y v(x, y') \cdot \frac{\partial u(x, y')}{\partial y'} dy' = \int_c^y w(x, y') \frac{\partial u(x', y')}{\partial y'} dy' -$$

$$- \int_c^y w(a, y') \frac{\partial u(x, y')}{\partial y'} dy' + [w(a, c) - w(x, c)] \cdot [u(x, y) - u(x, c)],$$

$$\int_a^x \int_c^y v(x', y') \, Du(x', y') \, dx' \, dy' = \int_a^x \int_c^y w(x', y') \, Du(x', y') \, dx' \, dy' -$$

$$- \int_a^x \int_c^y w(x', c) \, Du(x', y') \, dx' \, dy' - \int_a^x \int_c^y w(a, y') \, Du(x', y') \, dx' \, dy' +$$

$$+ w(a, c) \cdot [u(x, y) - u(a, y) - u(x, c) + u(a, c)].$$

Dar

$$\int_a^x \int_c^y w(x', c) \cdot Du(x', y') \, dx' \, dy' = \int_a^x w(x', b) \, dx' \int_b^y Du(x', y') \, dy' =$$

$$= \int_a^x w(x', c) \cdot \left[\frac{\partial u(x', y)}{\partial x'} - \frac{\partial u(x', c)}{\partial x'} \right] dx',$$

$$\int_a^x \int_c^y w(a, y') \cdot Du(x', y') \, dx' \, dy' = \int_c^y w(a, y') \left[\frac{\partial u(x, y')}{\partial y'} - \frac{\partial u(a, y')}{\partial y'} \right] dy'.$$

Obţinem, în definitiv, după efectuarea tuturor reducerilor, formula următoare:

$$\begin{aligned} &\int_a^x \int_c^y u(x', y') \cdot Dw(x', y') \, dx' \, dy' = u(x, y) \cdot w(x, y) - \\ &- u(x, c) \cdot w(x, c) - u(a, y) \cdot w(a, y) + u(a, c) \cdot w(a, c) - \\ &- \int_a^x w(x', y) \frac{\partial u(x', y)}{\partial x'} dx' + \int_a^x w(x', c) \frac{\partial u(x', c)}{\partial x'} dx' - \\ &- \int_c^y w(x, y') \frac{\partial u(x, y')}{\partial y'} dy' + \int_c^y w(a, y') \frac{\partial u(a, y')}{\partial y'} dy' + \\ &+ \int_a^x \int_c^y w(x', y') \cdot Du(x', y') \, dx' \, dy'. \end{aligned} \tag{14}$$

Vom numi această formulă, *formula generală de «integrare prin părţi» a integralelor duble*, spre a o deosebi de formula particulară (12).

§ 2. Pseudo-polinoamele hiperbolice

5. Vom numi pseudo-polinom hiperbolic, orice integrală a ecuaţiei diferenţiale

$$D^n u(x, y) = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Numărul n este *ordinul*, sau «gradul» pseudo-polinomului.

Am văzut mai sus in § 1 că pseudo-polinoamele de ordin zero sunt de forma

$$H_0(x, y) = f(x) + g(y),$$

unde $f(x)$ și $g(y)$ sunt arbitrare. De aici rezultă imediat că, dacă două funcțiuni $u(x, y)$ și $v(x, y)$ au aceeași derivată hiperbolică, ele diferă între ele printr'o constantă hiperbolică. Această observare ne va fi utilă pentru determinarea expresiei generale a unui pseudo-polinom hiperbolic de un ordin oarecare $n > 0$.

In cazul când se caută soluția ecuației (15) în câmpul funcțiunilor $C^{(n)}$, adică al funcțiunilor având derivate parțiale continue de primele n ordine, integrarea acestei ecuații este imediată. Intr'adevăr, în acest caz

$$D^n = \frac{\partial^{2n}}{\partial x^n \partial y^n},$$

și integrarea ecuației (15) ne dă, însemnând cu $H_n(x, y)$ un pseudo-polinom de ordinul n,

$$H_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} [x^k g_k(y) + y^k f_k(x)], \tag{16}$$

unde funcțiunile $f_k(x)$ și $g_k(y)$ sunt de k ori derivabile. Funcțiunea $H_n(x, y)$ se poate, de altfel, scrie și sub forma

$$H_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} x^k y^k [\varphi_k(x) + \psi_k(y)], \tag{16'}$$

unde

$$\varphi_k(x) = \frac{f_k(x)}{x^k}, \qquad \psi_k(y) = \frac{g_k(y)}{y^k}.$$

Reciproc, să considerăm o funcțiune $H_n(x, y)$ de forma (16), sau (16'), în care $f_k(x)$ și $g_k(y)$, respectiv $\varphi_k(x)$ și $\psi_k(y)$, sunt funcțiuni arbitrare. Este ușor de verificat că $H_n(x, y)$ este hiperbolic derivabilă dacă și numai dacă funcțiunile f_k, g_k, respectiv φ_k, ψ_k, sunt derivabile pentru $k > 0$. Or, derivata hiperbolică a funcțiunii $H_n(x, y)$ se scrie, în acest caz:

$$DH_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} k [x^{k-1} g'_{k+n}(y) + y^{k-1} f'_k(x)].$$

Ea este deci de aceeași formă ca și funcțiunea însăși. De aici rezultă că, o funcțiune de forma (16) sau (16') este un pseudo-polinom, dacă și numai dacă funcțiunile $f_k(x)$, $g_k(y)$, sau $\varphi_k(x)$, $\psi_k(y)$ sunt derivabile de un număr de ori egal cu indicele respectiv.

Funcțiunile de forma (16) sau (16') cu coeficienții arbitrari vor fi numite pseudo-polinoame hiperbolice *generalizate* [1]).

[1]) Funcțiunile de această formă au fost întâlnite de A. Marchaud [6]. Insemnătatea lor a fost pusă în evidență de Tiberiu Popoviciu, într'o importantă lucrare consacrată convexității de ordin superior [14].

6. Constitue funcțiunea dată de relația (16) cea mai generală soluție a ecuației (15)? Vom consacra rândurile ce urmează răspunsului la această întrebare. Vom căuta, în primul rând, funcțiunea u în câmpul funcțiunilor continue. Se știe că cea mai generală soluție a ecuației $Du = 0$ este

$$u = f_0(x) + g_0(y),$$

unde $f_0(x)$ și $g_0(y)$ sunt arbitrare. Să presupunem atunci că cea mai generală soluție *continuă* a ecuației

$$D^n u = 0$$

este funcțiunea:

$$H_{n-1}(x, y) = \sum_0^{n-1} [x^k g_k(y) + y^k f_k(x)],$$

cu $f_0(x)$ și $g_0(y)$ continue. Vom avea, pentru o funcțiune oarecare U,

$$D^{n+1} U = D^n (DU),$$

deci ecuația:

$$D^{n+1} U = 0$$

se reduce la:

$$DU = H_{n-1}(x, y),$$

$H_{n-1}(x, y)$ fiind o funcțiune de forma indicată mai sus, cu f_0 și g_0 continue. Dar atunci, o soluție particulară a acestei ecuații este

$$U_0 = \sum_{k-1}^{n} [x^k G_{k-1}(y) + y^k F_{k-1}(x)],$$

unde:

$$F_{k-1}(x) = \int_{x_0}^{x} f_{k-1}(t)\, dt, \quad G_{k-1}(y) = \int_{y_0}^{y} g_{k-1}(t)\, dt,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Prin urmare:

$$D(U - U_0) = 0,$$

de unde:

$$U = U_0 + f_0(x) + g_0(y),$$

cu f_0 și g_0 continue. Dacă acum presupunem $U(x, y)$ hiperbolic continuă, cum o astfel de funcțiune diferă de o funcțiune continuă printr'o constantă hiperbolică, rezultă în definitiv că, în formula precedentă putem presupune funcțiunile f_0, g_0 absolut oarecare (nu neapărat continue). Așa dar:

Teorema I. *Funcțiunea cea mai generală care verifică ecuația*

$$D^{n+1} u(x, y) = 0,$$

este de forma:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{n} [x^k g_k(y) + y^k f_k(x)],$$

unde f_k *și* g_k *sunt, pentru* $k = 0$, *absolut oarecare, iar pentru* $k > 0$ *derivabile de un număr de ori egal cu indicele respectiv.*

7. Să punem, ca de obiceiu, $f(x)$ fiind o funcțiune oarecare,

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x),$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\Delta f(x) = f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x),$$

. . . . . .

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \cdot f(x + kh).$$

Vom numi aceste expresii diferențele *lineare* iterate ale lui $f(x)$. Am notat mai sus, pentru o funcțiune oarecare u de două variabile,

$$\Delta_2 u(x, y) = u(x + h, y + k) - u(x, y + k) - u(x + h, y) + u(x, y). \quad (17)$$

Expresia $\Delta_2 u(x, y)$ se poate numi diferența *bidimensională* a lui $u(x, y)$. Ea se poate, de altfel, exprima cu ajutorul diferențelor lineare. Punând:

$$\Delta_x u(x, y) = u(x + h, y) - u(x, y),$$

$$\Delta_y u(x, y) = u(x, y + k) - u(x, y),$$

avem:

$$\Delta_2 u(x, y) = \Delta_x \Delta_y u(x, y) = \Delta_y \Delta_x u(x, y). \quad (18)$$

Vom introduce acum diferențele bidimensionale *iterate*, prin relația de recurență:

$$\Delta_2^n u(x, y) = \Delta_2 [\Delta_2^{n-1} u(x, y)],$$

$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Se demonstrează ușor, prin recurență, pornind dela formula (18), că avem:

$$\Delta_2^n u(x, y) = \Delta_x^n \Delta_y^n u(x, y) = \Delta_y^n \Delta_x^n u(x, y). \quad (19)$$

De exemplu:

$$\Delta_2^2 u(x, y) = u(x + 2h, y + 2k) - 2u(x + h, y + 2k) + u(x, y + 2k) -$$
$$- 2[u(x + 2h, y + k) - 2u(x + h, y + k) + u(x, y + k)] +$$
$$+ u(x + 2h, y) - 2u(x + h, y) + u(x, y).$$

Dacă raportul:

$$\frac{\Delta_2^n u(x, y)}{h^n k^n}$$

tinde către o limită finită unică, atunci când $h \to 0$, $k \to 0$, vom numi această limită derivata hiperbolică *directă* (generalizată) de ordinul n a lui $u(x, y)$.

Teorema II. *Dacă* u (x, y) *este de* n *ori derivabilă hiperbolic, cu derivata a* n^a *hiperbolică continuă în punctul* (x, y), *atunci*

$$\lim_{h\to 0,\, k\to 0} \frac{\Delta_2^n u(x,y)}{h^n k^n} = D^n u(x, y).$$

Demonstrație. Într'adevăr, putem scrie, aplicând formula lui K. Bögel (§ 1).

$$\Delta_2^n u(x, y) = \Delta_2 [\Delta_2^{n-1} u(x, y)] = hkD\Delta_2^{n-1} u(x + \theta_1 h, y + \theta_1' k) =$$

$$= hk\Delta_2^{n-1} Du(x + \theta_1 h, y + h\theta_1' k),$$

de unde, punând

$$x + \theta_1 h = x', \quad y + \theta_1' k = y',$$

$$\frac{\Delta_2^n u(x, y)}{h^n k^n} = \frac{\Delta_2^{n-1} Du(x', y')}{h^{n-1} k^{n-1}}.$$

Dar

$$\Delta_2^{n-1} Du(x', y') = \Delta_2 [\Delta_2^{n-2} Du(x', y')] = hk\Delta_2^{n-2} D^2 u(x' + \theta_2 h, y' + \theta_2' k),$$

de unde punând:

$$x'' = x' + \theta_2 h \ , \ y'' = y' + \theta_2 k,$$

găsim:

$$\frac{\Delta_2^n u(x, y)}{k_1^n h_1^n} = \frac{\Delta_2^{n-2} D^2 u(x'', y'')}{h^{n-2} k^{n-2}}.$$

Dar

$$x'' = x + (\theta_1 + \theta_2) h \quad , \quad y'' = y + (\theta_1' + \theta_2') k,$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$x'' = x + 2\bar{\theta}_2 h, \qquad y'' = y + 2\bar{\theta}_2' k,$$

cu $$0 \leqq \bar{\theta}_2 \leqq 1, \quad 0 \leqq \bar{\theta}_2' \leqq 1.$$

Prin recurență, se poate stabili formula:

$$\frac{\Delta_2^n u(x, y)}{h^n k^n} = \frac{\Delta_2^{n-i} D^i u(x^{(i)}, y^{(i)})}{h^{n-i} k^{n-i}},$$

valabilă pentru $i < n$, unde:

$$x^{(i)} = x + i\theta_i h, \qquad y^{(i)} = y + i\theta_i' k,$$

cu

$$0 \leqq \theta_i \leqq 1, \quad 0 \leqq \theta_i' \leqq 1.$$

In particular:

$$\frac{\Delta_2^n u(x, y)}{h^n k^n} = \frac{\Delta_2 D^{n-1} u(x^{(n-1)}, y^{(n-1)})}{hk}.$$

Aplicând încă odată membrului II formula lui K. Bögel, obținem:

$$\frac{\Delta_2^n u(x, y)}{h^n k^n} = D^n u(\xi, \eta)$$

unde:

$$\xi = x + n\theta h, \qquad \eta = y + n\theta' k.$$

De aici rezultă, ținând seama de continuitatea funcțiunii $D^n u$ în punctul (x, y),

$$\lim_{h \to 0, k \to 0} \frac{\Delta_2^n u(x, y)}{h^n k^n} = D^n u(x, y)$$

și teorema este demonstrată.

8. In teoria funcțiunilor de o variabilă reală joacă un rol important (în special în teoria seriilor trigonometrice) teorema bine cunoscută a lui Schwarz: Dacă derivata a doua generalizată a unei funcțiuni este nulă într'un interval, atunci această funcțiune este lineară în intervalul considerat.

Vom da aici o teoremă corespunzătoare pentru funcțiunile de *două* variabile reale:

T e o r e m a III. *Dacă derivata a doua hiperbolică generalizată a unei funcțiuni este nulă într'un interval bidimensional* J, *atunci* u (x, y) *este un pseudo-polinom hiperbolic de ordinul I în acest interval.*

Pentru demonstrarea acestei teoreme, vom stabili, în prealabil următoarea lemmă:

L e m m ă. *Fiind dată o funcțiune* u (x, y) *continuă în intervalul*

$$a \leqq x \leqq b, \quad c \leqq y \leqq d$$

există o funcțiune hiperbolic lineară L (x, y) *și una singură, care coincide cu* u (x, y) *pe frontiera acestui interval.*

Vom căuta funcțiunea $L(x, y)$ sub forma

$$L(x, y) = (x - a)(y - c)[\varphi_1(x) + \psi_1(y)] + \varphi_0(x) + \psi_0(y),$$

unde φ_0, ψ_0, φ_1, ψ_1 sunt funcțiunile necunoscute. Trebue să avem respectiv:

$$L(x, c) \equiv \varphi_0(x) + \psi_0(c) = u(x, c),$$
$$L(a, y) \equiv \varphi_0(a) + \psi_0(y) = u(a, y),$$
$$L(x, d) \equiv (d - c)(x - a)[\varphi_1(x) + \psi_1(d)] + \varphi_0(x) + \psi_0(d) = u(x, d),$$
$$L(b, y) \equiv (b - a)(y - c)[\varphi_1(b) + \psi_1(y)] + \varphi_0(b) + \psi_0(y) = u(b, y).$$

Din primele două ecuații scoatem:

$$\varphi_0(x) = u(x, c) - \psi_0(c),$$

$$\psi_0(y) = u(a, y) - \varphi_0(a).$$

Punând condiția:

$$\varphi_0(a) = \psi_0(c),$$

găsim:

$$\varphi_0(a) = \psi_0(c) = \frac{1}{2} u(a, c).$$

Din ultimele două relații scoatem, ținând seama de valorile găsite pentru $\varphi_0(x)$ și $\psi_0(y)$,

$$\varphi_1(x) = \frac{u(x, d) - u(a, d) - u(x, c) + u(a, c)}{(d - c)(x - a)} - \psi_1(d),$$

$$\psi_1(y) = \frac{u(b, y) - u(b, d) - u(a, y) + u(a, c)}{(b - a)(y - c)} - \varphi_1(b).$$

Punând și aici condiția:

$$\varphi_1(b) = \psi_1(d),$$

găsim:

$$\varphi_1(b) = \psi_1(d) = \frac{1}{2} \frac{u(b, d) - u(a, d) - u(b, c) + u(a, c)}{(b - a)(d - c)}.$$

Problema este complet rezolvată. Găsim, în definitiv:

$$\begin{aligned} L(x, y) = {} & \frac{x - a}{b - a}[u(b, y) - u(b, c) - u(a, y) + u(a, c)] + \\ & + \frac{y - c}{d - c}[u(x, d) - u(a, d) - u(x, c) + u(a, c)] - \\ & - \frac{(x - a)(y - c)}{(b - a)(d - c)} \cdot [u(b, d) - u(a, d) - u(b, c) + u(a, c)] + \\ & + u(x, c) + u(a, y) - u(a, c). \end{aligned} \tag{20}$$

Se verifică ușor că această funcțiune este unic determinată. Lemma este demonstrată.

Să trecem, acum, la demonstrarea teoremei enunțate. Fie $u(x, y)$ funcțiunea dată, definită în intervalul J. Să însemnăm cu $L(x, y)$ funcțiunea hiperbolic lineară generalizată, care coincide cu $u(x, y)$ pe frontiera intervalului și să punem

$$w(x, y) = u(x, y) - L(x, y).$$

Să însemnăm, deasemenea, cu $\theta(x, y)$ funcțiunea care verifică ecuația

$$D^2\,\theta = 1$$

și care este nulă pe frontiera intervalului dat. Vom considera funcțiunea:

$$U(x, y) = \lambda\, w(x, y) + \mu^2\, \theta(x, y),$$

unde λ și μ sunt doi parametri. Potrivit ipotezelor, avem

$$\lim_{h\to 0,\ k\to 0} \frac{\Delta_2^2\, U(x, y)}{h^2\, k^2} = \mu^2. \tag{21}$$

Funcțiunea $U(x, y)$ fiind nulă pe frontiera intervalului, are un maximum sau un minimum în interiorul intervalului. Vom arăta că cel de al doilea caz este exclus. Într'adevăr, fie (x_0, y_0) un punct de maximum al lui $U(x, y)$, interior intervalului. Să punem, respectiv,

$$f_1(h) = U(x_0 + h, y_0) - 2\,U(x_0, y_0) + U(x_0 - h, y_0),$$
$$f_1(h, k) = U(x_0 + h, y_0 + k) - 2\,U(x_0, y_0 + k) + U(x_0 - h, y_0 + k),$$
$$f_2(h, k) = U(x_0 + h, y_0 - k) - 2\,U(x_0, y_0 - k) + U(x_0 - h, y_0 - k).$$

Avem, evident, pentru h destul de mic, $(h < \rho)$,

$$f_1(h) > 0.$$

Putem determina apoi pe k astfel încât funcțiunile continue de k

$$f_1(h, k) \quad \text{și} \quad f_2(h, k)$$

să difere de valoarea lor în punctul $k = 0$, care este tocmai $f_1(h)$, cu mai puțin decât $f_1(h)$. Atunci:

$$2\,f_1(h) - f_1(h, k) - f_2(h, k) > 0,$$

adică:

$$\Delta_2^2\, U(x, y) < 0,$$

ceea ce contrazice relația (21). De aici rezultă că avem, în intervalul considerat, oricare ar fi μ,

$$U(x, y) \geqq 0,$$

de unde, pentru $\lambda > 0$, și μ^2 tinzând către zero,

$$w(x, y) \geqq 0,$$

în timp ce, pentru $\lambda < 0$ și μ^2 tinzând către zero,

$$w(x, y) \leqq 0.$$

Adică, în mod riguros, $w \equiv 0$, sau

$$u(x, y) \equiv L(x, y)$$

și teorema este demonstrată.

9. Iată câteva proprietăți utile ale pseudo-polinoamelor hiperbolice:

A. *O translație a axelor transformă un pseudo-polinom hiperbolic într'un pseudo-polinom hiperbolic de același ordin.*

Intr'adevăr, dacă $H_n(x, y)$ este pseudo-polinomul hiperbolic dat, de ordin n, avem:

$$D^{n+1} H_n(x, y) = 0.$$

Fie

$$x = x_0 + X \quad , \quad y = y_0 + Y$$

și

$$\overline{H}_n(X, Y) = H_n(x_0 + X, y_0 + Y).$$

Evident, oricare ar fi i,

$$\Delta_2^i \overline{H}_n(X, Y) = \Delta_2 H_n(x, y),$$

de unde:

$$D^{n+1} \overline{H}_n(X, Y) = D^{n+1} H_n(x, y) = 0,$$

derivata în primul membru fiind luată în raport cu ansamblul variabilelor X, Y. La aceeași concluzie se poate, de altfel, ajunge și pe cale elementară, pornind dela expresia explicită a unui pseudo-polinom hiperbolic.

B. *Produsul dintre un pseudo-polinom hiperbolic și un polinom obișnuit este un pseudo-polinom hiperbolic.*

Intr'adevăr, fie:

$$H_n(x, y) = \sum_0^n [x^i g_i(y) + y^i f_i(x)]$$

pseudo-polinomul hiperbolic dat și $P_m(x, y)$ un polinom obișnuit de gradul m. Avem:

$$H_n(x, y) \cdot P_m(x, y) = P_m(x, y) \sum_0^n x^i g_i(y) + P_m(x, y) \sum_0^n y^i f_i(x).$$

Pentru efectuarea primului produs din dreapta, vom scrie polinomul P_m sub forma

$$P_m(x, y) = \sum_{j=0}^m x^j \cdot p_j(y),$$

iar pentru efectuarea celui de al doilea produs vom scrie polinomul P_m sub forma:

$$P_m(x, y) = \sum_{j=0}^m y^j \cdot q_j(x),$$

$p_j(y)$, $q_j(x)$ fiind polinoame de grad $\leqq m - j$.

Vom avea, astfel:

$$P_m(x, y) \cdot \sum_{i=0}^n x^i g_i(y) = \sum_{k=0}^{m+n} x^k \cdot G_k(y),$$

$$P_m(x, y) \cdot \sum_{i=0}^n y^i f_i(x) = \sum_{k=0}^{m+n} y^k \cdot F_k(x),$$

unde:

$$\left.\begin{aligned} F_k(x) &= \sum_{i=0}^{k} f_i(x) \cdot q_{k-i}(x), \\ G_k(y) &= \sum_{i=0}^{k} g_i(y) \cdot p_{k-i}(y), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

de unde:

$$H_n(x, y) \cdot P_m(x, y) = \sum_{k=0}^{m+n} [x^k G_k(y) + y^k F_k(x)];$$

propoziţiunea este stabilită.

Observare. Să presupunem $q_m \neq 0$. Din relaţiile (22) deducem

$$f_n(x) = \frac{1}{q_m} \cdot F_{m+n}(x),$$

apoi:

$$f_{n-1}(x) = \frac{1}{q_m}[F_{m+n-1}(x) - f_n(x) \cdot q_{m-1}(x)]$$

etc. De aici tragem concluzia că, dacă funcţiunile $F_k(x)$ ar fi toate polinoame, atunci funcţiunile $f_i(x)$ sunt toate polinoame. De asemenea, dacă $G_k(y)$ sunt toate polinoame, atunci funcţiunile $g_i(y)$ sunt toate polinoame, în ipoteza că $p_m \neq 0$. Să numim pseudo-polinom hiperbolic *propriu*, orice pseudo-polinom hiperbolic care nu este un polinom obişnuit. Atunci:

C. *Produsul dintre un pseudo-polinom hiperbolic propriu şi un polinom obişnuit în care nu lipsesc cele mai mari puteri ale lui* x *şi* y, *nu poate fi niciodată un polinom obişnuit.*

10. Să considerăm un şir infinit de pseudo-polinoame hiperbolice de un acelaşi ordin, definite într'un acelaşi interval, pe care, printr'o translaţie a axelor, translaţie care nu schimbă nici latura funcţiei, nici ordinul pseudo-polinoamelor, îl putem aduce să fie intervalul următor:

$$(J): \qquad 0 \leqq x \leqq a \quad , \quad 0 \leqq y \leqq b.$$

Putem atunci enunţa următoarea importantă proprietate de închidere, în raport cu operaţia de trecere la limită:

Teorema IV. *Orice şir convergent de pseudo-polinoame hiperbolice de un acelaşi ordin* n, *definite în intervalul* J, *tinde, în acest interval, către un pseudo-polinom hiperbolic de ordinul* n.

Fie

$$H_1(x, y), \; H_2(x, y), \ldots, H_s(x, y), \ldots$$

şirul convergent dat, unde:

$$H_s(x, y) = \sum_{i=0}^{n} x^i y^i [\varphi_s^i(x) + \psi_s^i(y)].$$

Vom stabili, în prealabil, două lemme:

L e m m a 1. *Limita unui şir convergent de funcţiuni de forma*

$$\varphi_s(x) + \psi_s(y), \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

este o funcţiune de aceeaşi formă.

Această propoziţiune este o consecinţă imediată a unei propoziţiuni generale stabilite anterior de noi [8], şi al cărei enunţ îl reproducem şi în lucrarea de faţă (§ 1). Este suficient, în acest enunţ, să punem:

$$u_s(x, y) = \varphi_s(x) + \psi_s(y).$$

L e m m a 2. *Dacă şirul de pseudo-polinoame hiperbolice* $\{H_s(x, y)\}$ *este convergent în intervalul* J, *atunci şirul*:

$$\{\varphi_s^0(x) + \psi_s^0(y)\}$$

este şi el convergent în acelaşi interval.

Intr'adevăr, şirurile:

$$\{H_s(x, 0)\}, \quad \{H_s(0, y)\}, \quad \{H_s(0, 0)\}$$

sunt, prin ipoteză, convergente. Deci, punând

$$\varphi_s^0(x) + \psi_s^0(0) = A_s(x),$$

$$\varphi_s^0(0) + \psi_s^0(y) = B_s(y),$$

şirurile:

$$\{A_s(x)\} \quad , \quad \{B_s(y)\}$$

sunt convergente în intervalele respective:

$$0 \leqq x \leqq a \quad ; \quad 0 \leqq y \leqq b.$$

In particular, şirul $\{A_s(0)\}$, adică şirul

$$\{\varphi_s^0(0) + \psi_s^0(0)\}$$

este convergent. Dar

$$\varphi_s^0(x) + \psi_s^0(y) = A_s(x) + B_s(y) - A_s(0)$$

şi cum membrul al doilea converge pentru $s \to \infty$, rezultă că şi primul membru este convergent.

Să trecem, acum, la demonstrarea teoremei noastre. Vom proceda prin inducţie, presupunând teorema stabilită pentru pseudo-polinoamele hiperbolice de ordin $< n$, şi arătând că ea subsistă şi pentru pseudo-polinoamele de ordin n. Putem scrie:

$$H_s(x, y) = xyK_s(x, y) + [\varphi_s^0(x) + \psi_s^0(y)], \qquad (23)$$

unde K_s este un pseudo-polinom hiperbolic de ordin $n - 1$. Prin ipoteză, $H_s(x, y)$ converge pentru $s \to \infty$ în tot intervalul J. Deci, potrivit lemmei 2, paranteza dreaptă din membrul al doilea converge şi ea pentru $s \to \infty$. Prin urmare, pentru $xy \neq 0$, adică în intervalul

$$0 < x \leqq a \quad , \quad 0 < y \leqq b,$$

pseudo-polinomul K_s are o limită pentru $s \to \infty$. Această limită este, prin ipoteza admisă de noi, un pseudo-polinom de ordinul $n-1$. Deci limita lui $H_s(x, y)$ va fi, în baza formulei (23), un pseudo-polinom hiperbolic de ordinul n. Teorema fiind adevărată pentru $n = 0$, în baza lemmei 1, ea va fi adevărată, în cazul $xy \neq 0$, pentru orice n număr natural. Pe de altă parte, ea este evidentă în cazul $xy = 0$; teorema este astfel complet stabilită.

12. Potrivit celebrei teoreme a lui Weierstrass, orice funcțiune $f(x)$, continuă într'un interval $[a, b]$, poate fi aproximată uniform în acest interval printr'un polinom. Această teoremă a fost extinsă și la funcțiunile continue de mai multe variabile. In cadrul preocupărilor din această lucrare se pune în mod firesc problema dacă, înlocuind în enunțul teoremei lui Weierstrass, continuitatea obișnuită prin continuitatea hiperbolică, și clasa polinoamelor prin clasa pseudo-polinoamelor hiperbolice, se obține încă un enunț valabil. Dacă se ține seama că un polinom obișnuit este un pseudo-polinom hiperbolic, se poate da imediat un răspuns la această întrebare. Fie, într'adevăr, $U(x, y)$ funcțiunea dată, definită în intervalul J din paragraful precedent. Există o constantă hiperbolică:

$$h_0(x, y) = f(x) + g(y)$$

astfel încât funcțiunea:

$$V(x, y) = U(x, y) - h_0(x, y)$$

să fie în intervalul considerat, continuă, în sensul lui Cauchy. Potrivit teoremei lui Weierstrass, numărului $\varepsilon > 0$ îi corespunde un polinom $P_\varepsilon(x, y)$, astfel încât să avem:

$$| V(x, y) - P_\varepsilon(x, y) | < \varepsilon$$

în acest interval. Punând atunci:

$$H_\varepsilon(x, y) = P_\varepsilon(x, y) + h_0(x, y)$$

vom avea:

$$| U(x, y) - H_\varepsilon(x, y) | < \varepsilon.$$

Pseudo-polinomul hiperbolic $H_\varepsilon(x, y)$ aproximează deci uniform funcțiunea $U(x, y)$ în intervalul considerat, cu mai puțin decât ε. Mai puțin imediată apare următoarea proprietate de aproximare:

Teorema V. *Fiind dată o funcțiune* U(x, y), *hiperbolic continuă în intervalul bidimensional* J, *se poate construi un șir de pseudo-polinoame hiperbolice care să coincidă, toate, pe frontiera intervalului* J *cu funcțiunea* U(x, y), *iar în interiorul acestui interval să tindă uniform către* U(x, y).

Fie, într'adevăr, $\{H_n(x, y)\}$ șirul de pseudo-polinoame determinat potrivit propoziției de mai sus, astfel încât să avem:

$$| U(x, y) - H_n(x, y) | < \frac{\varepsilon_n}{16}, \tag{24}$$

$\{\varepsilon_n\}$ fiind un șir de numere pozitive tinzând către zero. Să considerăm funcțiunea:

$$K_n(x, y) = H_n(x, y) + xy[\varphi_n(x) + \psi_n(y)] + \chi_n(x) + \varpi_n(y).$$

Această funcțiune este un pseudo-polinom de același ordin cu $H_n(x, y)$. Vom determina funcțiunile φ_n, ψ_n, χ_n, ϖ_n, astfel încât să avem:

$$K_n(x, 0) = U(x, 0), \quad K_n(0, y) = U(0, y),$$
$$K_n(x, b) = U(x, b), \quad K_n(a, y) = U(a, y).$$

Vom pune, pentru simplificare:

$$U(x, y) - H_n(x, y) = \eta_n(x, y).$$

Prin ipoteză:

$$|\eta_n(x, y)| < \frac{\varepsilon_n}{16},$$

oricare ar fi punctul $(x, y) \in J$. Condițiile precedente ne dau ecuațiile:

$$\chi_n(x) + \varpi_n(0) = \eta_n(x, 0), \tag{25}$$

$$\chi_n(0) + \varpi_n(y) = \eta_n(0, y), \tag{26}$$

$$[\varphi_n(x) + \psi_n(b)] + \chi_n(x) + \varpi_n(b) = \eta_n(x, b), \tag{27}$$

$$[\varphi_n(a) + \psi_n(y)] + \chi_n(a) + \varpi_n(y) = \eta_n(a, y). \tag{28}$$

Din prima ecuație deducem:

$$\chi_n(0) + \varpi_n(0) = \eta_n(0, 0). \tag{29}$$

Adunând ecuațiile (25) și (26), obținem deci:

$$\chi_n(x) + \varpi_n(y) = \eta_n(x, 0) + \eta_n(0, y) - \eta_n(0, 0). \tag{30}$$

Tot din ecuațiile (25) și (26) deducem, făcând $y = b$ și adunând,

$$\chi_n(x) + \varpi_n(b) = \eta_n(x, 0) + \eta_n(0, b) - \eta_n(0, 0),$$
$$\chi_n(a) + \varpi_n(y) = \eta_n(0, y) + \eta_n(a, 0) - \eta_n(0, 0).$$

Introducând aceste valori în ecuațiile (27) și (28), obținem

$$\varphi_n(x) = \frac{\eta_n(x, b) - \eta_n(x, 0) - \eta_n(0, b) + \eta_n(0, 0)}{bx} - \psi_n(b), \tag{31}$$

$$\psi_n(y) = \frac{\eta_n(a, y) - \eta_n(0, y) - \eta_n(a, 0) + \eta_n(0, 0)}{ay} - \varphi_n(a). \tag{32}$$

Din prima din aceste relații, de pildă, deducem:

$$\varphi_n(a) + \psi_n(b) = \frac{\eta_n(a, b) - \eta_n(a, 0) - \eta_n(0, b) + \eta_n(0, 0)}{ab}. \tag{33}$$

Prin urmare, ținând seama de relațiile (30), (31), (32), (33), deducem:

$$K_n(x, y) = H_n(x, y) + \frac{x}{a}[\eta_n(a, y) - \eta_n(0, y) - \eta_n(a, 0) + \eta_n(0, 0)] +$$

$$+ \frac{y}{b}[\eta_n(x, b) - \eta_n(x, 0) - \eta_n(0, b) + \eta_n(0, 0)] -$$

$$- \frac{xy}{ab}[\eta_n(a, b) - \eta_n(a, 0) - \eta_n(0, b) + \eta_n(0, 0)] +$$

$$+ \eta_n(x, 0) + \eta_n(0, y) - \eta_n(0, 0).$$

Cum $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$, $\left|\frac{y}{b}\right| < 1$, deducem de aici

$$|K_n(x, y) - H_n(x, y)| < \frac{15\varepsilon_n}{16}.$$

Dar

$$|U(x, y) - H_n(x, y)| < \frac{\varepsilon_n}{16},$$

obținem deci, în definitiv,

$$|U(x, y) - K_n(x, y)| < \varepsilon_n,$$

oricare ar fi $(x, y) \in J$. Teorema este demonstrată.

12. Pentru funcțiunile continue de o variabilă, este util, în multe probleme, faptul că o astfel de funcțiune poate fi aproximată uniform de o linie poligonală înscrisă. Se pune întrebarea dacă pentru funcțiunile de două variabile, dotate cu proprietatea de continuitate hiperbolică, există o proprietate asemănătoare. Răspunsul este pozitiv. Să considerăm o împărțire a intervalului J în intervale parțiale. Vom numi funcțiune *hiperbolic poliedrală*, corespunzătoare acestei împărțiri, orice funcțiune care este hiperbolic lineară în fiecare din intervalele parțiale. Cu această definiție, putem enunța:

Teorema VI. *Orice funcțiune* U(x, y), *hiperbolic continuă în intervalul* J, *poate fi aproximată uniform de o funcțiune hiperbolic poliedrală în acest interval.*

Intr'adevăr, $U(x, y)$ este uniform hiperbolic continuă în intervalul închis considerat [2]. Aceasta înseamnă că variația superficială $\Delta_2 U$ este inferioară unui număr pozitiv dat ε în orice interval $J' \subset J$, de dimensiuni inferioare unui număr $\delta(\varepsilon)$. Să considerăm atunci o împărțire a intervalului J în intervale parțiale de dimensiuni inferioare lui $\delta\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)$, prin dreptele:

$$x = 0,\ x = x_1,\ x = x_2, \ldots,\ x = x_i, \ldots,\ x = x_n = a,$$

$$y = 0,\ y = y_1,\ y = y_2, \ldots,\ y = y_k, \ldots,\ y = y_p = b.$$

Potrivit lemmei demonstrate în § 2, există o funcțiune hiperbolic lineară $L_{ik}(x, y)$, care coincide cu $U(x, y)$ pe periferia intervalului:

$$(J_{ik}):\quad x_{i-1} \leqq x \leqq x_i\ ,\quad y_{k-1} \leqq y \leqq y_k.$$

Punând, pentru prescurtare,

$$U(x_i, y_k) = U_{ik},$$

formula (20) aplicată intervalului J_{ik}, dă:

$$L_{ik}(x, y) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}[U(x_i, y) - U(x_{i-1}, y) - U_{i,k-1}, + U_{i-1,k-1}] +$$

$$+ \frac{y - y_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}[U(x, y_k) - U(x, y_{k-1}) - U_{i-1,k} + U_{i-1,k-1}] -$$

$$- \frac{(x - x_{i-1})(y - y_{k-1})}{(x_i - x_{i-1})(y - y_{k-1})}[U_{ik} - U_{i-1,k} - U_{i,k-1} + U_{i-1,k-1}] +$$

$$+ U(x, y_{k-1}) + U(x_{i-1}, y) - U_{i-1,k-1}.$$

Să însemnăm cu $\Lambda(x, y)$ funcțiunea hiperbolic poliedrală, egală cu $L_{ik}(x, y)$ în intervalul J_{ik}. Ţinând seamă de felul cum am construit intervalele J_{ik}, avem, *pentru orice punct* (x, y) *din acest interval*:

$$|U(x, y) - \Lambda(x, y)| \leqq \frac{\varepsilon}{8}\left|\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right| + \frac{\varepsilon}{8}\left|\frac{y - y_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}\right| +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{8}\left|\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right| \cdot \left|\frac{y - y_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}\right| + \frac{\varepsilon}{8}.$$

Dar:

$$\left|\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right| \leqq 1, \quad \left|\frac{y - y_{k-1}}{y_k - y_{k-1}}\right| \leqq 1.$$

Prin urmare:

$$|U(x, y) - \Lambda(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi cum membrul din dreapta este independent de intervalul considerat, rezultă că această inegalitate are loc pentru orice punct din intervalul J; cu aceasta teorema este demonstrată.

§ 3. Seriile hiperbolic întregi

13. Acest paragraf este consacrat studiului convergenţei seriilor de forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\varphi_n(x) + \psi_n(y)] \cdot x^n y^n, \tag{34}$$

serii care se pot numi, pentru motive ce se vor vedea în cursul desfăşurării ulterioare a acestei lucrări, *serii hiperbolic întregi.*

Dacă punem:

$$U_n(x, y) = [\varphi_n(x) + \psi_n(y)]\, x^n y^n,$$

putem scrie:

$$U_n(x, y) = g_n(y) \cdot x^n + f_n(x) \cdot y^n,$$

unde:

$$f_n(x) = x^n \cdot \varphi_n(x), \quad g_n(y) = y^n \cdot \psi_n(y).$$

Deci seria (34) se poate scrie sub forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [g_n(y)\, x^n + f_n(x) \cdot y^n]. \tag{34'}$$

Reciproc, o serie de forma (34') poate fi adusă la forma (34), punând:

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x)}{x^n}, \quad \psi_n(y) = \frac{g_n(y)}{y^n}.$$

Dacă, pentru $n > m$ avem $U_n = 0$, seria se reduce la un pseudo-polinom hiperbolic de ordinul m.

Vom presupune, în cele ce urmează, funcțiunile φ_n, ψ_n continue în intervalele respective

$$0 \leqq |x| \leqq a, \quad 0 \leqq |y| \leqq b.$$

Vom însemna prin J_0 intervalul bidimensional definit de inegalitățile precedente. Problema centrală a acestui paragraf poate fi formulată astfel: Care este mulțimea punctelor din J_0 în care seria (34) este convergentă? Pentru rezolvarea acestei chestiuni, vom întrebuința artificiul următor: Vom considera, în locul seriei (34), seria următoare

$$\sum_{0}^{\infty} [\varphi_n(x) + \psi_n(y)]\, \alpha^n \beta^n, \tag{35}$$

unde α și β sunt doi parametri. Să punem

$$k_n(x, y) = \varphi_n(x) + \psi_n(y)$$

și

$$\frac{1}{R(x, y)} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|k_n(x, y)|}.$$

Seria (35) va fi convergentă pentru $|\alpha\beta| < R(x, y)$ și divergentă pentru $|\alpha\beta| > R(x, y)$. Putem atunci enunța:

Teorema VII. *Seria* (34) *este absolut convergentă pe mulțimea* I_0 *a punctelor* (x, y) *din* J_0 *care verifică inegalitățile*

$$R(x, y) \pm xy > 0$$

și divergentă pe mulțimea punctelor (x, y) *din* J_0 *pentru care*

$$R(x, y) \pm xy < 0.$$

14. Cu tot caracterul său precis, teorema precedentă nu ne dă nicio informaţie asupra naturii topologice a mulţimii punctelor de convergenţă. Mai mult încă, nu ştim dacă seria converge uniform pe această mulţime. Vom arăta totuşi că mulţimea I_0 conţine un domeniu în care seria (34) este şi absolut şi uniform convergentă.

Teorema VIII. *Seria* (34) *este absolut şi uniform convergentă în interiorul domeniului intersectat pe intervalul* J_0 *de hiperbolele*

$$|xy| = \rho,$$

ρ *fiind o constantă pozitivă sau nulă, depinzând de seria dată.* Să punem într'adevăr,

$$C_n = \sup_{(x,y)\in J_0} \{|\varphi_n(x) + |\psi_n(y)|\}.$$

Seria dată este, atunci, majorată de seria întreagă în xy

$$\sum C_n x^n y^n,$$

care este convergentă, absolut şi uniform, în interiorul domeniului

$$|xy| < \rho,$$

unde

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{C_n}},$$

domeniu limitat de hiperbolele echilatere conjugate

$$xy = \rho, \quad xy = -\rho.$$

Deci seria (34) este absolut şi uniform convergentă în porţiunea din acest domeniu, cuprinsă în intervalul J_0.

Observare. In baza unui rezultat demonstrat de noi anterior [8], în interiorul domeniului de mai sus suma seriei (34) este o funcţiune hiperbolic continuă.

Teorema IX. *In interiorul domeniului precizat în teorema precedentă, seriile*

$$\sum_0^\infty \varphi_n(x)\, x^n y^n \quad \text{şi} \quad \sum_0^\infty \psi_n(y)\, x^n y^n$$

sunt absolut şi uniform convergente.

Să punem într'adevăr,

$$-k_n = \min\,[0, \inf_{|x|\leq a} \varphi_n(x)],$$

$$-l_n = \min\,[0, \inf_{|y|\leq b} \psi_n(y)],$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{k_n + l_n}},$$

precum și

$$\Phi_n(x) = \varphi_n(x) - k_n,$$

$$\Psi_n(y) = \psi_n(y) - l_n.$$

Atunci

$$\sum_0^\infty [\varphi_n(x) + \psi_n(y)]\, x^n y^n = \sum_0^\infty [\Phi_n(x) + \Psi_n(y)]\, x^n y^n + \sum_0^\infty (k_n + l_n)\, x^n y^n.$$

Dar seria

$$\sum (k_n + l_n)\, x^n y^n \tag{36}$$

este convergentă (absolut și uniform) în interiorul domeniului K_0 definit de inegalitatea $|xy| < \bar{\rho}$. Pe de altă parte, punând

$$\operatorname{Sup}_{|x| \leqq a} |\varphi_n(x)| = A_n, \quad \operatorname{Sup}_{|y| \leqq b} |\psi_n|(y)| = B_n,$$

avem

$$A_n + B_n = C_n, \quad k_n \leqq A_n, \; l_n \leqq B_n,$$

de unde

$$\sqrt[n]{k_n + l_n} \leqq \sqrt[n]{C_n},$$

dică $\bar{\rho} \geqslant \varphi$, prin urmare

$$I_0 \subset K_0. \tag{37}$$

In interiorul domeniului I_0, seria (34) este convergentă absolut și uniform, potrivit teoremei precedente. In interiorul aceluiași domeniu, seria (35) este și ea convergentă, în baza incluziunii (37). Prin urmare, seria

$$\sum_0^\infty [\Phi_n(x) + \Psi_n(y)]\, x^n y^n$$

este convergentă, absolut și uniform, în interiorul lui I_0. Cum $\Phi_n(x) \geqq 0$, $\Psi_n(y) \geqq 0$, seriile

$$\sum_0^\infty \Phi_n(x)\, x^n y^n, \quad \sum_0^\infty \Psi_n(y)\, x^n y^n$$

sunt și ele convergente, în același mod, în interiorul lui I_0. Dar $k_n \geqq 0$ $l_n \geqq 0$, deci, din convergența seriei (35), deducem convergența seriilor:

$$\sum k_n x^n y^n, \; \Sigma\, l_n x^n y^n.$$

Prin urmare, în definitiv, seriile

$$\sum \varphi_n(x)\, x^n y^n, \; \Sigma\, \psi_n(y)\, x^n y^n$$

sunt absolut și uniform convergente în interiorul lui I_0.

§ 4. Determinarea unui pseudo-polinom hiperbolic prin condiții date pe caracteristice

15. Fie $u(x, y)$ o funcție sumabilă superficial în intervalul

$$(J): \qquad a \leqq x \leqq b, \; c \leqq y \leqq d.$$

Vom pune:

$$D_{a,c}^{-1} u = \int_a^x dx' \int_c^y u(x', y') dy'.$$

In cursul desvoltărilor ulterioare, vom lua pentru simplicitate, $a = c = 0$, de aceea vom suprima, în notația precedentă, indicii inferiori. Intervalul (J) va fi înlocuit prin intervalul $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$. Vom pune mai departe

$$D^{-i} = D^{-1}(D^{-i+1}).$$

Cu această notație avem, oricare ar fi h și k întregi pozitivi sau negativi,

$$D^h(D^k) = D^{h+k},$$

cu condiția de a pune $D^0 = 1$, adică $D^0 u = u$.

In cursul acestui paragraf vom rezolva următoarea problemă: *Să se determine un pseudo-polinom hiperbolic* $H_n(x, y)$ *de ordinul* n, *cunoscându-se valorile pe care acest pseudo-polinom și derivatele sale hiperbolice succesive*

$$DH_n, \; D^2H_n, \ldots, D^{n-1}H_n,$$

le iau pe dreptele $x = 0$, $y = 0$.

Vom proceda prin recurență. Pentru $n = 0$, avem evident $\Delta_2 H_0(x, y) = 0$, oricare ar fi intervalul pe care se calculează această diferență.

Deci

$$H_0(x, y) = H_0(x, 0) + H_0(0, y) - H_0(0, 0).$$

Pentru $n = 1$, pseudo-polinomul căutat este de forma

$$H_1(x, y) = g_1(y)\, x + f_1(x)\, y + f_0(x) + g_0(y).$$

Avem

$$DH_1(x, y) = f_1'(x) + g_1'(y),$$

iar, pe de altă parte, ținând seama de rezultatul precedent,

$$DH_1(x, y) = DH_1(x, 0) + DH_1(0, y) - DH_1(0, 0).$$

Putem lua, de pildă,

$$f_1'(x) = DH_1(x, 0) - \frac{1}{2} DH_1(0, 0),$$

$$g_1'(y) = DH_1(0, y) - \frac{1}{2} DH_1(0, 0),$$

de unde

$$f_1(x) = \int_0^x DH_1(x', 0)\, dx' + f_1(0) - \frac{1}{2} DH_1(0, 0)\, x,$$

$$g_1(y) = \int_0^y DH_1(0, y')\, dy' + g_1(0) - \frac{1}{2} DH_1(0, 0)\, y.$$

Cum $f_1(x)$ și $g_1(y)$ sunt determinate în afară de o constantă, putem lua

$$f_1(0) = g_1(0).$$

Dacă ținem seama că putem scrie

$$yf_1(x) = \int_0^y dy' \int_0^x DH_1(x', 0)\, dx' - \frac{1}{2} DH_1(0, 0)\, xy =$$

$$= D^{-1} DH_1(x, 0) - \frac{1}{2} D^{-1} DH_1(0, 0),$$

$$xg_1(y) = \int_0^x dx' \int_0^y DH_1(0, y')\, dy' - \frac{1}{2} DH_1(0, 0)\, xy =$$

$$= D^{-1} DH_1(0, y) - \frac{1}{2} D^{-1} DH_1(0, 0),$$

expresia definitivă a lui $H_1(x, y)$ va fi

$$H_1(x, y) = D^{-1}[DH_1(x, 0) + DH_1(0, y) - DH_1(0, 0)] + \\ + H_1(x, 0) + H_1(0, y) - H_1(0, 0). \tag{38}$$

Vom arăta că avem, pentru n oarecare

$$H_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} D^{-k}[D^k H_n(x, 0) + D^k H_n(0, y) - D^k H_n(0, 0)]. \tag{39}$$

Intr'adevăr, este evident, în primul rând, că $H_n(x, y)$ dat de această formulă este un pseudo-polinom de ordinul n. Apoi, aplicând ambilor membri ai relației precedente operatorul D^i, $(i \leqq n)$, avem

$$D^i H_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} D^{-k+i}[D^k H_n(x, 0) + D^k H_n(y, 0) - H_n(0, 0)],$$

sau, punând $n - i = m$,

$$D^i H_n(x, y) = \sum_{0}^{m} D^{-k}[D^{k+i} H_n(x, 0) + D^{k+i} H_n(0, y) - H_n(0, 0)].$$

Din această formulă se deduce imediat

$$\lim_{y \to 0} D^i H_n(n, y) = D^i H_n(x, 0),$$

$$\lim_{x \to 0} D^i H_n(x, y) = D^i H_n(0, y).$$

Pseudo-polinomul hiperbolic dat de formula (39) satisface deci condițiilor la frontieră prescrise.

16. Vom arăta acum că pseudo-polinomul astfel determinat este *unic*. Aceasta revine la a arăta că, dacă un pseudo-polinom hiperbolic $\mathcal{H}_n$ de ordinul n, este nul împreună cu toate derivatele sale hiperbolice pe dreptele $x = 0$, $y = 0$, el este identic nul. Proprietatea este adevărată pentru ordinul zero. Într'adevăr, fie

$$\mathcal{H}_0(n, y) = f_0(x) + g_0(y).$$

Avem

$$f_0(x) + g_0(y) = 0,$$
$$g_0(y) + f_0(0) = 0,$$
$$f_0(0) + g_0(0) = 0,$$

de unde

$$\mathcal{H}_0(x, y) = f_0(x) + g_0(y) = -f_0(0) - g_0(0) = 0.$$

Să presupunem atunci proprietatea adevărată pentru pseudo-polinoamele de ordin $< n$ și fie

$$\mathcal{H}_n(x, y) = \sum_0^n [f_k(x)\, y^k + g_k(y)\, x^k].$$

Derivata hiperbolică $D\mathcal{H}_n(x, y)$ este un pseudo-polinom de ordinul $n-1$, nul, împreună cu toate derivatele sale hiperbolice pentru $x = y = 0$. Deci, potrivit ipotezei făcute,

$$D\mathcal{H}_n(x, y) \equiv 0,$$

de unde

$$\mathcal{H}_n(x, y) = u(x) + v(y).$$

Dar, din raționamentul făcut mai sus pentru $\mathcal{H}_0(x, y)$, rezultă

$$\mathcal{H}_n(x, y) \equiv 0.$$

Proprietatea este adevărată pentru n, deci este generală. Putem enunța, în definitiv, următoarea propoziție:

Teorema X. *Există un pseudo-polinom hiperbolic* $H_n(x, y)$ *de ordinul* n *și unul singur pentru care*

$$H_n(x, 0),\ DH_n(x, 0), \ldots,\ D^{n-1} H_n(x, 0),$$

$$H_n(0, y),\ DH_n(0, y), \ldots,\ D^{n-1} H_n(0, y).$$

au valori date. Acest pseudo-polinom este dat de formula

$$H_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} D^{-k}[D^k H_n(x, 0) + D^k H_n(0, y) - D^k H_n(0, 0)].$$

§ 5. Formula fundamentală: Cazul general

17. Dacă U este o funcțiune definită în intervalul plan

$$(J): \qquad -\alpha \leqq x \leqq \alpha \quad , \quad -\beta \leqq y \leqq \beta,$$

de $n+1$ ori derivabilă hiperbolic în acest interval, atunci putem forma expresia

$$\sum_{0}^{n} D^{-k}[D^k U(x, 0) + D^k U(0, y) - D^k U(0, 0)],$$

analogă membrului al doilea din formula (39). Dar această expresie nu este egală cu $U(x, y)$ decât dacă $U(x, y)$ este un pseudo-polinom hiperbolic de ordinul n. In cazul general, putem da totuși o formulă asemănătoare formulei (39).

Teorema XI. *Fie* $U(x, y)$ *o funcțiune definită în intervalul* J, *de* $n+1$ *ori derivabilă hiperbolic în acest interval. Există un punct* (ξ, η) *în intervalul considerat, astfel încât să avem*

$$U(x, y) = \sum_{0}^{n} D^{-k}[D^k U(x, 0) + D^k U(0, y) - D^k U(0, 0)] + R_n, \qquad (40)$$

unde

$$R_n = \frac{x^{n+1} y^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot D^{n+1} U(\xi, \eta). \qquad (41)$$

Demonstrație. Vom pleca dela formula generală de integrare prin părți (14), a integralelor duble (§ 1). Să punem, în acea formulă $a = b = 0$ și

$$\left.\begin{aligned} u(x', y') &= (x - x')^n (y - y')^n, \\ v(x', y') &= D^n U(x', y'). \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Să punem, de asemenea, în mod provizoriu pentru ușurința calculelor,

$$\int_0^x \int_0^y (x - x')^n (y - y')^n D^{n+1} U(x', y')\, dx'\, dy' = I_n,$$

$$ny^n \int_0^x (x - x')^{n-1} D^n U(x', 0)\, dx' + nx^n \int_0^y (y - y')^{n-1} D^n U(0, y')\, dy' = J_n.$$

Aplicarea formulei (14) funcțiunilor date de relațiile (42) ne va da

$$I_n = x^n y^n D^n U(0, 0) - J_n + n^2 J_{n-1}.$$

Să punem

$$D_x^{-1} f(x) = \int_0^x f(x')\, dx' \quad , \quad D_y^{-1} g(y) = \int_0^y g(y')\, dy'$$

și, în general, prin recurență,

$$D_x^{-k-1} f(x) = D_x^{-1} [D_x^{-k} f(x)],$$
$$D_y^{-k-1} g(y) = D_y^{-1} [D_y^{-k} g(y)],$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Atunci, aplicând fiecăruia din integralele simple care formează expresia lui J_n formula obișnuită de integrare prin părți de n ori, obținem

$$J_n = n!\, y^n D_x^{-n} [D^n U(x, 0)] + n!\, x^n D_y^{-n} [D^n U(0, y)].$$

Dar este ușor de verificat că

$$y^n D_x^{-n} [D^n U(x, 0)] = n!\, D^{-n} [D^n U(x, 0)],$$

$$x^n D_y^{-n} [D^n U(0, y)] = n!\, D^{-n} [D^n U(0, y)].$$

Prin urmare, putem scrie

$$J_n = (n!)^2 D^{-n} [D^n U(x, 0) + D^n U(0, y)],$$

de unde formula de recurență

$$I_n = x^n y^n D^n U(0, 0) + (n!)^2 D^{-n} [D^n U(x, 0) + D^n U(0, y)] + n^2 I_{n-1}.$$

Aplicarea repetată a acestei formule de recurență ne dă

$$I_n = \sum_0^n (A_n^k)^2 x^k y^k D^k U(0, 0) -$$

$$(n!)^2 \sum_0^n D^{-k} [D^k U(x, 0) + D^k U(0, y)] + (n!)^2 U(x, y),$$

cu

$$A_k^n = n(n-1)\ldots(n-k+1),$$

de unde

$$U(x, y) = \sum_0^n D^{-k} [D^k U(x, 0) + D^k U(0, y) - D^k U(0, 0)] + R_n,$$

cu

$$R_n = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^x \int_0^y (x - x')^n (y - y')^n D^{n+1} U(x', y')\, dx'\, dy'.$$

Dacă observăm că funcțiunea $(x - x')^n$ este monotonă în intervalul $[0, x]$, putem scrie

$$\int_0^x (x - x')^n D^{n+1} U(x', y')\, dx' = D^{n+1} U(\xi, y') \cdot \int_0^x (x - x')^n\, dx' =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot D^{n+1} U(\xi, y').$$

Prin urmare

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{n!\,(n+1)!}\int_0^y (y-y')^n\, D^{n+1}\, U(\xi, y')\, dy'.$$

Aplicând și ultimei integrale formula mediei, obținem, în definitiv,

$$R_n = \frac{x^{n+1}\, y^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\cdot D^{n+1}\, U(\xi, \eta),$$

cu

$$0 \leqq \xi \leqq x \quad , \quad 0 \leqq \eta \leqq y.$$

Cu aceasta, teorema este complet stabilită.

§ 6. Analiticitatea hiperbolică

18. Formula fundamentală (40), stabilită în paragraful precedent poate fi considerată ca o extensiune a formulei lui Taylor la operatorul diferențial D, dar și corespunzând, în cazul hiperbolic, formulei lui Almansi din cazul eliptic. Se înțelege atunci cu ușurință cum se poate concepe, începând dela această formulă fundamentală, desfășurarea unei teorii a analiticității « hiperbolice» a funcțiunilor de două variabile *reale*, deosebită de analiticitatea clasică. Iată cum se poate ajunge la această noțiune: Să ne dăm funcțiunea $U(x, y)$ în intervalul J și să presupunem că $D^k\, U$ există, oricare ar fi k natural. Vom spune, atunci, că U este *indefinit derivabilă hiperbolic*. Să presupunem că funcțiunea îndeplinește această condiție și că avem

$$\lim R_n = 0,$$

uniform în intervalul considerat. In acest caz, putem scrie desfășurarea următoare în serie

$$U(x, y) = \sum_0^\infty D^{-n}\,[D^n\, U(x, 0) + D^n\, U(0, y) - D^n\, U(0, 0)], \qquad (43)$$

desfășurare valabilă în tot intervalul considerat.

Să schimbăm, în formulele precedente, pe x în $x + a$ și pe y în $y + b$. Operatorul $D^{-1}\, F$ devine, în acest caz,

$$D^{-1}\, F = \int_a^x \int_b^y F(x', y')\, dx'\, dy',$$

iar intervalul J devine

$$a - \alpha \leqq x \leqq a + \alpha \quad , \quad b - \beta \leqq y \leqq b + \beta.$$

In sfârșit, formulele (40), (41), (43) devin

$$U(x, y) = \sum_{k=0}^{n}{}' D^{-k}[D^k U(x, b) + D^k U(a, y) - D^k U(a, b)] + R_n, \qquad (40')$$

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}(y-b)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot D^{n+1} U(\xi, \eta), \qquad (41')$$

$$U(x, y) = \sum_{0}^{\infty}{}' D^{-k}[D^k U(x, b) + D^k U(a, y) - D^k U(a, b)]. \qquad (43')$$

Vom spune că $U(x, y)$ este *hiperbolic analitică* [1]) într'un domeniu G al planului, dacă în fiecare punct (a, b) interior acestui domeniu se poate desfășura într'o serie de tipul (43'), convergentă într'un anumit interval $J \subset G$, cu centrul în punctul (a, b).

19. Să punem, respectiv, în formula (41'), în care vom înlocui indicele k cu n,

$$D^n U(x, b) = A_n(x) \quad , \quad D^n U(a, y) = B_n(y),$$

$$D_x^{-n} A_n(x) - \frac{x^n}{2 \cdot n!} D^n U(0, 0) = f_n(x),$$

$$D_y^{-n} B_n(y) - \frac{y^n}{2 \cdot n!} D^n U(0, 0) = g_n(y).$$

Formula se poate scrie atunci:

$$U(x, y) = \sum_{0}^{\infty}{}' \frac{1}{n!}[(x-a)^n g_n(y) + (y-b)^n f_n(x)], \qquad (44)$$

unde f_n și g_n sunt de n ori derivabile în punctul $x = a$, respectiv $y = b$ și au o rădăcină multiplă de ordinul n în acest punct.

Teorema XII. Teorema de unicitate. *O funcțiune* U(x, y), *indefinit derivabilă hiperbolic într'un anumit interval* J *cu centrul în punctul* (a, b), *se poate desfășura într'un singur mod într'o serie de tipul* (44).

Demonstrație. Să presupunem, pentru simplificare, $a = b = 0$. Dacă $U(x, y)$ ar fi desfășurabilă în două moduri diferite într'o serie de tipul (44), am avea

$$0 = \sum_{0}^{\infty}{}' \frac{1}{n!}[x^n G_n(y) + y^n F_n(x)], \qquad (45)$$

unde F_n și G_n sunt de n ori derivabile în origine și au, în acest punct, o rădăcină multiplă de ordinul n. Din (45) deducem, pentru $y = 0$,

$$F_0(x) = -G_0(0),$$

iar pentru $x = 0$

$$G_0(y) = -F_0(0),$$

[1]) Această denumire se datorește lui N. Ciorănescu [5].

de unde

$$F_0(x) + G_0(y) = -[F_0(0) + G_0(0)] = 0.$$

Scoțând atunci în factor produsul xy în formula (45), rămâne

$$0 \equiv \sum_0^\infty \frac{1}{n!}\left[x^{n-1}\frac{G_n(y)}{y} + y^{n-1}\frac{F_n(x)}{x}\right],$$

de unde, făcând succesiv $x = 0$ și $y = 0$, obținem

$$F_1(x) = -x\,G_1'(0),$$

$$G_1(y) = -y\,F_1'(0).$$

Prin urmare, obținem

$$\frac{F_1(x)}{x} + \frac{G_1(y)}{y} = -[F_1'(0) + G_1'(0)],$$

de unde, trecând la limită,

$$F_1'(0) + G_1'(0) = 0$$

și deci

$$yF_1(x) + xG_1(y) \equiv 0.$$

Să presupunem atunci, că avem pentru $i \leqq n$,

$$x^i G_i(y) + y^i F_i(x) \equiv 0.$$

Vom arăta că avem și

$$x^{n+1} G_{n+1}(y) + y^{n+1} F_{n+1}(x) \equiv 0.$$

Intr'adevăr, identitatea (45) se reduce, în ipoteza noastră, la

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}[x^k G_k(y) + y^k F_k(x)] \equiv 0.$$

Scoțând în factor produsul $x^{n+1}\,y^{n+1}$ și făcând, succesiv, $y = 0$ și $x = 0$, obținem

$$F_{n+1}(x) = -x^{n+1} G_{n+1}^{(n+1)}(0),$$

$$G_{n+1}(y) = -y^{n+1} F_{n+1}^{(n+1)}(0),$$

de unde deducem, ca mai sus, în primul rând

$$F_{n+1}^{(n+1)}(0) + G_{n+1}^{(n+1)}(0) = 0$$

și apoi

$$x^{n+1} G_{n+1}(y) + y^{n+1} F_{n+1}(x) \equiv 0.$$

Deci, toți termenii sumei din formula (45) sunt identic nuli și reprezentarea (43) este unică.

20. Vom trece acum la cercetarea criteriilor de analiticitate hiperbolică a unei funcțiuni. Iată un prim criteriu:

Teorema XIII. *Dacă o funcțiune* U (x, y) *este indefinit derivabilă hiperbolic și dacă există un număr pozitiv* M, *astfel încât să avem*

$$| D^n U (x, y) | < M$$

pentru orice n *și pentru orice punct dintr'un interval* J, *atunci* U *și toate derivatele sale hiperbolice sunt funcțiuni hiperbolic analitice în* J.

Intr'adevăr, în acest caz, R_n fiind restul desfășurării din formula fundamentală (40), vom avea

$$| R_n | < \frac{M | x |^{n+1} . | y |^{n+1}}{[(n+1)!]^2}$$

și deci

$$\lim R_n = 0,$$

uniform în intervalul J.

Un al doilea criteriu este constituit de propoziționea următoare:

Teorema XIV. *Dacă* U(x, y) *este indefinit derivabilă hiperbolic în intervalul* J, *și dacă există două numere pozitive* M, δ *astfel încât să avem*

$$| D^n U (x, y) | < M (n!)^2 \delta^n ,$$

pentru orice n *și orice punct* (x, y) $\in$ J, *atunci* U (x, y) *și toate derivatele sale hiperbolice sunt hiperbolic analitice în* J.

Intr'adevăr, din formula (41') deducem, în ipoteza noastră,

$$| R_n | < M | x - a |^{n+1} . | y - b |^{n+1} . \delta^{n+1} .$$

Dacă luăm

$$| x - a | \cdot | y - b | < \frac{1}{\delta} ,$$

atunci membrul al doilea al inegalității precedente tinde către zero pentru $n \to \infty$, deci

$$\lim R_n = 0$$

și U este hiperbolic analitică în punctul (a, b) deci în J.

Pentru formularea celui de al treilea criteriu de analiticitate hiperbolică vom reaminti unele noțiuni necesare. Vom spune că, o funcțiune $U (x, y)$ este total monotonă în intervalul J dacă, pentru orice pereche de numere $h > 0, k > 0$, astfel încât $(x + h, y + k) \in J$, expresiile

$$u (x + h, y) - u (x, y)$$

$$u (x, y + k) - u (x, y)$$

$$u (x + h, y + k) - u (x + h, y) - u (x, y + k) + u (x, y)$$

păstrează, toate, un același semn în tot intervalul J. Vom spune că $U (x, y)$ este total crescătoare, sau total descrescătoare, după cum acest semn va fi

pozitiv, sau negativ. Să presupunem acum că, $U(x, y)$ este indefinit derivabilă hiperbolic în J. Vom spune că $U(x, y)$ este absolut total monotonă în J, dacă: 1. $U(x, y)$ și toate derivatele sale hiperbolice sunt total monotone de același sens; 2. $U(x, y)$ este pozitivă, sau negativă, după cum această funcțiune este absolut total crescătoare, sau absolut total descrescătoare. Cu aceste definiții, putem enunța:

Teorema XV. *Dacă* U (x, y) *este absolut total monotonă în intervalul* J, *atunci* U (x, y) *și toate derivatele sale hiperbolice sunt hiperbolic analitice în acest interval.*

Intr'adevăr, din ipotezele făcute asupra funcțiunii $U(x, y)$, rezultă în primul rând că, dacă

$$x'' > x', \quad y'' > y',$$

atunci

$$D^k U(x'', y'') > D^k U(x', y'),$$

oricare ar fi k. Intr'adevăr, avem succesiv, prin ipoteză,

$$D^k U(x'', y'') > D^k U(x', y''),$$
$$D^k U(x', y'') > D^k U(x', y').$$

In al doilea rând, ținând seama de definiția operatorilor D, D^2,... deducem, din ipotezele făcute în enunț,

$$D^k U(x, y) > 0,$$

oricare ar fi k și oricare ar fi punctul (x, y) interior intervalului J. De aici deducem că, pentru

$$x'' > x', \quad y'' > y', \tag{46}$$

expresia

$$D^k U(x'', y') + D^k U(x', y'') - D^k U(x', y'),$$

este pozitivă oricare ar fi k. Intr'adevăr, această expresie este suma termenilor

$$D^k U(x'', y') \text{ și } D^k U(x', y'') - D^k U(x', y')$$

ambii pozitivi, oricare ar fi k. Să transcriem atunci desfășurarea (40'), înlocuind punctul (a, b) prin (x', y') și punctul (x, y) prin (x'', y''), punctele (x', y'), (x'', y'') satisfăcând, în afara inegalităților (46), condițiilor următoare:

$$a \leqq x' < a + \rho, \qquad b \leqq y' < b + \rho,$$
$$a < x'' \leqq a + \rho, \qquad b < y'' \leqq b + \rho.$$

In membrul al doilea al acestei desfășurări, toți termenii vor fi pozitivi, ca integrale ale unor funcțiuni pozitive. Ținând atunci seama că, în formula restului, avem

$$x' \leqq \xi \leqq x'', \qquad y' \leqq \eta \leqq y'',$$

deducem

$$D^{n+1} U(\xi, \eta) > D^{n+1} U(x', y'),$$

de unde în particular pentru

$$[x'' = a + \rho,\ y'' - b + \rho,$$

$$\frac{(a + \rho - x')^{n+1}(b + \rho - y')^{n+1}}{[(n+1)!]^2} D^{n+1} U(x', y') < U(a + \rho, b + \rho).$$

Să punem $U(a + \rho, b + \rho) = M$. Atunci

$$D^{n+1} U(x', y') < \frac{M[(n+1)!]^2}{(a + \rho - x')^{n+1}(b + \rho - y')^{n+1}} \tag{47}$$

Dacă desfășurăm atunci funcțiunea U potrivit formulei fundamentale (40′) în intervalul

$$x_0 < x < a + \rho, \quad y_0 < y < b + \rho,$$

unde

$$a < x_0 < a + \rho, \quad b < y_0 + \rho.$$

restul acestei desfășurări va fi dat de formula

$$R_n = \frac{(x - x_0)^{n+1}(y - y_0)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot D^{n+1} U(x', y'),$$

unde

$$x_0 < x' < x, \quad y_0 < y' < y.$$

Ținând seama de formula (47), vom avea

$$|R_n| < \frac{|(x - x_0|^{n+1} |y - y_0|^n}{(a + \rho - x')^{n+1}(b + \rho - y')^{n+1}} \cdot M. \tag{48}$$

Cum, putem scrie

$$x' = x_0 + \theta_1 (x - x_0), \qquad y' = y_0 + \theta_2 (y - y_0),$$

cu $0 \leqq \theta_1 \leqq 1$, $0 \leqq \theta_2 \leqq 1$, rezultă că, pentru a avea simultan

$$\frac{|x - x_0|}{a + \rho - x'} < 1, \quad \frac{|y - y_0|}{b + \rho - y'} < 1,$$

este suficient să luăm

$$|x - x_0| < \frac{a + \rho - x_0}{2}, \qquad |y - y_0| < \frac{b + \rho - y_0}{2}.$$

Pentru valorile lui (x, y) determinate de aceste inegalități, relația (48) ne arată că avem

$$\lim R_n = 0,$$

uniform în tot intervalul J, deci funcțiunea dată este hiperbolic analitică în intervalul J.

Teorema demonstrată extinde la analiticitatea hiperbolică un celebru criteriu de analiticitate clasică datorit Acad. Serghei Bernstein [1].

Institutul de Matematică
al Academiei R.P.R., București

К АНАЛИЗУ ПЛОСКОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Сообщение вносит новые данные для установления автономной теории функции двух реальных переменных, в которых действие дифференциации заменено гиперболическим дифференциальным оператором Du, определяемым отношением

$$Du(x, y) = \lim_{h \to 0,\ k \to 0} \frac{\Delta_2 u\ (x, y)}{hk},$$

$$\Delta_2 u\ (x,y) = u\ (x+h, y+k) - u\ (x+h, y) - u\ (x, y+k) + u\ (x, y)$$

Если вышеуказанный предел существует, он будет назван гиперболической производной $u(x, y)$.

Функция $u(x, y)$ может быть гиперболически дифференцирована (сокращенно: h-дифференцируемая), если она имеет в этой точке конечную гиперболическую производную. Она является „h-постоянной“ в точке (x, y), когда $\Delta_2 u$ стремится с h и k к нулю.

Работа разделена на 6 параграфов. В первом приводятся несколько известных результатов, которые найдут применение в дальнейшем развитии работы, и устанавливается формула (14), которую можно назвать „формулой интегрирования по частям двойных интегралов“. Следующий параграф посвящен решениям уравнения

$$D^{n+1} u\ (x, y) = 0,\ (n > 0),$$

в котором оператор D^k определен возвратным отношением

$$D^k = D\ (D^{k-1}).$$

Наиболее общим решение этого уравнения является в форме

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{n} [x^k g_k(y) + y^k f_k(x)],$$

в котором f_k и g_k являются при $k = 0$ произвольными, тогда как при $k > 0$, они должны быть k раз дифференцируемыми (I теорема сообщения).

Эти функции принадлежат разряду функций, названных А. Маршо [6] и после него Тиберием Поповичем [14] псевдополиномами, которые автор называет вследствие роли, которую они играют в его теории, гиперболическими псевдополиномами.

В параграфе 2 устанавливают еще несколько результатов относительно этих функций. Допустим вообще

$$\Delta_2^n u(x, y) = \Delta_2 [\Delta_2^{n-1} u(x, y)],$$

$$n = 2, 3, \ldots,$$

Если отношение

$$\frac{\Delta_2^n u(x. y)}{h^n\ k^n}$$

имеет определенный предел при $h \to 0, k \to 0$, этот предел будет назван непосредственной, гиперболической производной (или обобщенной) n-порядка $u(x, y)$. Следующая теорема дает достаточное условие, чтобы n-обобщенная гиперболическая производная совпадала с $D^n u$.

Теорема II. *Если $u(x, y)$ является n раз h-дифференцируемой с n-постоянной гиперболической производной в точке (x, y), тогда*

$$\lim_{h \to 0,\, k \to 0} \frac{\Delta_2^n u(x, y)}{h^n k^n} = D^n u(x, y).$$

Следующая теорема распространяет на оператор D известную теорему Шварца.

Теорема III. (Распространение теоремы Шварца.) *Если вторая обобщенная гиперболическая производная некоторой функции $u(x, y)$ является нулевой в двухмерном интервале, тогда u является в этом интервале обязательно в форме*

$$u(x, y) = x g_1(y) + y f_1(x) + f_0(x) + g_0(y),$$

где f_0, g_0, f_1, g_1, *являются непрерывными функциями, иначе произвольными.*

Это то, что называют *h-линейной функцией.*

Полезно упомянуть здесь теорему, на которую опирается доказательство предыдущей теоремы. *Если в прямоугольнике R дана непрерывная функция $u(x, y)$, существует одна h-линейная функция $L(x, y)$ и единственная совпадающая с $u(x, y)$ на границе этого прямоугольника.*

Параграф 2 заканчивается доказательствами следующих теорем.

Теорема IV. *Всякий из сходящихся рядов гиперболических псевдополиномов n-порядка, определенных в одном и том же двухмерном интервале, имеет в качестве предела один гиперболический псевдополином n-порядка.*

Теорема V. *Если дана функция $u(x, y)$, h-непрерывная в двухмерном интервале, можно построить ряд сходящихся гиперболических псевдополиномов, находящихся на границе интервала с $u(x, y)$ и сходящихся равномерно во внутрь к $u(x, y)$.*

Параграф 3 относится к рядам формы

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_n(x) + \psi_n(y)] x^n y^n,$$

встреченных в прошлом Н. Чоранеску [5], ряды, которые можно было бы назвать *гиперболически целыми.* Если функции φ_n, ψ_n определены в одной области D, содержащей начало внутри, то предыдущий ряд абсолютно и равномерно сходится внутри пересечения D областью, определяемой гиперболами

$$|xy| = P,$$

где P является некоторой положительной или нулевой постоянной, зависимой от данного ряда (VIII теорема сообщения). Впрочем, в установленной предыдущей теоремой области, оба ряда

$$\sum_0^{\infty} \varphi_n(x) x^n y^n \text{ и } \sum_0^{\infty} \psi_n(y) x^n y^n$$

сходятся, каждый абсолютно и равномерно (IX теорема сообщения).

Параграф 4 относится к решению следующего вопроса.

Определить псевдополином $H_n(x, y)$ n-порядка, зная значения, принятые

$$H_n, DH_n, \ldots, D^{n-1} H_n$$

на прямых $x = 0$, $y = 0$.

Если

$$D^{-1} u = \int_0^x dx' \int_0^y u(x', y')\, dy', D^{-i} = D^{-1}(D^{-i+1}), i = 2, 3, \ldots$$

решение задачи дается формулой

$$H_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} D^{-k}[D^k H_n(x, 0) + D^k H_n(0, y) - D^k H_n(0, 0)].$$

Получается единое решение (X теорема сообщения).

Параграф 5 распространяет результат параграфа 4 на общий случай функции $U(x, y)$, h-переменного $n+1$ раза в интервале, имеющем начало в качестве центра. Для такой функции получается следующая основная формула

$$U(x, y) = \sum_{k=0}^{n} D^{-k}[D^k U(x, 0) + D^{+k} U(0, y) - D^k U(0, 0)] + k_n \qquad (1)$$

с

$$R_n = \frac{x^{n+1}\, y^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot D^{n+1} U(\xi, \eta),$$

где (ξ, η) точка рассматриваемого интеграла (XI теорема сообщения). В известном смысле эта формула может рассматриваться как распространение формулы Тайлора с функциями двух переменных и оператором D.

Параграф 6, последний параграф сообщения, содержит примеры применения предыдущей основной формулы. Предположим функцию U, неопределенно h-дифференцируемую в рассматриваемом интервале.

Предположим еще, что

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0$$

однородны в этом интервале. Тогда основная формула становится при $n \to \infty$,

$$U(x, y) = \sum_{0}^{\infty} D^{-n}[D^n U(x, 0) + D^n U(0, y) - D^n U(0, 0)], \qquad (3)$$

разложение действительное для всего интеграла.

Если заменить в предыдущих формулах x и y соответственно $x + a$ $x + b$, то оператор D^{-1} становится

$$D^{-1} = \int_a^x dx' \int_b^y dy';$$

первоначальный интервал может быть написан

$$a - \alpha \leqq x \leqq a + \alpha, \quad b - \beta \leqq y \leqq b + \beta, \qquad (4)$$

тогда как предыдущие формулы пишутся соответствующим образом:

$$U(x,y)=\sum_0^n{}' D^{-k}\left[D^k U(x,b)+D^k U(a,y)-D^k U(a,b)+R_n,\right. \tag{1'}$$

$$R_n=\frac{(x-a)^{n+1}\,(y,-b)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\,D^{n+1}U(\xi,\eta_i), \tag{2'}$$

$$U(x,y)=\sum_0^\infty{}' D^{-n}\left[D^n U(x,b)+D^n U(a,y)-D^n U(a,b)\right]. \tag{3'}$$

Дальше доказывается следующая теорема.

Теорема единства. *Функция $U(x,y)$, неопределенно h-дифференцируемая в некотором интеграле с центром в точке (a,b), разложима одним единственным способом в ряд типа* (3') (теорема XII сообщения).

Можно утверждать, что некоторая неопределенно h-дифференцируемая функция $U(x,y)$ в интервале (4) является гипербалически аналитической (сокращенно: h-аналитической) в этом интервале, если она разложима на ряд типа (3') в каждой точке (a,b) этого интервала. Говорят еще, что функция $U(x,y)$ тотально монотонная в интервале, если для каждой пары чисел $h>0$, $k<0$, следующие выражения

$$u(x+h,y)-u(x,y),$$

$$u(x,y+k)-v(x,y),$$

$$u(x+h,y+k)-u(x+h,y)-u(x,y+k)+u(x,y)$$

сохраняют постоянный знак, одинаковый для трех выражений.

Наконец говорят, что предполагаемая неопределенно h-дифференцируемая функция $U(x,y)$ в вышеприведенном интервале абсолютно тотально монотонна в этом интервале, когда U и все его гиперболические производные совершенно монотонны в одинаковом смысле. При помощи этих определений можно выразить следующий критерий гиперболической аналитичности (теоремы XIII, XIV и XV сообщения):

I. *Когда U неопределенно h-дифференциально и если имеется положительное число M, такое, что*

$$|D^n U|<M$$

для каждого n для всякой точки (x,y) рассматриваемого интервала, тогда U и все его гиперболические производные являются в этом интервале h-аналитическими.

II. *Когда U неопределенно h-дифференцируемо в некотором интервале и существуют два числа M и δ, такие, что*

$$|D^n U(x,y)|<M(n!)^2\,\delta^n,$$

для каждого k и всякой точки (x, y) рассматриваемого интервала, тогда U и все его гиперболические производные являются h-аналитическими в интервале.

III. *Когда U абсолютно тотально монотонно в интервале* (4), *тогда U и все его гиперболические производные являются аналитическими в данном интервале.*

Последний критерий представляет, очевидно перестановку для случая оператора D знаменитого критерия классической аналитичности академика Сергея Бернштейна [1].

CONTRIBUTIONS À UNE ANALYSE DU PLAN, DE TYPE HYPERBOLIQUE

(RÉSUMÉ)

Le Mémoire apporte quelques contributions nouvelles à l'établissement d'une théorie autonome des fonctions de deux variables réelles, où l'opération de dérivation est remplacée par l'opérateur différentiel hyperbolique Du, défini par la relation

$$Du(x, y) = \lim_{h \to 0,\, k \to 0} \frac{\Delta_2 u(x, y)}{hk},$$

avec

$$\Delta_2 u(x, y) = u(x + h, y + k) - u(x + h, y) - u(x, y + k) + u(x, y).$$

Si la limite ci-dessus existe, elle sera appelée dérivée hyperbolique de $u(x, y)$.

Une fonction $u(x,y)$ est hyperboliquement dérivable (en abrégé h-dérivable), si elle possède, en ce point, une dérivée hyperbolique finie. Elle est « h-continue » au point (x, y) si $\Delta_2 u$ tend vers zéro avec h et k.

Le Mémoire est divisé en six paragraphes. Dans le premier, on rappelle quelques résultats connus, qui seront utilisés au cours du travail, et l'on établit la formule (14), qui peut être appelée « formule d'intégration par parties des intégrales doubles ». Le second § est consacré aux solutions de l'équation

$$D^{n+1} u(x, y) = 0, \quad (n > 0),$$

où l'opérateur D^k est défini par la relation de récurrence

$$D^k = D(D^{k-1}).$$

La solution *la plus générale* de cette équation est de la forme

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{n} [x^k g_k(y) + y^k f_k(x)],$$

où f_k et g_k sont, pour $k = 0$, arbitraires, tandis que pour $k > 0$ elles doivent être k fois dérivables (th. I du Mémoire).

Ces fonctions rentrent dans la classe des fonctions que A. Marchaud [6] et, après lui, Tiberiu Popoviciu [14], ont appelées pseudo-polynômes et que nous appellerons, à cause du rôle qu'elles jouent dans notre théorie, pseudo-polynômes *hyperboliques*.

Dans le § 2 on établit encore quelques résultats concernant ces fonctions. Posons, d'une manière générale,

$$\Delta_2^n u(x, y) = \Delta_2 [\Delta_2^{n-1} u(x, y)].$$

$$(n = 2, 3, \ldots)$$

Si le rapport

$$\frac{\Delta_2^n u(x, y)}{h^n k^n}$$

a une limite déterminée pour $h \to 0$, $k \to 0$, cette limite est appelée dérivée hyperbolique *directe* (ou *généralisée*) *d'ordre* n de $u(x, y)$. La proposition suivante donne une condition suffisante pour que la dérivée hyperbolique n-ième généralisée coïncide avec $D^n u$:

Théorème II. *Si* u(x, y) *est* h-*dérivable* n *fois avec la* n-*ième dérivée hyperbolique continue au point* (x, y), *alors*

$$\lim_{h \to 0,\, k \to 0} \frac{\Delta_2^n u(x, y)}{h^n k^n} = D^n u(x, y).$$

La proposition suivante étend à l'opérateur D un théorème connu de Schwarz:

Théorème III (Extension du théorème de Schwarz). — *Si la dérivée hyperbolique seconde généralisée d'une fonction* u(x, y) *est nulle dans un intervalle bidimmensionnel, alors* u *est, dans cet intervalle, nécessairement de la forme*

$$u(x, y) = x g_1(y) + y f_1(x) + f_0(x) + g_0(y),$$

f_0, g_0, f_1, g_1 *étant des fonctions continues, autrement arbitraires.*

C'est ce que nous appellerons une *fonction* h-*linéaire*.

Il est utile de transcrire ici le lemme sur lequel s'appuie la démonstration du théorème précédent: *Étant donnée une fonction* u(x, y), *continue dans un rectangle* R, *il existe une fonction* h-*linéaire* L(x, y) *et une seule coïncidant avec* u(x, y) *sur la frontière de ce rectangle.*

Le § 2 se termine avec la démonstration des théorèmes suivants:

Théorème IV. *Toute suite convergente de pseudo-polynômes hyperboliques, d'ordre* n, *définis dans un même intervalle bidimmensionnel, a pour limite un pseudo-polynôme hyperbolique d'ordre* n.

Théorème V. *Étant donnée une fonction* u(x, y), h-*continue dans un intervalle bidimmensionnel, on peut construire une suite de pseudo-polynômes hyperboliques coïncidant, tous, sur la frontière de l'intervalle, avec* u(x, y) *et convergeant, à l'intérieur, uniformément vers* u(x, y).

Le § 3 est consacré aux séries de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_n(x) + \psi_n(y)] x^n y^n$$

rencontrées antérieurement par N. Ciorănescu [5], séries qu'on pourrait appeler *hyperboliquement entières*. Si les fonctions φ_n, ψ_n sont définies dans un même domaine D contenant l'origine à l'intérieur, la série précédente converge absolument et uniformément à l'intérieur de l'intersection de D avec le domaine défini par les hyperboles

$$|xy| = \rho,$$

où ρ est une certaine constante positive ou nulle, dépendant de la série donnée (th. VIII du Mémoire). D'ailleurs, dans le domaine précisé par le théorème précédent, les deux séries

$$\sum_0^\infty \varphi_n(x)\, x^n y^n \quad \text{et} \quad \sum_0^\infty \psi_n(y)\, x^n y^n$$

convergent chacune, absolument et uniformément (th. IX du Mémoire).

Le § 4 est consacré à la résolution du problème suivant: Déterminer un pseudo-polynôme hyperbolique $H_n(x, y)$ d'ordre n, connaissant les valeurs prises par

$$H_n,\ DH_n, \ldots,\ D^{n-1} H_n$$

sur les droites $x = 0$, $y = 0$.

En posant

$$D^{-1} u = \int_0^x dx' \int_0^y u(x', y')\, dy', \quad D^{-i} = D^{-1}(D^{-i+1}), \quad i = 2, 3, \ldots,$$

la solution du problème est donnée par la formule

$$H_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} D^{-k}[D^k H_n(x, 0) + D^k H_n(0, y) - D^k H_n(0, 0)].$$

La solution est unique (th. X du Mémoire).

Le § 5 étend les résultats du § 4 au cas général d'une fonction $U(x, y)$, h-dérivable $n + 1$ fois dans un intervalle ayant l'origine pour centre. Pour une telle fonction, on parvient à la formule fondamentale suivante

$$U(x, y) = \sum_{k=0}^{n} D^{-k}[D^k U(x, 0) + D^{+k} U(0, y) - D^k U(0, 0)] + R_n, \quad (1)$$

avec

$$R_n = \frac{x^{n+1} y^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot D^{n+1} U(\xi, \eta),$$

(ξ, η) étant un point de l'intervalle considéré (th. XI du Mémoire). Cette formule peut être considérée, en un certain sens, comme une extension de la formule de Taylor aux fonctions de deux variables et à l'opérateur D.

Le § 6, dernier paragraphe du Mémoire, contient des applications de la formule fondamentale précédente. Supposons la fonction U indéfiniment h-dérivable dans l'intervalle considéré.

Supposons encore que

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0,$$

uniformément dans cet intervalle. Alors, la formule fondamentale devient, pour $n \to \infty$,

$$U(x, y) = \sum_{0}^{\infty} D^{-n}[D^n U(x, 0) + D^n U(0, y) - D^n U(0, 0)], \qquad (2)$$

développement valable dans tout l'intervalle.

Si, dans les formules précédentes, on change x et y en $x + a$ et $y + b$ respectivement, l'opérateur D^{-1} devient

$$D^{-1} = \int_a^x dx' \int_b^y dy',$$

l'intervalle initial peut s'écrire

$$a - \alpha \leqq x \leqq a + \alpha, \quad b - \beta \leqq y \leqq b + \beta, \qquad (4)$$

tandis que les formules précédentes s'écrivent, respectivement,

$$U(x, y) = \sum_{0}^{n} D^{-k}[D^k U(x, b) + D^k U(a, y) - D^k U(a, b)] + R_n, \qquad (1')$$

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}(y-b)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} D^{n+1} U(\xi, \eta), \qquad (2')$$

$$U(x, y) = \sum_{0}^{\infty} D^{-n}[D^n U(x, b) + D^n U(a, y) - D^n U(a, b)]. \qquad (3')$$

La proposition suivante est démontrée dans le Mémoire:

Théorème d'unicité. *Une fonction* U(x, y), *indéfiniment* h-*dérivable dans un certain intervalle ayant le centre au point* (a, b), *est développable d'une seule manière en une série du type* (3′) (th. XII du Mémoire).

Nous dirons qu'une fonction $U(x, y)$, indéfiniment h-dérivable dans l'intervalle (4), est hyperboliquement analytique (en abrégé: h-analytique) dans cet intervalle, si elle est développable en une série du type (3′) en chaque point (a, b) de cet intervalle. Nous dirons encore qu'une fonction $U(x, y)$ est totalement monotone dans un intervalle si, pour toute paire de nombres $h > 0$, $k > 0$, les expressions suivantes

$$u(x + h, y) - u(x, y),$$

$$u(x, y + k) - u(x, y)$$

$$u(x + h, y + k) - u(x + h, y) - u(x, y + k) + u(x, y)$$

gardent un signe constant, *le même pour les trois expressions.*

Enfin, nous dirons que la fonction $U(x, y)$, supposée indéfiniment h-dérivable dans l'intervalle ci-dessus, est *absolument totalement monotone* dans cet intervalle, si U et toutes ses dérivées hyperboliques sont totalement

monotones du même sens. Avec ces définitions, on peut énoncer les critères suivants d'analyticité hyperbolique (th. XIII, XIV et XV du Mémoire):

I. *Si* U *est indéfiniment* h-*dérivable et s'il existe un nombre positif* M *tel que l'on ait*

$$| D^n U | < M,$$

pour tout n *et pour tout point* (x, y) *de l'intervalle considéré, alors* U *et toutes ses dérivées hyperboliques sont* h-*analytiques dans cet intervalle.*

II. *Si* U *est indéfiniment* h-*dérivable dans un intervalle et s'il existe deux nombres positifs* M *et* δ *tels que l'on ait*

$$| D^n U(x, y) | < M (n!)^2 \delta^n,$$

pour tout n *et pour point* (x, y) *de l'intervalle considéré, alors* U *et toutes ses dérivées hyperboliques sont* h-*analytiques dans l'intervalle.*

III. *Si* U *est absolument totalement monotone dans l'intervalle* (4), *alors* U *et toutes ses dérivées hyperboliques sont* h-*analytiques dans cet intervalle.*

Le dernier critère constitue bien une transposition au cas de l'opérateur D, du célèbre critère d'analyticité classique de l'Acad. Serge Bernstein [1].

BIBLIOGRAFIE

1. S. Bernstein, *Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle.* Mathematische Annalen, 1914, vol. 75, p. 449—468.
2. Karl Bögel, *Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlichen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1934, Bd. 170, p. 197—217.
3. — *Über mehrdimensionale Differentiation, Integration und beschränkte Variation.* Ibid., 1935, Bd. 173, p. 5—30.
4. N. Ciorănescu, *Sur la dérivée polydimensionnelle d'une fonction de plusieurs variables.* Enseignement Mathématique, 1935, t. 34, p. 220.
5. — *Sur les fonctions de deux variables réelles douées d'analyticité hyperbolique et leurs applications.* Mathematica, XVI, 1938, p. 180—190.
6. A. Marchaud, *Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles.* Journal de Math., 1927, vol. 6, 9e série, p. 337—425.
7. Miron Nicolescu, *Sur quelques propositions d'Analyse infinitésimale pluridimensionnelle.* C. R. Acad. des Sciences de Roumanie, 1938, t. II, p. 228—234.
8. — *Continuité et dérivation polydimensionnelle et laplacienne des suites.* Revue Mathématique de l'Union Interbalcanique, 1940, t. III, p. 1—16.
9. — *Sur la seconde formule de la moyenne.* Mathematica, 1946, vol. XXII, p. 182—203.
10. — *Determinarea unei funcțiuni de două variabile prin condițiuni la limită de tip hiperbolic.* Bul. Științ. Acad. R.P.R., Seria: Mat., Fiz.,Chim., t. II, Nr. 9, Noemvrie 1950, p. 687.
11. — *Aproximarea funcțiunilor global continue prin pseudo-polinoame.* Ibid., t. II, Nr. 10, Decemvrie 1950, p. 795.
12. D. Pompeiu, *Sur les fonctions de deux variables réelles.* C. R. Acad. Sci. Paris, 1932, t. 194, p. 346.
13. — *Généralisations du théorême de la moyenne.* Bull. des Sci. Math. Paris, 1934, t. 58, p. 80—89.
14. Tiberiu Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles.* Mathematica, 1934, vol. VIII, p. 1—85.
15. L. Toneli, *Sulla quadratura delle superficie.* Rendiconti Accad. dei Lincei, 1926, vol. III, p. 357—362.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul III, Nr. 1—2, 1952

ASUPRA RESTULUI ÎN UNELE FORMULE DE DERIVARE NUMERICĂ

(I) CÂTEVA PROPRIETĂŢI ALE FORMULELOR DE DERIVARE NUMERICĂ DE EXACTITATE MAXIMĂ

DE

TIBERIU POPOVICIU

MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

§ 1. Formule de exactitate maximă

1. O formulă de *derivare numerică* este o formulă care permite evaluarea aproximativă a valorii derivatei de un anumit ordin dat al unei funcţii, într'un punct dat, printr'o combinaţie lineară dată a valorilor funcţiei şi a unui număr finit dintre derivatele sale succesive, luate într'un număr finit de puncte date.

O formulă de derivare numerică este deci o formulă de forma

$$f^{(m+r)}(x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j f^{(j)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{r_i-1} a_{i,j} f^{(j)}(x_i) + R \tag{1}$$

care permite să atribuim lui $f^{(m+r)}(x_0)$, ca valoare aproximativă, suma din membrul al doilea (fără R). In această formulă coeficienţii a_j, $j = 0, 1, \ldots, r-1$, $a_{i,j}$, $j = 0, 1, \ldots, r_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, s$ sunt nişte constante reale date, iar $f^{(j)}(x_0)$, $j = 0, 1, \ldots, r-1$, $f^{(j)}(x_i)$, $j = 0, 1, \ldots, r_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, s$ sunt valorile funcţiei $f(x)$ şi ale derivatelor sale succesive $f'(x)$, $f''(x)$, ... în punctele date $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_s$.

Numărul R din membrul al doilea al formulei (1), este *restul* acestei formule. O expresie a restului, rezultată din natura funcţiei $f(x)$, permite o evaluare a erorii care se comite prin aproximaţia indicată a membrului întâi.

2. Trebue să precizăm dela început ipotezele care vor fi păstrate în toată lucrarea şi care sunt referitoare la datele formulei (1). Totodată, vom fixa şi câteva denumiri în legătură cu aceste date.

1°. Punctele

$$x_1, x_2, \ldots, x_s \tag{2}$$

de pe axa reală, presupuse *distincte* și în număr de $s \geqq 1$, le vom numi *nodurile* formulei de derivare numerică.

2°. Fiecărui nod x_i îi este atașat un *ordin de multiplicitate* r_i. Numerele $r_1, r_2, \ldots, r_s$ sunt numere *întregi pozitive*.

3°. Punctul x_0 este *diferit* de nodurile (2) și îl vom numi *punctul de derivare* al formulei (1).

4°. Punctului de derivare x_0 i se atașează un *ordin de multiplicitate* r, presupus *întreg pozitiv sau nul*.

5°. Numărul m, *întreg pozitiv* sau *nul*, îl vom numi *indicele de derivare* al formulei (1).

In fine relativ la funcția $f(x)$ vom face următoarea ipoteză, notând cu $[a, b]$ cel mai mic interval închis care conține nodurile și punctul de derivare.

6°. Funcția reală $f(x)$, de variabila reală x, este definită și *continuă* în intervalul $[a, b]$. Afară de aceasta, se presupune că ea admite derivatele care intervin efectiv în formula (1) și cel puțin în punctele în care valorile acestor derivate figurează efectiv în formula (1) [1]).

Ipoteza continuității este făcută în vederea studiului restului formulei (1).

Orice altă ipoteză făcută asupra datelor problemei va fi menționată în mod expres.

Există o mulțime infinită $\mathfrak{M}$ de formule de derivare numerică (1), care sunt obținute dând coeficienților a_j, $a_{i,j}$ toate valorile reale posibile și având toate următoarele *caracteristice* comune:

1°. Nodurile, 2°. Ordinele de multiplicitate respective ale nodurilor, 3°. Punctul de derivare, 4°. Ordinul de multiplicitate al punctului de derivare, 5°. Indicele de derivare.

Este util să notăm cu $p + 1$ suma ordinelor de multiplicitate ale nodurilor, deci $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = p + 1$. Atunci $p \geqq 0$ și $p + 1$ reprezintă *numărul total al nodurilor*, fiecare socotit cu ordinul său de multiplicitate.

Pentru toate formulele din $\mathfrak{M}$, numerele p, r, m sunt aceleași.

Fiecărei formule (1) din $\mathfrak{M}$ îi vom atașa două numere caracteristice importante: *ordinul* formulei și *gradul de exactitate* al formulei.

3. Ordinul formulei (1) servește la precizarea sumei ordinelor de derivare, care intervin efectiv în membrul al doilea. Pentru aceasta, vom defini în felul următor numerele $r'_1, r'_2, \ldots, r'_s, r'$ atașate nodurilor și punctului de derivare:

$r'_i - 1$ este ordinul cel mai înalt de derivare care intervine efectiv în nodul x_i, deci,

$r'_i = 0$, dacă toți coeficienții $a_{i,j}$, $j = 0, 1, \ldots, r_i - 1$ sunt nuli;

$a_{i,r'_i-1} \neq 0$, $a_{i,j} = 0$, $j = r'_i, r'_i + 1, \ldots, r_i - 1$, dacă coeficienții $a_{i,j}$ nu sunt toți nuli, $i = 1, 2, \ldots, s$.

$r' - 1$ este ordinul cel mai înalt de derivare care intervine efectiv în punctul x_0 în membrul al doilea, deci,

$r' = 0$, dacă $r = 0$ sau dacă toți coeficienții a_j, $j = 0, 1, \ldots, r - 1$ sunt nuli,

$a_{r'-1} \neq 0$, $a_j = 0$, $j = r', r' + 1, \ldots, r - 1$ dacă coeficienții a_j nu sunt toți nuli.

---

[1]) Acest fapt însemnează că coeficientul a_j sau $a_{i,j}$ corespunzător este diferit de zero.

Avem atunci:

$$0 \leqq r' \leqq r \ , \ 0 \leqq r_i' \leqq r_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, s.$$

Egalitatea $r' = 0$, respectiv $r_i' = 0$, înseamnează că punctul de derivare, respectiv nodul x_i, nu figurează efectiv în membrul al doilea al formulei (1). Egalitatea $r' = r$ (> 0), respectiv $r_i' = r_i$, înseamnează că coeficientul a_{r-1}, respectiv a_{r_i-1}, este diferit de zero.

Prin definiție, suma $r_1' + r_2' + \ldots + r_s' + r'$ se va numi *ordinul* formulei de derivare numerică (1).

Ordinul formulei (1) este cel mult egal cu $p + r + 1$.

In mulțimea $\mathfrak{M}$ există o formulă care are ordinul egal cu 0. Aceasta este *formula trivială* din $\mathfrak{M}$ care are toți coeficienții a_j, $a_{i,j}$ nuli. Orice altă formulă din $\mathfrak{M}$ are ordinul pozitiv.

Formula trivială nu prezintă niciun interes pentru problema derivării numerice.

4. Gradul de exactitate al formulei (1) ne arată cât de bună este aproximația studiată în cazul particular, când funcția $f(x)$ se reduce la un polinom de grad suficient de mic.

Restul R al formulei (1) este valoarea, dată de această formulă, a unei funcționale aditive și omogene. Pentru a pune în evidență funcția $f(x)$, vom nota această funcțională cu $R[f]$.

Funcționala $R[f]$ este definită în câmpul funcțiilor $f(x)$, care verifică ipotezele de mai sus. Acest câmp este un câmp vectorial, care conține toate funcțiile derivabile de un număr suficient de ori în intervalul $[a, b]$ și deci, în particular, toate polinoamele.

Prin definiție, gradul de exactitate al funcționalei $R[f]$, sau al formulei (1), este un număr întreg $n \geqq -1$, astfel că:

1°. $R[P] = 0$, pentru orice polinom $P(x)$ de gradul n [1]).

2°. $R[P] \neq 0$, pentru cel puțin un polinom $P(x)$ de gradul $n + 1$.

Definiția se aplică evident oricărei funcționale care este definită pentru toate polinoamele.

Din cauza aditivității și omogeneității funcționalei, gradul de exactitate n se poate defini și prin următoarele proprietăți:

1°. Dacă $R[1] \neq 0$, avem $n = -1$.

2°. Dacă $R[1] = 0$, n este cel mai mic număr întreg, astfel ca

$$R[x^i] = 0, \ i = 0, 1, \ldots . n, R[x^{n+1}] \neq 0.$$

Este utilă următoarea observație: pentru ca gradul de exactitate al funcționalei $R[f]$ să fie $> n$, este necesar și suficient ca să avem $R[P] = 0$ pentru orice polinom $P(x)$ de gradul n și $R(P_1) = 0$ pentru cel puțin un polinom $P_1(x)$ de grad efectiv $n + 1$. Intr'adevăr, orice polinom $Q(x)$ de gradul $n + 1$ este de forma $Q(x) = CP_1(x) + P(x)$, unde C este o constantă și $P(x)$ un polinom de gradul n. Avem atunci $R[Q] = CR[P_1] + R[P] = 0$.

Să introducem polinomul

$$l(x) = (x - x_1)^{r_1} (x - x_2)^{r_2} \ldots (x - x_s)^{r_s}. \tag{3}$$

---

[1]) Un polinom de gradul -1 coincide cu polinomul identic nul.

Un calcul imediat ne dă atunci

$$R[(x-x_0)^{m'+r}\,l(x)] = [(x-x_0)^{m'+r}\,l(x)]_{x=x_0}^{(m+r)} = \frac{(m+r)!}{(m-m')!}\,l^{(m-m')}(x_0) \qquad (4)$$

dacă m' este un număr întreg $\geqq 0$. Pentru $m' > m$ această expresie este egală cu 0.

Pentru $m' = m$, numărul (4) este diferit de 0 pe baza ipotezelor făcute. Rezultă de aici *existența* gradului de exactitate al funcționalei $R[f]$. Mai rezultă că acest grad de exactitate este $\leqq p + r + m$.

Este clar că gradul de exactitate este determinat în mod unic.

Gradul de exactitate al formulei triviale din $\mathfrak{M}$ este egal cu $m + r - 1$, lucru ce se poate constata ușor.

5. Să considerăm *polinomul de interpolare* de gradul $p + r$

$$L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f|x) \qquad (5)$$

relativ la funcția $f(x)$ și la sistemul de $p + r + 1$ noduri, format din punctul x_0 repetat de r ori și din punctele

$$x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}' \qquad (6)$$

care reprezintă nodurile (2), fiecare repetat de atâtea ori cât indică ordinul său de multiplicitate. Sistemul (6) reprezintă deci o renumerotare a nodurilor (2), ținând seama de multiplicitățile lor. Pentru fixarea notațiilor se poate presupune că:

$$x'_{r_1+r_2+\ldots+r_{i-1}+j} = x_i,\ j = 1, 2, \ldots, r,\ i = 1, 2, \ldots, s. \qquad (7)$$

Dacă $r = 0$, punctul x_0 nu este nod al polinomului și nu figurează în notația (5).

Polinomul (5) este polinomul de gradul cel mai mic care coincide cu funcția $f(x)$ în cele $p + r + 1$ noduri date. Prin aceasta se înțelege că, dacă un nod se repetă de k ori, polinomul (5), împreună cu primele sale $k - 1$ derivate, coincide cu funcția $f(x)$ și cu primele sale $k - 1$ derivate respective în acest nod. Polinomul (5) este deci în general polinomul lui Lagrange-Hermite [2], [3], care corespunde funcției și nodurilor puse în evidență prin notația (5), adică polinomul (unic) de gradul cel mai mic care verifică condițiile:

$$L^{(j)}(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f \mid x_i) = f^{(j)}(x_i)$$

$$j = 0, 1, \ldots, r_i - 1,\quad i = 0, 1, \ldots, s \qquad (r_0 = r).$$

Forma explicită a polinomului (5) este bine cunoscută [3], [11]. Vom reaminti câteva din aceste rezultate sub forma utilizată aici.

Polinomul (5) este de forma

$$L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f \mid x) = \sum_{j=0}^{r-1} C_j(x)\, f^{(j)}(x_0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{r_i-1} C_{i,j}(x)\, f^{(j)}(x_i),$$

unde prima sumă din membrul al doilea dispare dacă $r=0$. Aici $C_j(x)=C_{0,j}(x)$, $C_{i,j}(x)$ sunt polinoame de gradul $p+r$, complet determinate de condițiile

$$\left.\begin{aligned} &1^\circ.\ C_{i,j}^{(j)}(x_i)=1,\\ &2^\circ.\ C_{i,j}^{(u)}(x_v)=0,\ \text{pentru}\ |u-j|+|v-i|\neq 0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$j=0,1,\ldots,r_i-1,\quad i=0,1,\ldots,s\quad (r_0=r).$$

Dacă punem

$$\left.\begin{aligned} c_j &= C_j^{(m+r)}(x_0),\ j=0,1,\ldots,r-1,\\ c_{i,j} &= C_{i,j}^{(m+r)}(x_0),\ j=0,1,\ldots,r_i-1,\ i=1,2,\ldots,s\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

avem

$$L^{(m+r)}(\underbrace{x_0,x_0,\ldots,x_0}_{r},x_1',x_2',\ldots,x_{p+1}';f|x_0)=\sum_{j=0}^{r-1}c_j f^{(j)}(x_0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{r_i-1}c_{i,j}f^{(j)}(x_i) \tag{10}$$

și rezultă că

$$f^{(m+r)}(x_0)=L^{(m+r)}(\underbrace{x_0,x_0,\ldots,x_0}_{r}x_1',x_2',\ldots,x_{p+1};f|x_0)+R \tag{E}$$

este o formulă de derivare numerică aparținând mulțimei $\mathfrak{M}$.

Pe baza formulelor (9) este clar că pentru $m>p$, formula (E) se reduce la formula banală.

6. Ne propunem să determinăm gradul de exactitate al formulei (E). Pentru aceasta vom avea nevoie de următoarea lemă:

L e m a 1. *Dacă două derivate de ordine consecutive* i, i+1 *ale unui polinom cu toate rădăcinile reale au o rădăcină comună, această rădăcină este o rădăcină a polinomului de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu* i + 2.

Intr'adevăr, dacă rădăcina comună a derivatelor este a, polinomul se poate scrie sub forma

$$\alpha_0+\alpha_1(x-a)+\alpha_2(x-a)^2+\ldots+\alpha_{i-1}(x-a)^{i-1}+\alpha_{i+2}(x-a)^{i+2}+\ldots$$

și dacă coeficienții $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}$ nu ar fi toți nuli, polinomul ar prezenta o lacună de cel puțin 2 termeni, ceea ce este în contrazicere cu realitatea tuturor rădăcinilor. Presupunem, bineînțeles, că ordinul efectiv al polinomului este cel puțin i.

Observăm acum că, dacă $f(x)$ este un polinom de gradul $p+r$, avem

$$[L(\underbrace{x_0,x_0,\ldots,x_0}_{r},x_1',x_2',\ldots,x_{p+1}';f|x)=f(x)] \tag{11}$$

și pentru formula (E) avem atunci $R[f]=0$. Aceasta ne arată că gradul de exactitate al formulei (E) este $\geqq p+r$. Se vede imediat că concluzia se menține și dacă (E) se reduce la formula banală.

Dacă $m \leqq p$, formula (4) ne dă, în particular,

$$R[(x-x_0)^r l(x)] = \frac{(m+r)!}{m!} l^{(m)}(x_0), R[(x-x_0)^{r+1} l(x)] = \\ = \frac{(m+r!)}{(m-1)!} l^{(m-1)}(x_0) \tag{12}$$

și polinoamele $(x-x_0)^r l(x)$, $(x-x_0)^{r+1} l(x)$ sunt respectiv de gradele efective $p+r+1$, $p+r+2$.

Dacă $m=0$, avem $l(x_0) \neq 0$, pe baza ipotezelor făcute, iar dacă $m>0$, ținând seamă și de lema 1, se vede că nu putem avea în același timp

$$l^{(m)}(x_0) = 0 \quad , \quad l^{(m-1)}(x_0) = 0.$$

Deducem deci următoarea teoremă:

T e o r e m a 1. *Gradul de exactitate al formulei (E) este totdeauna* $\geqq p+r$.

Dacă $m > p$ *acest grad de exactitate este egal cu* $m+r-1$.

Dacă $m \leqq p$, *gradul de exactitate este egal cu* $p+r$ *dacă* $l^{(m)}(x_0) \neq 0$ *și este egal cu* $p+r+1$ *dacă* $l^{(m)}(x_0) = 0$.

Mai rezultă de aici că (E) se reduce la formula trivială dacă și numai dacă $m > p$.

7. Fie (1) o formulă din $\mathfrak{M}$, cu gradul de exactitate $\geqq p+r$. Vom arăta că această formulă se reduce la formula (E). Pentru aceasta, să presupunem contrariul. Atunci, cel puțin unul din coeficienții $a_j = a_{0,j}$, $a_{i,j}$ este diferit de coeficientul $c_j = c_{0,j}$, $c_{i,j}$ respectiv. Pentru moment, să notăm cu $R[f]$ restul formulei (1) și cu $R_1[f]$ restul formulei (E).

Pentru fixarea ideilor să presupunem că

$$a_{\beta,j} - c_{\beta,j} \begin{cases} \neq 0, & j = \alpha \\ = 0, & j = \alpha+1, \alpha+2, \ldots, r_i - 1. \end{cases} \qquad (r_0 = r) \tag{13}$$

Scăzând membru cu membru formula (E) din formula (1) și rezolvând în raport cu $f^{(\alpha_1)}(x_\beta)$, găsim o formulă de forma

$$f^{(\alpha)}(x_\beta) = \sum_{j=0}^{\alpha-1} a'_j f^{(j)}(x_\beta) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{r_i-1} a'_{i,j} f^{(j)}(x_i) + R_2[f] \tag{14}$$

unde, dacă $\beta \neq 0$ în a doua sumă din membrul al doilea în loc de x_β, r_β se înțelege x_0, r respectiv. Restul $R_2[f]$ al formulei (14) este

$$R_2[f] = \frac{R_1[f] - R[f]}{a_{\beta,\alpha} - c_{\beta,\alpha}} \tag{15}$$

Avem, bineînțeles, $\alpha \leqq r_\beta - 1$ $(r_0 = r)$.

Pentru formula (14), numerele p, r, m devin $p + r - r_\beta$, $\max\{\alpha - 1, 0\}$, 0 respectiv, deci, pe baza unei observații dela punctul 4, gradul de exactitate

al acestei formule este $\leq p + r - r_\beta + \max\{\alpha - 1, 0\} \leq p + r - r_\beta + \alpha \leq \leq p + r - 1$. Însă din (15) se vede că gradul de exactitate este $\geq p + r$. Această contrazicere ne arată că ipoteza (13) este inadmisibilă.

Putem dar enunța teorema următoare:

T e o r e m a 2. *În mulțimea $\mathfrak{M}$ a formulelor de derivare numerică* (1) *există o formulă, și numai una singură, de grad de exactitate maxim și această formulă este formula* (*E*).

Pentru acest motiv, formula (E) se va numi o *formulă de derivare numerică de exactitate maximă.*

8. Putem acum preciza ordinul formulei (E). Acest ordin este $\leq p + r + 1$. Ordinul formulei poate să fie însă și mai mic decât $p + r + 1$, pentrucă anumiți coeficienți c_j, $c_{i,j}$ pot fi nuli.

Dacă $m > p$, ordinul este 0.

Dacă $m \leq p$, ordinul este un număr pozitiv. Să presupunem că acest ordin ar fi $p + r + 1 - \alpha$, unde $\alpha \geq 0$. În acest caz, formula (E) este în același timp o formulă de derivare numerică dintr'o mulțime $\mathfrak{M}_1$, care se deduce din $\mathfrak{M}$, modificând caracteristicele prin reducerea unui număr α de noduri (6) sau și punctul x_0 de un anumit număr de ori, menținând însă suma $m + r$. Numărul $p + r$, prin trecerea în $\mathfrak{M}_1$ devine $p + r - \alpha$. Dar formula având gradul de exactitate $\geq p + r \geq p + r - \alpha$ este o formulă de exactitate maximă în $\mathfrak{M}_1$. În consecință, sau formula se reduce la formula trivială din $\mathfrak{M}_1$, sau are gradul de exactitate cel mult egal cu $p + r + 1 - \alpha$. Prima ipoteză este inadmisibilă pentrucă ar rezulta ca formula să se reducă la formula trivială din $\mathfrak{M}$, ceea ce este în contrazicere cu ipoteza $m \leq p$. Din a doua ipoteză rezultă că $\alpha \leq 1$, deci $\alpha = 0$, sau $\alpha = 1$.

Cazul $\alpha = 1$ are loc dacă unul dintre coeficienții c_{r-1}, c_{i,r_i-1}, $i = 1, 2, \ldots, s$ este nul. De altfel, dacă unul dintre acești coeficienți este nul, ceilalți sunt în mod necesar diferiți de zero. În cazul acesta, formula trece din mulțimea $\mathfrak{M}$ în mulțimea $\mathfrak{M}_1$, prin suprimarea odată a punctului de derivare sau odată a unui nod x_i. Prin această trecere, numerele m, r devin $m + 1$, $r - 1$ respectiv, sau rămân neschimbate. Primul caz nu poate avea loc decât dacă $m < p$, pentrucă altfel am ajunge în contrazicere cu faptul că formula în $\mathfrak{M}_1$ nu se reduce la formula trivială.

De asemenea, prin trecerea în $\mathfrak{M}_1$, polinomul $l(x)$ rămâne neschimbat sau devine $\dfrac{l(x)}{x - x}$.

Formula considerată are în $\mathfrak{M}_1$ gradul de exactitate $\leq p + r$ și rezultă că acest grad de exactitate este chiar $p + r$, adică în $\mathfrak{M}_1$ formula se găsește în cazul când gradul său de exactitate se mărește cu o unitate.

Din cele ce preced rezultă că vom avea $c_{r-1} = 0$, dacă și numai dacă $l^{(m+1)}(x_0) = 0$. Acest caz nu este posibil decât dacă $r > 0$ și atunci toți coeficienții c_{i,r_i-1}, $i = 1, 2, \ldots, s$ sunt diferiți de zero, iar dacă $r > 1$ avem și $c_{r-2} \neq 0$. De asemenea, avem $c_{i,r_i-1} = 0$, dacă și numai dacă $\left[\dfrac{l(x)}{x - x_i}\right]^{(m)}_{x=x_0} = 0$ și atunci toți coeficienții $c_{\alpha,r_\alpha-1} \neq 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, s$. Avem de asemenea $c_{r-1} \neq 0$ dacă $r > 0$ și $c_{i,r_i-2} \neq 0$ dacă $r_i > 1$.

Din discuția de mai sus rezultă următoarea teoremă:

Teorema 3. *Dacă* $m \leq p$, *gradul de exactitate al formulei* (*E*) *este cel mult egal cu ordinul său. Gradul de exactitate și ordinul, sunt egale dacă și numai dacă* x_0 *este o rădăcină, diferită de noduri, a unuia din polinoamele*

$$l^{(m)}(x),\ l^{(m+1)}(x),\ \left[\frac{l(x)}{x-x_i}\right]^{(m)},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ s \tag{16}$$

In general, gradul de exactitate este $p+r$ și ordinul este $p+r+1$. Gradul de exactitate și ordinul sunt ambii egali cu $p+r+1$, dacă x_0 este o rădăcină a primului polinom (16). Gradul de exactitate și ordinul sunt ambii egali cu $p+r$, dacă x_0 este o rădăcină a unuia din ultimele $s+1$ polinoame (16).

9. Din analiza precedentă rezultă că două oarecare dintre polinoamele (16) nu pot avea o rădăcină comună diferită de un nod. Acest lucru se poate demonstra și direct. Dacă $m=0$, polinoamele, afară eventual de al doilea, nu au rădăcini diferite de noduri. De asemenea, proprietatea este imediată dacă $m=p$, pentrucă atunci

$$l^{(p+1)}(x_0)=(p+1)!\neq 0,\quad \left[\frac{l(x)}{x-x_i}\right]^{(p)}=p!\neq 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ s$$

Să examinăm cazul general.

Din lema 1 rezultă că orice rădăcină comună a primelor două polinoame (16) este un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m+2$.

Punând în evidență unul din ultimele s polinoame (16), putem scrie

$$l^{(m)}(x)=\left[\frac{l(x)}{x-x_i}\right]^{(m)}(x-x_i)+m\left[\frac{l(x)}{x-x_i}\right]^{(m-1)}$$

Se vede de aici că orice rădăcină comună a polinoamelor $l^{(m)}(x)$, $\left[\frac{l(x)}{x-x_i}\right]^{(m)}$ este o rădăcină comună a polinoamelor $\left[\frac{l(x)}{x-x_i}\right]^{(m)}$, $\left[\frac{l(x)}{x-x_i}\right]^{(m-1)}$ și, pe baza lemei 1, aceasta nu poate să fie decât un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m+1$.

Avem de asemenea

$$\left[\frac{l(x)}{x-x_\alpha}\right]^{(m)}=\left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)}\right]^{(m)}(x-x_\beta)+m\left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)}\right]^{(m-1)}$$

$$\left[\frac{l(x)}{x-x_\beta}\right]^{(m)}=\left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)}\right]^{(m)}(x-x_\alpha)+m\left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)}\right]^{(m-1)}$$

de unde se vede că, dacă $\alpha\neq\beta$, orice rădăcină comună a acestor polinoame este o rădăcină comună a polinoamelor

$$\left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)}\right]^{(m)},\quad \left[\frac{l(x)}{(x-x_\alpha)(x-x_\beta)}\right]^{(m-1)}$$

și deci, pe baza lemei 1, este un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m + 1$.

In fine avem și

$$l^{(m+1)}(x) = \left[\frac{l(x)}{x - x_i}\right]^{(m+1)}(x - x_i) + (m+1)\left[\frac{l(x)}{x - x_i}\right]^{(m)} \tag{17}$$

care ne arată că orice rădăcină comună a polinoamelor

$$l^{(m+1)}(x), \left[\frac{l(x)}{x - x_i}\right]^{(m)} \tag{18}$$

este o rădăcină comună a polinoamelor

$$\left[\frac{l(x)}{x - x_i}\right]^{(m+1)}(x - x_i), \quad \left[\frac{l(x)}{x - x_i}\right]^{(m)}.$$

Rezultă că orice rădăcină a polinoamelor (18) este sau nodul x_i, sau, pe baza lemei 1, un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m + 2$.

Din analiza precedentă mai rezultă că proprietatea coeficienților c_{r-1}, c_{r-2} (dacă $r > 1$) de a nu putea fi ambii nuli este o consecință a faptului că polinoamele $l^{(m+1)}(x)$, $l^{(m+2)}(x)$ nu pot avea o rădăcină comună diferită de un nod. Acest din urmă fapt rezultă din lema 1, pe baza căreia orice rădăcină comună a acestor polinoame este un nod de ordin de multiplicitate cel puțin egal cu $m + 3$.

De asemenea, faptul că c_{i,r_i-1}, c_{i,r_i-2} (dacă $r_i > 1$) nu pot fi ambii nuli rezultă din faptul că polinoamele

$$\left[\frac{l(x)}{x - x_i}\right]^{(m)}, \quad \left[\frac{l(x)}{(x - x_i)^2}\right]^{(m)} \tag{19}$$

nu pot avea o rădăcină comună diferită de un nod. Avem însă

$$\left[\frac{l(x)}{x - x_i}\right]^{(m)} = \left[\frac{l(x)}{(x - x_i)^2}\right]^{(m)}(x - x_i) + m\left[\frac{l(x)}{(x - x_i)^2}\right]^{(m-1)}$$

de unde se vede că orice rădăcină comună a polinoamelor (19) este o rădăcină comună a polinoamelor

$$\left[\frac{l(x)}{(x - x_i)^2}\right]^{(m)}, \quad \left[\frac{l(x)}{(x - x_i)^2}\right]^{(m-1)}$$

deci, pe baza lemei 1, un nod de ordin de multiplicitate egal cel puțin cu $m + 1$.

Teorema 3 și rezultatele precedente se pot stabili și direct, calculând coeficienții c_{r-1}, c_{r-2}, c_{i,r_i-1}, c_{i,r_i-2} $i = 1, 2, \ldots, s$ ai polinomului (10).

10. Să revenim la formula (E). Vom spune că această formulă este *excepțională*, dacă ordinul său este egal cu gradul său de exactitate.

Formula (E) devine excepțională sub trei aspecte diferite: 1°. Gradul de exactitate se mărește cu o unitate, 2°. Numărul r', atașat punctului de derivare, scade cu o unitate dela r ($r' = r-1$), 3°. Numărul r_i', atașat unui nod x_i, scade cu o unitate dela r_i' ($r_i' = r_i - 1$).

Din rezultatele dela punctul 8 rezultă însă că cele trei aspecte revin unul la altul prin trecerea formulei din mulțimea $\mathfrak{M}$ într'o mulțime analoagă $\mathfrak{M}_1$, prin următoarele modificări ale caracteristicelor lui $\mathfrak{M}$.

Dacă formula (E) prezintă aspectul 1° în $\mathfrak{M}$, atunci ea prezintă:

Aspectul 2° în mulțimea $\mathfrak{M}_1$, obținută prin mărirea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a punctului de derivare și micșorarea cu o unitate a indicelui de derivare.

Aspectul 3° în mulțimea $\mathfrak{M}_1$, obținută prin mărirea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a nodului respectiv.

Dacă formula prezintă aspectul 2° în $\mathfrak{M}$, ea prezintă:

Aspectul 1° în mulțimea $\mathfrak{M}_1$, obținută prin micșorarea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a punctului de derivare și mărirea cu o unitate a indicelui de derivare.

Aspectul 3° în mulțimea $\mathfrak{M}_1$, obținută prin micșorarea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a punctului de derivare, mărirea cu o unitate a indicelui de derivare și mărirea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a nodului respectiv.

Dacă formula prezintă aspectul 3° în $\mathfrak{M}$, ea prezintă:

Aspectul 1° în mulțimea $\mathfrak{M}_1$, obținută prin micșorarea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a nodului respectiv.

Aspectul 2° în mulțimea $\mathfrak{M}_1$, obținută prin mărirea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a punctului de derivare, micșorarea cu o unitate a indicelui de derivare și micșorarea cu o unitate a ordinului de multiplicitate a nodului respectiv.

11. Echivalența celor trei aspecte ale excepționalității se poate exprima prin formule. Pentru a stabili aceste formule să considerăm formulele generale:

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}\,;\, f|x) = L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\,;\, f|x) + \\ + \prod_{i=1}^{k} (x - x_i)\cdot[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}; f], \tag{20}$$

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1};\ f|x) = L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta;\ f|x) + \\ + (\alpha_{k+1} - \beta) \prod_{i=1}^{k} (x - \alpha_i)\cdot[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}, \beta; f] \tag{21}$$

In aceste formule, $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}; f]$ este *diferența divizată* de ordinul k a funcției $f(x)$ pe cele $k+1$ noduri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$, distincte sau nu. Presupunem că se cunosc definiția și principalele proprietăți ale diferențelor divizate, precum și de altfel ale polinoamelor de interpolare pe noduri distincte sau nu [6].

Formula (20) ne dă, în particular

$$L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}; f \mid x) =$$

$$= L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r+1}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}; f \mid x) -$$

$$- (x-x_0)^r \, l(x) [\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r+1}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}; f] =$$

$$= L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}, x_i; f \mid x) -$$

$$- (x-x_0)^r \, l(x) [\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}, x_i; f].$$

Derivând de $m + r$ ori și ținând seamă de $l^{(m)}(x_0) = 0$, deducem

$$L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}; f \mid x_0) =$$

$$= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r+1}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}; f \mid x_0) =$$

$$= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}, x_i; f \mid x_0), [l^{(m)}(x_0) = 0]$$

care indică trecerea formulei dela aspectul 1° la aspectele 2° și 3° respectiv.

De asemenea, formulele (20), (21) ne dau

$$L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}; f \mid x) =$$

$$= L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r-1}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}; f \mid x) +$$

$$+ (x-x_0)^{r-1} \, l(x) [\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}; f] =$$

$$= L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r-1}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}, x_i; f \mid x) +$$

$$+ (x_0-x_i)(x-x_0)^{r-1} \, l(x) [\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}, x_i; f]$$

Derivând de $m+r$ ori şi ţinând seamă de $l^{(m+1)}(x_0)=0$, deducem

$$L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f|x_0) =$$

$$= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r-1}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f|x_0) =$$

$$= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r-1}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}', x_i; f|x_0), \quad [l^{(m+1)}(x_0)=0]$$

care indică trecerea formulei dela aspectul 2° la aspectele 1° şi 3° respectiv.

Tot formulele (20), (21) ne dau

$$L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f|x) =$$

$$= L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1'', x_2'', \ldots, x_p''; f|x) +$$

$$+ (x-x_0)^r \frac{l(x)}{x-x_i}[\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f|x) =$$

$$= L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots x_0}_{r+1}, x_1'', x_2'', \ldots, x_p''; f|x) +$$

$$+ (x_i-x_0)(x-x_0)^r \frac{l(x)}{x-x_i}[\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r+1}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f]$$

unde $x_1'', x_2'', \ldots, x_p''$ sunt nodurile (6), dintre care s'a suprimat odată nodul x_i. Derivând de $m+r$ ori şi ţinând seamă de $\left[\frac{l(x)}{x-x_i}\right]^{(m)}_{x=x_0}=0$, se deduce

$$L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f|x_0) =$$

$$= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1'', x_2'', \ldots, x_p''; f|x_0) =$$

$$= L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r+1}, x_1'', x_2'', \ldots, x_p''; f|x_0), \quad \left[\left(\frac{l(x)}{x-x_i}\right)^{(m)}_{x=x_0}=0\right]$$

care indică trecerea dela aspectul 3° la aspectele 1° şi 2° respectiv.

Noţiunea de formulă de exactitate maximă excepţională este astfel complet clarificată.

12. Fie $\mathfrak{M}^0$ reunirea mulțimilor $\mathfrak{M}$, obținute variind punctul de derivare x_0 și lăsând neschimbate celelalte caracteristice ale lui $\mathfrak{M}$. Există atunci un număr finit de formule excepționale în $\mathfrak{M}^0$. Acest număr este egal cu numărul total al rădăcinilor distincte de noduri ale polinoamelor (16) dacă $r > 0$ și este egal cu numărul total al rădăcinilor distincte de noduri ale primului și ultimelor s polinoame (16) dacă $r = 0$.

Rădăcinile polinomului $l^{(m)}(x)$ sunt de două feluri. Unele, să le zicem *improprii*, provin din multiplicitatea nodurilor. Acestea sunt toate nodurile, dacă $m = 0$, și sunt acele noduri care sunt și rădăcini ale polinomului $l^{(m-1)}(x)$, dacă $m > 0$. Orice rădăcină improprie este socotită cu ordinul său de multiplicitate și coincide, pe baza lemei 1, cu un nod de ordin de multiplicitate egal cu $m + 1$, cel puțin. Mai precis, numărul rădăcinilor improprii care coincid cu nodul x_i este egal cu $\max\{0, r_i - m\}$. Astfel, numărul total al rădăcinilor improprii ale polinomului $l^{(m)}(x)$ este egal cu

$$\sum_{i=1}^{s} \max\{0, r_i - m\}. \tag{22}$$

Celelalte rădăcini ale lui $l^{(m)}(x)$, să le zicem *proprii*, sunt rădăcini simple. Astfel de rădăcini pot exista numai dacă $m > 0$. O rădăcină proprie poate coincide cu un nod, însă în orice caz nu cu cel mai mic sau cu cel mai mare dintre aceste noduri. Această din urmă proprietate rezultă din faptul că, rădăcinile derivatei unui polinom cu toate rădăcinile reale aparțin totdeauna celui mai mic interval închis care conține toate rădăcinile polinomului. Pe baza acestei proprietăți, dacă $l^{(m)}(x)$ se anulează într'un nod extrem, $l^{(m-1)}(x)$ se anulează de asemenea în acest nod. Acest nod are deci ordinul de multiplicitate cel puțin egal cu $m + 1$ și deci este o rădăcină improprie. Dacă x_i este rădăcină proprie, trebue să avem $r_i \leqq m - 1$. Pentru $r_i = m$ avem $l^{(m)}(x_i) \neq 0$.

Numărul rădăcinilor proprii ale lui $l^{(m)}(x)$ este egal cu

$$N_m = p + 1 - m - \sum_{i=1}^{s} \max\{0, r_i - m\}.$$

Dacă $m = 0$, avem $N_m = 0$. Dacă $m = 1$, avem $N_m = s - 1$ și toate rădăcinile proprii sunt distincte de noduri. Dacă $m > 1$, cel mult $\max\{0, s-2\}$ și bineînțeles cel mult $p + 1 - m$, rădăcini proprii coincid cu un nod.

Numărul rădăcinilor improprii ale polinomului $\left[\frac{l(x)}{x - x_i}\right]^{(m)}$ va fi egal cu

$$\sum_{i=1}^{s} \max\{0, r_i - m\} - \max\{0, r_i - m\} + \max\{0, r_i - m - 1\}.$$

Rădăcinile proprii ale acestui polinom sunt simple și, pentru același motiv ca mai sus, diferite de cel mai mic și de cel mai mare nod. Rezultă că numărul total al rădăcinilor proprii ale ultimelor s polinoame (16) este egal cu $(s - 1)(N_m - 1) + N_{m+1}$. Rezultatele dela punctul 9 ne arată că două oarecare din polinoamele (16) nu pot avea o rădăcină comună diferită de un nod. De asemenea, formula (17) ne arată că, dacă x_i este o rădăcină proprie a unuia din polinoamele (18), atunci este rădăcină proprie a ambelor polinoame (18), dar nu este rădăcină proprie a niciunui alt polinom (16). Dacă

un nod este o rădăcină proprie a polinomului $l^{(m)}(x)$, atunci acest nod nu este rădăcină a niciunui alt polinom (16). Observăm, în fine, că cel mult $\max\{0, s-2\}$ noduri pot fi rădăcini proprii ale polinoamelor (16).

Din cele ce preced rezultă că putem enunța teorema următoare:

Teorema 4. *Numărul* N′ *al formulelor* (*E*) *din* $\mathfrak{M}^0$, *al căror grad de exactitate este egal cu* $p+r+1$, *este egal cu* 0 *pentru* $m=0$, *egal cu* $s-1$ *pentru* $m=1$ *și verifică inegalitățile*

$$N_m - \max\{0, s-2\} \leqq N' \leqq N_m$$

pentru $m>1$.

Numărul N″ *al formulelor* (*E*) *din* $\mathfrak{M}^0$, *al căror ordin este egal cu* $p+r$, *este egal cu* 0 *dacă* $m=0$, $r=0$, *egal cu* $s-1$ *dacă* $m=0$, $r>0$ *și verifică inegalitățile.*

$$(s-1)(N_m-1)+N_{m+1}-\max\{0,s-2\} \leqq$$

$$\leqq N'' \leqq \begin{cases} (s-1)(N_m-1)+N_{m+1}, & \text{dacă } r=0 \\ (s-1)(N_m-1)+2N_{m+1}, & \text{dacă } r>0 \end{cases}$$

pentru $m>0$.

Numărul N *al formulelor* (E) *excepționale din* $\mathfrak{M}^0$ *este egal cu* 0 *dacă* $m=r=0$, *egal cu* $s-1$ *dacă* $m=0$, $r>0$ *și verifică inegalitățile*

$$(s-1)(N_m-1)+N_m+N_{m+1}-\max\{0,s-2\} \leqq$$

$$\leqq N \leqq \begin{cases} (s-1)(N_m-1)+N_m+N_{m+1}, & \text{dacă } r=0 \\ (s-1)(N_m-1)+N_m+2N_{m+1}, & \text{dacă } r>0 \end{cases}$$

pentru $m>0$.

Numărul $\max\{0, s-2\}$ din delimitările inferioare se poate ameliora în funcție de p, m, s, dar nu ne ocupăm de această chestiune.

13. Putem delimita în mod destul de convenabil numărul (22) în funcție numai de p, m, s. Pentru aceasta ne vom folosi de următoarea lemă:

Lema 2. *Dacă numerele* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta$ *sunt nenegative avem inegalitățile.*

$$\max\left\{0, \sum_{i=1}^{k}\alpha_i - k\beta\right\} \leqq \sum_{i=1}^{k}\max\{0,\alpha_i-\beta\} \leqq \max\left\{0, \sum_{i=1}^{k}\alpha_i-\beta\right\}. \quad (23)$$

Este destul să demonstrăm proprietatea pentru $k=2$, căci pentru k oarecare va rezulta prin inducție completă.

Pentru $k=2$, inegalitățile revin la [1])

$$|\alpha_1+\alpha_2-2\beta| \leqq |\alpha_1-\beta|+|\alpha_2-\beta| \leqq |\alpha_1+\alpha_2-\beta|+\beta$$

care se verifică imediat [2]).

---

[1]) Avem $\max\{0,\alpha\}=\frac{1}{2}(\alpha+|\alpha|)$.

[2]) Fiecare membru este linear în β, în intervalele determinate de punctele 0, α_1, α_2, $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$, $\alpha_1+\alpha_2$, $+\infty$. Este deci destul să se verifice inegalitățile pentru extremitățile finite ale acestor intervale și pentru $\beta>\alpha_1+\alpha_2$.

Prima inegalitate (23) revine la o inegalitate clasică și este adevărată oricare ar fi numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta$.

Revenind la delimitarea sumei (22), care pentru $m = 0$ este egală cu $p + 1$, avem, pe baza lemei 2,

$$\max\{0, p+1-sm\} \leqq \sum_{i=1}^{s} \max\{0, r_i - m\} \leqq \max\{0, p+2-s-m\} \quad (m>0),$$

deoarece $r_i - 1 \geqq 0$, $m - 1 \geqq 0$.

Observăm acum că [1]) $\alpha - \max\{\beta, \gamma\} = \min\{\alpha - \beta, \alpha - \gamma\}$ și deducem

$$\min\{p+1-m, s-1\} \leqq N_m \leqq \min\{p+1-m, (s-1)m\}, \quad m > 0 \quad (N_0 = 0). \tag{24}$$

Numerele $(s-1)(N_m - 1)$, N_m, N_{m+1} sunt nule pentru $s=1$.

Dacă $m = p$, singurul punct x_0 pentru care formula poate să fie excepțională este

$$\frac{1}{p+1} \sum_{i=1}^{s} r_i x_i \tag{25}$$

pentrucă aceasta este rădăcina lui $l^{(p)}(x)$.

Dacă $s > 1$, $0 < m < p$, avem

$$(s-1)[\min\{p+1-m, s-1\} - 1] - \max\{0, s-2\} \geqq 0, \quad \min\{p-m\ s-1\} \geqq 1$$

care ne arată, ținând seamă de (24), că avem

$$(s-1)(N_m - 1) + N_{m+1} - \max\{0, s-2\} \geqq 1.$$

Ținând deci seama de teorema 4, deducem teorema următoare:

Teorema 5. *În mulțimea* $\mathfrak{M}^0$ *există totdeauna formule* (E) *excepționale, afară de următoarele trei cazuri*:

1° $s = 1$. 2° $m = p$ *și punctul* (25) *coincide cu un nod*. 3° $m = 0$ *și* $r = 0$.

14. Dacă în formula (1) avem $m + r > 0$ și dacă coeficienții a_0 (dacă $r > 0$) $a_{i,0}$, $i = 1, 2 \ldots, s$ sunt toți nuli, formula este în același timp o formulă de derivare numerică pentru derivata $f'(x)$ a funcției $f(x)$. În acest caz, vom spune că formula (1) este *reductibilă*. În cazul contrar, vom spune că formula este *ireductibilă*. Formula (1) este deci reductibilă, respectiv ireductibilă, după cum în această formulă nu figurează niciuna, respectiv figurează efectiv cel puțin una, din valorile funcției în noduri și în punctul de derivare.

Este interesant să examinăm care sunt formulele de exactitate maximă reductibile. Pentru aceasta, să examinăm reductibilitatea formulei (E). Să presupunem că formula (E) nu este trivială și este reductibilă. Trebue atunci să avem $r = 0$, sau $r > 1$ și $m + r > 0$. Să notăm cu (E*) această for-

[1]) Avem

$$\max\{\alpha, \beta\} = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2}, \quad \min\{\alpha, \beta\} = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}.$$

mulă, privită ca o formulă de derivare numerică pentru funcția $f'(x) = g(x)$. Folosind deci notațiile (10), avem

$$g^{(m+r-1)}(x_0) = \sum_{j=1}^{r-1} c_j g^{(j-1)}(x_0) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r_i-1} c_{i,j} g^{(j-1)}(x_0) + R \qquad (E^*)$$

Pe baza celor stabilite mai sus, putem presupune că ordinul formulei (E) este $p+r+1$. Să notăm cu p^*, r^*, s^* numerele p, r, s, corespunzătoare formulei (E*). Toate aceste fapte implică $r_i > 1$, $i = 1, 2, \ldots, s$ și avem atunci $p^* = p - s, s^* = s, r^* = 0$ sau $r^* = r - 1$ după cum $r = 0$ sau $r > 1$.

Gradul de exactitate al formulei (E*) este $p + r - 1$ sau $p + r$, după cum formula (E) nu este sau este excepțională, deoarece punând $g(x) = f'(x)$ în (E*) regăsim formula (E), iar $(x^i)' = ix^{i-1}$.

Se verifică acum imediat că $p + r - 1 \geqq p^* + r^*$, ceea ce ne arată că (E*) *este o formulă de exactitate maximă.* Deoarece această formulă nu se reduce la formula trivială, gradul său de exactitate este p^*+r^* sau p^*+r^*+1, după cum ea nu este sau este excepțională. Am evaluat gradul de exactitate în două feluri diferite și rezultatele obținute trebue să coincidă. Dacă $s = 1$, formulele (E), (E*) nu pot fi excepționale și atunci trebue să avem $p+r-1 = p^* + r^*$ și se verifică imediat că această egalitate are loc dacă și numai dacă $r = 0$. Dacă $s > 1$, avem $p + r - 1 > p^* + r^*$ și egalitate între gradele de exactitate nu poate avea loc decât dacă $p+r-1=p^*+r^*+1$. Această egalitate are loc numai dacă $r = 0$ și $s = 2$.

In definitiv deci, formula (E) nu poate fi reductibilă decât în următoarele două cazuri:

1°. $r = 0, s = 1$. In acest caz, niciuna din formulele (E), (E*) nu este excepțională.

2°. $r = 0, s = 2$. In acest caz formula (E*) este excepțională, dar (E) nu este excepțională.

Să se observe că o formulă (E) excepțională este totdeauna ireductibilă.

In cazul 2°, condițiile de excepționalitate se scriu

$$l^{(m)}(x_0) \neq 0, \quad \left[\frac{l(x)}{(x-x_1)(x-x_2)}\right]^{(m-2)}_{x=x_2} = 0. \qquad (26)$$

15. Rămâne să mai demonstrăm că în cele două cazuri de mai sus formula (E) este efectiv reductibilă.

In cazul 1° avem

$$L(\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{r_1}; f \mid x) = \sum_{j=0}^{r_1-1} \frac{(x-x_1)^j}{j!} f^{(j)}(x_1)$$

deci $C_{1,0}(x) = 1$, de unde $C_{1,0}^{(m)}(x_0) = c_{1,0} = 0$ $(m > 0)$.

In cazul 2°, polinoamele $C_{1,0}(x)$, $C_{2,0}(x)$, de gradul $p - 1$, pe baza formulelor (8) se divid cu polinomul

$$\frac{l(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} \qquad (27)$$

deci ele diferă numai prin niște factori constanți de polinomul (27). Acești factori constanți sunt de altfel diferiți de zero, tot pe baza formulelor (8) [1]). Condițiile $c_{1,0} = c_{2,0} = 0$ sunt deci echivalente cu a doua relație (26). Prima relație (26) este o consecință a analizei precedente.

Simultaneitatea condițiilor (26) se poate demonstra și direct. Avem

$$l'(x) = [r_1(x - x_2) + r_2(x - x_1)] \frac{l(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

de unde deducem

$$l^{(m)}(x) = [r_1(x - x_2) + r_2(x - x_1)] \left[\frac{l(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}\right]^{(m-1)} +$$

$$+ (p + 1)(m - 1) \left[\frac{l(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}\right]^{(m-2)}.$$

De aici se vede că orice rădăcină comună a polinoamelor $l^{(m)}(x)$, $\left[\frac{l(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}\right]^{(m-2)}$ este o rădăcină comună a polinoamelor

$$\left[\frac{l(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}\right]^{(m-1)}, \quad \left[\frac{l(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}\right]^{(m-2)}$$

și o astfel de rădăcină, pe baza lemei 1, coincide neapărat cu unul din nodurile x_1, x_2.

In definitiv putem enunța teorema următoare:

Teorema 6. *Dacă* $m \leq p$, *formula* (E) *este reductibilă dacă și numai dacă:*

1°. $r = 0, s = 1$, *sau*

2°. $r = 0, s = 2$ *și* x_0 *este o rădăcină, diferită de nodurile* x_1, x_2 *ale polinomului*

$$\left[\frac{l(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}\right]^{(m-1)}.$$

Proprietățile sunt exprimate prin formulele

$$L^{(m)}(\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{r_1}; f|x) = L^{(m-1)}(\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{r_1 - 1}; f'|x),$$

$$L^{(m)}(\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{r_1}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{r_2}; f|x_0) =$$

$$= L^{(m-1)}(\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{r_1 - 1}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{r_2 - 1}; f'|x_0)$$

unde x_0 verifică a doua condiție (26).

[1]) Din $C_{1,0}(x) + C_{2,0}(x) = 1$ rezultă că acești factori sunt de semne contrare și egali în valoare absolută.

§ 2. Câteva considerații asupra restului

16. In anumite cazuri particulare importante, restul R al formulei (1) se pune sub o formă simplă și comodă. In cazul formulei de interpolare a lui Lagrange-Hermite

$$f(x_0) = L(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}; f | x_0) + R \tag{28}$$

avem

$$R = R[f] = l(x_0)[x_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}; f] \tag{29}$$

unde $l(x)$ este polinomul (3) deja definit și care pe baza notațiilor (7) se poate scrie și

$$l(x) = (x - x'_1)(x - x'_2) \ldots (x - x'_{p+1}).$$

Restul formulei (28), sub forma (29), se exprimă ca un produs dintre un număr diferit de zero și independent de funcția $f(x)$ și o diferență divizată de ordinul $p + 1$ al funcției $f(x)$.

Pe baza formulelor

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}; x^i] = \begin{cases} 0, \text{ pentru } i = 0, 1, \ldots, k-1 \\ 1, \text{ pentru } i = k \end{cases} \tag{30}$$

este vizibil că formula (28) are gradul de exactitate p. Punând $f(x) = l(x) = x^{p+1} + \ldots$ în (28) și ținând seamă de formula (11), vedem că factorul diferenței divizate din (29) este egal cu

$$R[l] = R[x^{p+1}] = l(x_0).$$

17. Vom spune că restul formulei (1) sau că funcționala $R[f]$ este de *formă simplă* dacă avem

$$R[f] = M \cdot [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f] \tag{31}$$

oricare ar fi funcția $f(x)$, unde n este gradul de exactitate al formulei, M o constantă *diferită de zero* și independentă de funcția $f(x)$, iar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}$, $n + 2$ puncte *distincte* din intervalul deschis (a, b).

In acest caz, pe baza formulelor (30), coeficientul M este dat de egalitatea $M = R[x^{n+1}] = R[P]$, unde $P(x)$ este un polinom oarecare de gradul $n + 1$, cu primul coeficient 1.

Punctele ξ_i depind în general de funcția $f(x)$, iar intervalul $[a, b]$ este cel precizat în § 1.

De exemplu, așa cum vom vedea mai jos, restul formulei (28) este de formă simplă.

Pentru simplificarea notațiilor, vom nota cu $D_k[f]$ o diferență divizată de ordinul k a funcției $f(x)$ pe $k + 1$ noduri *distincte* arbitrare din intervalul (a, b). Dacă deci formula (1) are gradul de exactitate n și dacă restul este de formă simplă, avem $R[f] = R[x^{n+1}] \cdot D_{n+1}[f]$.

Definiția precedentă subsistă pentru $n \geq 0$. O vom menține și pentru $n = -1$, cu restricția că în acest caz, punctul ξ_1 poate coincide și cu una din

extremitățile intervalului $[a, b]$. Această convenție simplifică expunerea. De altfel, în cazul, aproape banal, când $n = -1$, este în general ușor să se recunoască dacă se poate alege sau nu punctul ξ_1, în interiorul intervalului.

In cazul când restul este de formă simplă, formula (31) ne dă indicații suficiente asupra structurii acestui rest, pe baza proprietăților de medii ale diferențelor divizate, proprietăți pe care le expunem într'o altă lucrare. Aceste proprietăți permit să se exprime restul în mod analog, cu ajutorul diferențelor divizate ale derivatei de un anumit ordin dat a funcției $f(x)$, când această derivată există în intervalul (a, b).

18. Pe baza unui rezultat anterior [9], pentru recunoașterea formei simple a restului putem aplica următorul criteriu:

C. *Pentru ca funcționala* R [f] *aditivă și omogenă, cu gradul de exactitate* n, *să fie de formă simplă este necesar și suficient ca* R [f] *să fie diferit de zero pentru orice funcție* f (x) *convexă de ordinul* n *în* [a, b] [1]).

Definiția formei simple și criteriul C se aplică nu numai restului formulei (1) dar și unei funcționale aditive și omogene $R[f]$, definită într'un câmp vectorial F de funcții continue în intervalul $[a, b]$ și conținând toate polinoamele.

O funcție $f(x)$ se zice *neconcavă* de ordinul n în intervalul $[a, b]$, dacă toate diferențele sale divizate pe $n + 2$ puncte *distincte* din $[a, b]$ sunt *nenegative*. Funcția se zice, în particular, *convexă* de ordinul n în acest interval, dacă toate aceste diferențe divizate sunt *pozitive*. Vom semnala la locul lor proprietățile utilizate aici ale funcțiilor neconcave și convexe.

O funcție neconcavă de ordinul $n \geq 1$, deci în particular o funcție convexă de ordinul $n \geq 1$, este continuă în intervalul deschis (a, b). Dacă $n > 1$, ea admite derivate continue de ordinele $1, 2, \ldots, n-1$ în intervalul (a, b) In general, o astfel de funcție nu are însă o derivată de ordinul n în toate punctele intervalului (a, b).

In general, câmpul F al funcționalei $R[f]$ nu conține toate funcțiile convexe de ordinul n în (a, b) pentrucă, pe de o parte, prin ipoteză câmpul F este format din funcții continue în $[a, b]$, pe de altă parte funcționala poate depinde de valori ale derivatelor de ordin $> n - 1$ ale funcției $f(x)$. Criteriul C este însă întotdeauna aplicabil deoarece din demonstrația acestui criteriu [7], rezultă că este suficient să considerăm numai funcțiile convexe de ordinul n care aparțin lui F.

19. In enunțul criteriului C condiția $R[f] \neq 0$ se poate înlocui cu condiția $R[f_1]\, R[f_2] > 0$ pentru două funcții oarecare $f_1(x)$ și $f_2(x) \in F$, convexe de ordinul n. Această proprietate rezultă din următoarea lemă, foarte utilă în aplicarea criteriului C.

L e m a 3. *Dacă* n *este gradul de exactitate al funcționalei* R[f] *aditivă și omogenă și dacă putem găsi două funcții* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *neconcave de ordinul* $n' \leq n$ *în intervalul* [a, b] *astfel ca*

$$R[f_1]\, R[f_2] < 0 \tag{32}$$

atunci există o funcție f (x), *convexă de ordinul* n′ *în* [a, b], *astfel ca*

$$R[f] = 0. \tag{33}$$

[1]) Criteriul sub această formă este suficient aici. In general, din faptul că $R[f] \neq 0$, pentru orice funcție convexă de ordinul n, rezultă că gradul de exactitate este n.

Se știe că o combinație liniară, cu coeficienți pozitivi, de mai multe (un număr finit) funcții neconcave de ordinul n', dintre care cel puțin una este convexă de ordinul n', este o funcție convexă de ordinul n'. Să observăm acum că funcția $(x-a)^{n+1}$ este convexă de ordinul n' în intervalul $[a, b]$ [1]). Pe de altă parte, $R[(x-a)^{n+1}] \neq 0$, din cauza definiției gradului de exactitate. Rezultă că funcțiile

$$f_1^*(x) = f_1(x) + \frac{1}{2}\left|\frac{R[f_1]}{R[(x-a)^{n+1}]}\right|(x-a)^{n+1}$$

$$f_2^*(x) = f_2(x) + \frac{1}{2}\left|\frac{R[f_2]}{R[(x-a)^{n+1}]}\right|(x-a)^{n+1}$$

sunt convexe de ordinul n'.

Ținând seamă de (32), un calcul simplu ne arată că

$$R[f_1^*]\,R[f_2^*] = \frac{3}{4}R[f_1]\,R[f_2] < 0.$$

Rezultă că funcția

$$f(x) = f_1^*(x) - \frac{R[f_1^*]}{R[f_2^*]}f_2^*(x)$$

este convexă de ordinul n' și, se verifică imediat, satisface egalitatea (33).

Lema 3 este deci demonstrată.

Pentru $n' = n$, aplicând criteriul C, se deduce următoarea teoremă:

T e o r e m a 7. *Dacă* n *este gradul de exactitate al funcționalei* R[f], *aditivă și omogenă și dacă putem găsi două funcții* $f_1(x)$, $f_2(x) \in F$, *neconcave de ordinul* n *în* [a, b], *astfel ca să avem* (32), *atunci funcționala* nu este *de formă simplă.*

20. Restul R al formulei (1) se poate studia sub forma mai simetrică

$$R[f] = \sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0} b_{i,j} f^{(j)}(x_i) \tag{34}$$

unde pentru moment putem presupune

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = b.$$

Bineînțeles, câmpul F al funcționalei (34) este format din funcțiile $f(x)$ continue în $[a, b]$ și admițând derivatele în punctele unde intervin efectiv în expresia lui $R[f]$.

Vom căuta să stabilim câteva proprietăți în legătură cu forma simplă a funcționalei (34).

Să presupunem că gradul de exactitate este n. Vom arăta că funcționala nu poate depinde efectiv de derivatele de ordin $> n+1$ în caz că forma ei este simplă. Pentru aceasta va fi destul, pe baza teoremei 7, ca în cazul contrar să construim două funcții $f_1(x)$, $f_2(x) \in F$ neconcave de ordinul n, astfel ca să avem inegalitatea (32).

---

[1]) Se poate arăta, de exemplu, că derivata de ordinul $n'+1$ a funcției este pozitivă în intervalul $[a, b]$.

Să presupunem deci că $b_{i,k} \neq 0$, $b_{i,j} = 0$, $j = k+1, k+2, \ldots$, unde $k \geqq n+2$.

Fie ε un număr pozitiv destul de mic și care în cursul demonstrației va fi precizat și mai mult.

Să definim funcția *continuă* $\varphi_\varepsilon(x)$ în felul următor:

1°. $\varphi_\varepsilon(x_i) = 1$.

2°. $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ pentru $x \in [a, x_i - \varepsilon] \cup [x_i + \varepsilon, b]$, $x \in [a + 2\varepsilon, b]$, respectiv $x \in [a, b - 2\varepsilon]$, după cum $0 < i < s$, $i = 0$, respectiv $i = s$.

3°. $\varphi_\varepsilon(x)$ este linear în fiecare din intervalele rămase din $[a, b]$ deci în $[x_i - \varepsilon, x_i]$ și $[x_i, x_i + \varepsilon]$, $[a, a + 2\varepsilon]$, respectiv $[b - 2\varepsilon, b]$, după cum $0 < i < s$, $i = 0$, respectiv $i = s$.

Avem atunci $\varphi_\varepsilon(x) \geqq 0$ pentru $x \in [a, b]$.

Să considerăm acum funcția

$$f_\varepsilon(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\, \varphi_\varepsilon(t)\, dt.$$

Atunci, dacă $\varepsilon < \max\left\{x_1 - x_0,\ x_s - x_{s-1},\ \frac{x_s - x_0}{2}\right\}$ avem

$$f_\varepsilon^{(k)}(x) = \varphi_\varepsilon(x), \text{ pentru } x \in [a, b],$$

$$0 = f_\varepsilon^{(k-1)}(a) \leqq f_\varepsilon^{(k-1)}(x) \leqq f_\varepsilon^{(k-1)}(b) = \int_a^b \varphi_\varepsilon(t)\, dt = \varepsilon, \quad \text{pentru} \quad x \in [a, b],$$

$$f_\varepsilon^{(j)}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{k-2-j}}{(k-2-j)!}\, f_\varepsilon^{(k-1)}(t)\, dt, \quad \text{pentru} \quad j = 0, 1, \ldots, k-2.$$

Rezultă atunci imediat că

$$0 \leqq f_\varepsilon^{(j)}(x) \leqq \varepsilon \frac{(b-a)^{k-1-j}}{(k-1-j)!}, \quad \text{pentru} \quad x \in [a, b] \text{ și } j = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{35}$$

Fie acum A o constantă oarecare diferită de zero și să considerăm funcția

$$f(x) = A f_\varepsilon(x) + |A| \frac{\varepsilon (b-a)^{k-n-2}}{(n+1)!\,(k-n-2)!} (x-a)^{n+1}. \tag{36}$$

Avem atunci

$$f^{(n+1)}(x) = A f_\varepsilon^{(n+1)}(x) + |A| \frac{\varepsilon (b-a)^{k-n-2}}{(k-n-2)!}$$

și deci, pe baza lui (35),

$$f^{(n+1)}(x) \geqq 0, \quad x \in [a, b].$$

Această inegalitate ne arată că funcția $f(x)$ este neconcavă de ordinul n în $[a, b]$.

Ţinând seama de (36), deducem

$$f^{(j)}(x) = \begin{cases} A f_\varepsilon^{(j)}(x) + |A| \dfrac{\varepsilon (b-a)^{k-n-2}}{(n+1-j)!\,(k-n-2)!} (x-a)^{n+1-j}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad j = 0, 1, \ldots, n+1 \\ A f_\varepsilon^{(j)}(x), \; j = n+2, n+3, \ldots, k-1 \end{cases}$$

pentru $x \in [a, b]$.

Ţinând seama de (35), avem

$$|f^{(j)}(x)| \leqq 2|A|(b-a)^{k-1-j}, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1, \; x \in [a, b]. \tag{37}$$

Dacă acum presupunem că

$$\frac{1}{2} \min_{i=0,1,\ldots,s} \{x_{i+1} - x_i\}. \tag{38}$$

avem şi

$$f^{(j)}(x_\alpha) = 0, \text{ pentru } j \geqq k, \; \alpha = 0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, s. \tag{39}$$

Ţinând seama de $f^{(k)}(x_i) = A$ şi de (34), (37), (39), deducem

$$|R[f] - b_{i,k} A| < \left(\sum_{i=0}^{s} \sum_{j=1}^{k-1} |b_{i,j}|\right) 2|A| \cdot \max\{1, (b-a)^{k-1}\} \cdot \varepsilon.$$

Alegând pe ε destul de mic şi în orice caz astfel ca inegalitatea (38) să fie verificată, deducem

$$|R[f] - b_{i,k} A| < \frac{|b_{i,k} A|}{2}$$

care ne arată că atunci $R[f]$ are semnul lui $b_{i,k} A$. Dar A a fost ales oarecare. Luând $A = 1$ şi notând cu $f_1(x)$ funcţia (36) astfel obţinută, şi luând apoi $A = -1$ şi notând cu $f_2(x)$ funcţia (36) astfel obţinută, inegalitatea (32) este verificată.

Putem dar enunţa următoarea teoremă:

Teorema 8. *Dacă gradul de exactitate al funcţionalei* (34) *este* n, *această funcţională nu poate fi de formă simplă decât dacă nu conţine efectiv derivate de ordin* $> n + 1$.

Cu alte cuvinte, funcţionala nu poate fi de formă simplă decât dacă $b_{i,j} = 0$ pentru $j > n+1$, $i = 0, 1, \ldots, s$.

Vom examina în particular funcţionala (32) cu gradul de exactitate -1, 0 sau 1.

21. Să presupunem că gradul de exactitate este -1. Teorema 8, care se aplică şi aici, ne arată că funcţionala (32) este în mod necesar de forma

$$R[f] = \sum_{i=0}^{s} b_i f(x_i) \tag{40}$$

dacă ea este de formă simplă.

Pentru ca funcționala (40) să fie de formă simplă, este necesar ca coeficienții $b_0, b_1, \ldots, b_s$ să fie de același semn [1]). Într'adevăr, să presupunem contrariul, și fie $b_\alpha b_\beta < 0$. Atunci, inegalitatea (32) este verificată dacă pentru $f_1(x)$ luăm o funcție continuă nenegativă, astfel ca $f_1(x_\alpha) = 1$, $f_1(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, s$ și pentru $f_2(x)$ luăm o funcție continuă nenegativă, astfel ca $f_2(x_\beta) = 1$, $f_2(x_j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, \beta - 1, \beta + 1, \ldots, s$.

Condiția este și suficientă, căci dacă ea este îndeplinită, din

$$R[1] = \sum_{i=0}^{s} b_i \neq 0$$

rezultă că $R[f] \neq 0$ pentru orice funcție pozitivă $f(x)$.

Deducem prin urmare următoarea teoremă:

Teorema 9. *Condiția necesară și suficientă ca funcționala* (40) *să fie de gradul de exactitate* -1 *și să fie de formă simplă este ca toți coeficienții* b_i, $i = 0, 1, \ldots, s$ *să fie de același semn, fără să fie toți nuli.*

Dacă condiția este îndeplinită, avem deci

$$\sum_{i=0}^{s} b_i f(x_i) = \left(\sum_{i=0}^{s} b_i\right) D_0[f]$$

care exprimă de altfel o proprietate binecunoscută a funcțiilor continue. Aici $D_0[f] = f(\xi)$. Punctul ξ aparține, în general, intervalului închis $[a, b]$. Dacă, de exemplu, $s > 1$ și cel puțin unul din coeficienții $b_2, b_3, \ldots, b_{s-1}$ este diferit de zero, punctul ξ se poate alege în intervalul (a, b).

Ca o aplicație, să se observe că condiția necesară și suficientă pentru ca formula (1) să fie de grad de exactitate -1 și cu restul de formă simplă este ca $m = r = 0$ și ca $a_{i,0} \leqq 0$, $a_{i,j} = 0$, pentru $j = 1, 2, \ldots, r_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

22. Dacă funcționala (34) este de grad de exactitate 0 și de formă simplă, atunci, conform teoremei 8, ea este în mod necesar de forma

$$R[f] = \sum_{i=0}^{s} [b_i f(x_0) + b_i' f'(x_i)]. \tag{41}$$

Condițiile ca gradul de exactitate să fie 0 sunt

$$\sum_{i=0}^{s} b_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=0}^{s} (b_i x_0 + b_i') \neq 0. \tag{42}$$

Să căutăm acum condiții necesare pentru ca funcționala să fie și de formă simplă.

Prima relație (42) este necesară căci 1 și -1 sunt ambele funcții nedescrescătoare și avem

$$R[1] \cdot R[-1] = -\left(\sum_{i=0}^{s} b_i\right)^2$$

și dacă condiția nu ar fi îndeplinită, am satisface la inegalitatea (32).

De asemenea, a doua condiție (42) este necesară, căci altfel am avea $R[x] = 0$, și x este o funcție crescătoare.

---

[1]) Aceasta înseamnează că numerele sunt toate nenegative sau toate nepozitive. Un singur număr este considerat ca având totdeauna același semn.

Fie acum $f(x)$ o funcție continuă, nedescrescătoare, egală cu 0 pentru $x \in [a, x_{i-1}+\varepsilon]$ și egală cu 1 pentru $x \in [x_i-\varepsilon, b]$, ε fiind un număr pozitiv destul de mic $[\varepsilon < \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})]$. Avem atunci

$$R[f] = b_i + b_{i+1} + \ldots + b_s.$$

Pe baza teoremei 7, trebue deci ca numerele

$$b_i + b_{i+1} + \ldots + b_s, \quad i = 1, 2, \ldots s \tag{43}$$

să fie de același semn.

Fie apoi funcția $f(x)$ egală cu 0 pentru $x \leqq x_i - \varepsilon$, egală cu 2ε pentru $x \geqq x_i + \varepsilon$ și lineară în intervalul $[x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$, unde ε este un număr pozitiv destul de mic, $\varepsilon < \min_{i=1,2,\ldots,s} \{x_i - x_{i-1}\}$. Această funcție este nedescrescătoare și avem

$$R[f] = \varepsilon[(b_i + b_{i+1} + \ldots + b_s) + b_{i+1} + b_{i+2} + \ldots + b_s] + b_i'.$$

Deoarece ε poate fi luat oricât de mic, se vede, tot pe baza teoremei 7, că numerele

$$b_0', b_1', \ldots, b_s' \tag{44}$$

împreună cu numerele (43) trebue să fie de același semn.

In fine, vom pune în evidență încă o condiție necesară. Fie $f(x)$ funcția definită în felul următor:

$$f(x) = x - \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)(2x - x_{i-1} - x_i)}{(x_i - x_{i-1})^2}, \text{ pentru } x \in [x_{i-1}, x_i],$$

$$i = 1, 2, \ldots, s.$$

Avem atunci

$$f'(x) = -\frac{6}{(x_i - x_{i-1})^2}(x - x_{i-1})(x - x_i), \text{ pentru } x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, s$$

și se vede că funcția este continuă și derivabilă în intervalul $[a, b]$. Insă $f(x_i) = x_i, f'(x_i) = 0, i = 0, 1, \ldots, s$ și $f'(x) > 0$, pentru $x \in (x_{i-1}, x_i)$ $i = 1, 2, \ldots, s$ așa că funcția $f(x)$ este crescătoare și avem

$$R[f] = \sum_{i=0}^{s} b_i x_i.$$

Deducem prin urmare condiția necesară

$$\sum_{i=0}^{s} b_i x_i \neq 0. \tag{45}$$

Să arătăm acum că condițiile stabilite sunt și suficiente.

Pe baza primei relații (42) putem scrie

$$R[f] = \sum_{i=1}^{s} (x_i - x_{i-1})(b_i + b_{i+1} + \ldots + b_s)[x_{i-1}, x_i; f] + \sum_{i=0}^{s} b_i' f'(x_i) \tag{46}$$

care se obține aplicând formula de transformare a lui Abel.

Observăm acum că

$$\sum_{i=1}^{s}(x_i - x_{i-1})(b_i + b_{i+1} + \ldots + b_s) = \sum_{i=0}^{s} b_i x_i$$

ceea ce se obține făcând $f(x) = x$ în (41) și (46). Condiția (45) implică deci faptul că numerele (43) nu sunt toate nule.

Dacă acum $f(x)$ este o funcție crescătoare, avem

$$[x_{i-1}, x_i; f] > 0,\ i = 1, 2, \ldots, s,\ f'(x_i) \geqq 0,\ i = 0, 1, \ldots . s$$

așa că prima relație (42), condiția (45) și faptul că numerele (43), (44) sunt de același semn, implică, pe baza formulei (46), că $R[f] \neq 0$.

Să se observe că prima relație (42) și condiția (45) atrag după sine a doua condiție (42), dacă numerele (43), (44) sunt de același semn.

Avem deci următoarea teoremă:

T e o r e m a 10. *Condițiile necesare și suficiente pentru ca funcționala* (41) *să fie de gradul de exactitate* 0 *și de formă simplă sunt ca să avem*

$$\sum_{i=0}^{s} b_i = 0\ ,\quad \sum_{i=0}^{s} b_i x_i \neq 0$$

Și ca numerele

$$b_s,\ b_s + b_{s-1}, \ldots, b_1 + b_2 + \ldots + b_s,\ b'_0,\ b'_1, \ldots, b'_s$$

să fie de același semn.

23. Pentru ca formula (1) să aibă gradul de exactitate 0 și să fie de formă simplă, este necesar să avem $m + r \leqq 1$ și $a_{i,j} = 0$, $j = 2, 3, \ldots, r_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Pentru scrierea celorlalte condiții, trebue să se țină seama de poziția mutuală a nodurilor și a punctului de derivare.

Pentru fixarea ideilor, putem presupune că nodurile sunt în ordine crescătoare, deci

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_s\ . \tag{47}$$

Trebue să distingem aici trei cazuri:

1°. $m = r = 0$. Presupunând $x_{i-1} < x_0 < x_i$, condițiile necesare și suficiente sunt atunci

$$\sum_{i=1}^{s} a_{i,0} = 1\ ,\quad \sum_{i=1}^{s} a_{i,0} x_i \neq x_0$$

și ca numerele

$$\left.\begin{aligned} &-(a_{1,0} + a_{2,0} + \ldots + a_{j,0}),\ j = 1, 2, \ldots, i-1, \\ &a_{j,0} + a_{j+1,0} + \ldots + a_{s,0},\ j = i, i+1, \ldots, s \\ &a_{j,1},\ j = 1, 2, \ldots, s \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

să fie de același semn.

Dacă $i = 1$ sau $i = s + 1$ primul, respectiv al doilea șir de numere (48) dispare. In aceste cazuri avem $x_0 < x_1$, respectiv $x_0 > x_s$.

2°. $m = 0$, $r = 1$. Presupunând iarăși $x_{i-1} < x_0 < x_i$ condițiile necesare și suficiente sunt

$$a_0 + \sum_{i=0}^{s} a_{i,0} = 0, \quad a_0 x_0 + \sum_{i=1}^{s} a_{i,0} x_i \neq 0$$

și ca toate numerele (48) să fie nepozitive, cu restricția de mai sus, dacă $i = 1$ sau $i = s + 1$.

3°. $m = 1$, $r = 0$. Condițiile necesare și suficiente sunt

$$\sum_{i=1}^{s} a_{i,0} = 0, \quad \sum_{i=1}^{s} a_{i,0} x_i \neq 0$$

și ca numerele

$$a_{i,0} + a_{i+1,0} + \ldots + a_{s,0}, \quad i = 2, 3, \ldots, s; \quad a_{i,1}, \quad i = 1, 2, \ldots, s$$

să fie toate nepozitive.

Există o singură formulă (E) de grad de exactitate 0, care este de formă simplă și pe care o vom semnala la § 5.

24. Dacă funcționala (34) este de gradul de exactitate 1 și de formă simplă, atunci, conform teoremei 8, ea este în mod necesar de forma

$$R[f] = \sum_{i=0}^{s} [b_i f(x_i) + b_i' f'(x_i) + b_i'' f''(x_i)]. \tag{49}$$

Condițiile ca gradul de exactitate să fie 1 sunt

$$\sum_{i=0}^{s} b_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{s} (b_i x_i + b_i') = 0, \quad \sum_{i=0}^{s} (b_i x_i^2 + 2b_i' x_i + 2b_i'') \neq 0. \tag{50}$$

Să căutăm iarăși condițiile necesare pentru ca funcționala (49) să fie de formă simplă.

Primele două condiții (50) sunt necesare, deoarece funcțiile $1, -1, x, -x$ sunt neconcave de ordinul 1 și

$$R[1]\,R[-1] = -\left(\sum_{i=0}^{s} b_i\right)^2, \quad R[x]\,R[-x] = -\left[\sum_{i=0}^{s} (b_i x_i + b_i')\right]^2.$$

Să considerăm funcția

$$f(x) = \frac{x - x_i + \varepsilon + |x - x_i + \varepsilon|}{2}$$

unde ε este un număr pozitiv $< x_i - x_{i-1}$. Această funcție este neconcavă de ordinul 1 în $[a, b]$ și avem

$$\begin{aligned} R[f] = \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} + \ldots + \lambda_s + b_i' + b_{i+1}' + \ldots + b_s' + \\ + \varepsilon (b_i + b_{i+1} + \ldots + b_s) \end{aligned} \tag{51}$$

unde am pus

$$\lambda_i = (x_i - x_{i-1})(b_i + b_{i+1} + \ldots + b_s), \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

De asemenea, funcția

$$f(x) = \frac{-x + x_{i-1} + \varepsilon + |x - x_{i-1} - \varepsilon|}{2}$$

este neconcavă de ordinul 1 în $[a, b]$ și avem $(\varepsilon < x_i - x_{i-1})$

$$R[f] = \lambda_i + \lambda_{i+1} + \ldots + \lambda_s + b_i' + b_{i+1}' + \ldots + b_s' + \varepsilon(b_i + b_{i+1} + \ldots + b_s). \tag{52}$$

Formulele (51), (52) au loc oricât de mic ar fi ε pozitiv. Se deduce imediat, pe baza teoremei 8, că numerele [1])

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_i + \lambda_{i+1} + \ldots + \lambda_s + b_i' + b_{i+1}' + \ldots + b_s', \\ \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} + \ldots + \lambda_s + b_i' + b_{i+1}' + \ldots + b_s' \end{array}\right. \quad i = 1, 2, \ldots, s \tag{53}$$

trebue să fie de același semn.

Fie acum $f(x)$ funcția nulă pentru $x \leqq x_i - \varepsilon$, egală cu $(x - x_i + \varepsilon)^2$ în intervalul $[x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$ și egală cu $4\varepsilon(x - x_i)$ pentru $x \geqq x_i + \varepsilon$. Aceasta este o funcție continuă neconcavă de ordinul 1 în $[a,b]$ [2]) și pentru ε destul de mic $(\varepsilon < x_i - x_{i-1},\ x_{i+1} - x_i)$ avem

$$R[f] = \varepsilon^2 b_i + 2\varepsilon b_i' + 4\varepsilon(\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} + \ldots + \lambda_s + b_{i+1}' + b_{i+2}' + \ldots + b_s') + 2b_i''.$$

Numărul ε putând fi oricât de mic pozitiv, tot pe baza teoremei 8, vedem că numerele

$$b_0'', b_1'', \ldots, b_s'' \tag{54}$$

sunt de același semn cu numerele (53).

In fine, ca și în cazul $n = 0$, vom pune în evidență încă o condiție necesară. Fie $f(x)$ funcția definită în felul următor:

$$f(x) = x^2 - \frac{(x - x_{i-1})^2 (x - x_i)^2}{(x_i - x_{i-1})^2}, \text{ pentru } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Avem atunci

$$f''(x) = -\frac{12}{(x_i - x_{i-1})^2}(x - x_{i-1})(x - x_i), \text{ pentru } x \in [x_{i-1}, x_i], \ i = 1, 2, \ldots, s.$$

Se vede că funcția este continuă și are o derivată a doua, continuă în intervalul $[a, b]$. Insă $f(x_i) = x_i^2, f'(x_i) = 2x_i, f''(x_i) = 0, i = 0, 1, \ldots, s$ și $f''(x) > 0$ pentru $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$, așa că funcția $f(x)$ este convexă de ordinul 1 și avem

$$R[f] = \sum_{i=0}^{s} (b_i x_i^2 + 2b_i' x_i).$$

---

[1]) Pentru $i = s$, al doilea număr se reduce la b_s'.

[2]) Este util să se facă o reprezentare grafică a acestei funcții, ca și de altfel a celorlalte funcții auxiliare întrebuințate aici.

Avem, așa dar, și condiția necesară

$$\sum_{i=0}^{s} (b_i x_i^2 + 2b_i' x_i) \neq 0. \tag{55}$$

Să arătăm acum că condițiile găsite sunt și suficiente. Acest lucru rezultă din formula

$$R[f] = \sum_{i=1}^{s} (x_i - x_{i-1})(\lambda_i + \lambda_{i+1} + \ldots + \lambda_s + b_i' + b_{i+1}' +$$

$$+ \ldots + b_s') \cdot [x_{i-1}, x_{i-1}, x_i; f] + \sum_{i=1}^{s} (x_i - x_{i-1})(\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} +$$

$$+ \ldots + \lambda_s + b_i' + b_{i+1}' + \ldots + b_s') \cdot [x_{i-1}, x_i, x_i; f] + \sum_{i=0}^{s} b'' f''(x_i)$$

care este valabilă când primele două condiții (50) sunt îndeplinite. Această formulă este un caz particular al formulei generale de transformare a diferențelor divizate și se obține aplicând de două ori formula de transformare a lui Abel [6]. Dacă punem $f(x) = x^2$, deducem

$$\sum_{i=1}^{s} (x_i - x_{i-1})(\lambda_i + \lambda_{i+1} + \ldots + \lambda_s + b_i' + b_{i+1}' + \ldots + b_s') +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} (x_i - x_{i-1})(\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} + \ldots + \lambda_s + b_i' + b_{i+1}' + \ldots + b_s') =$$

$$= \sum_{i=0}^{s} (b_i x_i^2 + 2b_i' x_i)$$

și atunci, pe baza ipotezei (55), cel puțin unul din numerele (53) este diferit de zero.

Dacă $f(x)$ este o funcție convexă de ordinul 1, avem

$$[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i; f] > 0, \quad [x_{i-1}, x_i, x_i; f] > 0, \quad i = 1, 2 \ldots, s$$

$$f''(x_i) \geq 0, i = 0, 1 \ldots, s$$

așa că primele două egalități (50), condiția (55) și faptul că numerele (53), (54) sunt de același semn implică $R[f] \neq 0$.

Să se observe că în aceleași condițiuni a treia relație (50) rezultă.

T e o r e m a 11. *Condițiile necesare și suficiente pentru ca funcționala* (49) *să fie de gradul de exactitate* 1 *și de formă simplă sunt ca primele două relații* (50) *să fie verificate, ca inegalitatea* (55) *să fie verificată și ca numerele* (53), (54) *să fie de același semn.*

25. Pentru ca formula (1) să fie de gradul de exactitate 1 și de formă simplă, este necesar ca $m + r \leq 2$ și ca $a_{i,j} = 0$, $j = 3, 4 \ldots, r_i - 1$, $i = 1, 2 \ldots s$. Exprimarea celorlalte condiții depinde de pozițiile mutuale ale nodurilor și ale punctului de derivare.

Să presupunem că nodurile sunt în ordine crescătoare, că avem deci (47). Vom putea exprima atunci condițiile necesare și suficiente după valorile lui

m, r și poziția punctului x_0 față de noduri. Aceste condiții sunt destul de complicate. Va fi deci destul să arătăm în fiecare caz cum aducem restul la forma (49), studiată mai sus, și pentru care punctele $x_0, x_1 \ldots x_s$ sunt în ordine crescătoare. Condițiile vor fi exprimate atunci cu ajutorul coeficienților b_i, b_i', b_i''.

Trebue să distingem 6 cazuri. Vom presupune în general că $x_{i-1} < x_0 < x$

1°. $m = r = 0$. O serie de condiții necesare și suficiente devin

$$\sum_{i=1}^{s} a_{i,0} = 1, \quad \sum_{i=1}^{s} (a_{i,0} x_i + a_{i,1}) = x_0, \quad \sum_{i=2}^{s} (a_{i,0} x_i^2 + 2a_{i,1} x_i) \neq x_0^2$$

iar celelalte condiții se deduc reducând restul la forma (49) [1]) ceea ce revine la înlocuirea în (49) a șirului de puncte $x_0, x_1, \ldots, x_s$ cu $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_0, x_i, \ldots x_s$ și punând apoi

$$\left.\begin{aligned} &b_j = a_{j+1,0}\ , \quad b_j' = a_{j+1,1}, \quad b_j'' = a_{j+1,2}, \quad j = 0, 1, \ldots i-2 \\ &b_{i-1} = -1, \quad b_{i-1}' = b_{i-1}'' = 0 \\ &b_j = a_{j,0}\ , \quad b_j' = a_{j,1}\ , \quad b_j'' = a_{j,2}\ , \quad j = i, i+1, \ldots, s \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

2°. $m = 0, r = 1$. Reducere analoagă, numai că a doua serie de formule (56) devine

$$b_{i-1} = a_0, \quad b_{i-1}' = -1, \quad b_{i-1}'' = 0.$$

3°. $m = 1, r = 0$. Reducere analoagă, a doua serie de formule (56) devine

$$b_{i-1} = 0, \quad b_{i-1}' = -1, \quad b_{i-1}'' = 0.$$

4°. $m = 0, r = 2$. Reducere analoagă cu

$$b_{i-1} = a_0, \quad b_{i-1}' = a_1, \quad b_{i-1}'' = -1.$$

5°. $m = r = 1$. Reducere analoagă cu

$$b_{i-1} = a_0, \quad b_{i-1}' = 0, \quad b_{i-1}'' = -1.$$

6°. $m = 2, r = 0$. Reducere analoagă cu

$$b_{i-1} = b_{i-1}' = 0, \quad b_{i-1}'' = -1.$$

In cazurile 4°, 5°, 6° semnul tuturor numerelor (53), (54) corespunzătoare este nepozitiv.

Dacă $i = 1$ deci $x_0 < x_1$, prima serie de formule (56) se suprimă, iar dacă $i = s + 1$ deci $x_s < x_0$, a treia serie de formule (56) se suprimă.

Există 5 formule (E) de grad de exactitate 1 pe care le vom semnala în § 5.

[1]) Mai exact (pentru simplificarea expunerii) restul schimbat de semn este adus la această formă, fapt care nu restrânge generalitatea problemei.

§ 3. Un criteriu pentru recunoașterea formei simple a restului unei formule de exactitate maximă

26. Să reluăm formula de derivare numerică (E). Vom presupune întâi $r=0$, deci vom considera formula

$$f^{(m)}(x_0)=L^{(m)}(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f \mid x_0)+R. \tag{57}$$

Pentru studiul restului acestei formule, putem pleca dela cazul $m=0$, considerând întâi formula (28).

Deoarece la un moment dat va fi comod să considerăm punctul x_0 ca variabil, îl vom nota atunci, pentru mai multă claritate, cu x. Formula (29) ne arată că dacă punem

$$R(x)=l(x)[x, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f] \tag{58}$$

restul formulei (28) este $R=R(x_0)$, iar restul formulei (57) va fi dat de egalitatea

$$R=R[f]=R^{(m)}(x_0). \tag{59}$$

Derivata de ordinul m, $R^{(m)}(x)$ se poate calcula din formula (58). Avem

$$R^{(m)}(x)=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i} l^{(m-i)}(x)[x, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f]^{(i)}. \tag{59'}$$

Insă [5]

$$[x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f]^{(i)}=i![\underbrace{x, x, \ldots, x}_{i+1}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f] \tag{60}$$

din care se deduce și formula mai generală

$$[\underbrace{x, x, \ldots, x}_{j}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f]^{(i)}= \tag{61}$$

$$=\frac{(i+j-1)!}{(j-1)!}[\underbrace{x, x, \ldots, x}_{i+j}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f]$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sunt noduri fixe și x este o variabilă.

Ținând seama de (60), formula (59') devine

$$R^{(m)}(x)=m!\sum_{i=0}^{m}\frac{l^{(m-i)}(x)}{(m-i)!}[\underbrace{x, x, \ldots, x}_{i+1}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f]. \tag{62}$$

27. Vom transforma acum formula (62) într'o altă formulă care se va dovedi utilă.

Putem scrie

$$R^{(m)}(x)=\sum_{i=0}^{m} A_{m,i}(x)[\underbrace{x, x, \ldots, x}_{i+1}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1-i}'; f] \tag{63}$$

unde coeficienții $A_{m,i}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ sunt polinoame în x, complet determinate și independente de funcția $f(x)$.

Această formulă rezultă dintr'o formulă generală de transformare [6] aplicată funcționalei aditive și omogene (62), definită pentru funcțiile $f(x)$ date pe punctele

$$\underbrace{x, x, \ldots, x}_{m+1}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1} \tag{64}$$

luate în această ordine.

Formula (63) se deduce din formula (62), aplicând în mod convenabil diferențelor divizate din membrul al doilea formula de recurență a diferențelor divizate până ce toate aceste diferențe divizate se exprimă linear și omogen în funcție de diferențe divizate de ordinul $p+1$ luate pe câte $p+2$ puncte consecutive din șirul (64).

Polinoamele $A_{m,i}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ se pot calcula explicit punându-se sub o formă comodă. Derivând formula (63) în raport cu x și ținând seama de formulele (59) și (61), deducem

$$\sum_{i=0}^{m+1} A_{m+1,i}(x)[\underbrace{x, x, \ldots, x}_{i+1}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1-i}; f] =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} A'_{m+i}(x)\,[\underbrace{x, x, \ldots, x}_{i+1}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1-i}; f] + \tag{65}$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} (i+1)\, A_{m,i}(x)[\underbrace{x, x, \ldots, x}_{i+2}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1-i}; f].$$

Ținând seama de formula de recurență

$$[\underbrace{x, x, \ldots, x}_{i+2}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1-i}; f] =$$

$$= \frac{1}{x - x'_{p+1-i}} \Big\{ [\underbrace{x, x, \ldots, x}_{i+2}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p-i}; f] - \tag{66}$$

$$- [\underbrace{x, x, \ldots, x}_{i+1}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1-i}; f] \Big\}$$

și identificând coeficienții în (65) deducem

$$A_{m+1,i}(x) = A'_{m,i}(x) - (i+1)\frac{A_{m,i}(x)}{x - x'_{p+1-i}} + i\frac{A_{m,i-1}(x)}{x - x'_{p+2-i}}$$
$$i = 0, 1, \ldots, m+1, \quad [A_{m,1}(x) = A_{m,m+1}(x) = 0]. \tag{67}$$

28. Pentru a găsi forma explicită a polinoamelor $A_{m,i}(x)$ vom mai introduce câteva notații utile. Punem

$$l_0(x) = 1, \quad l_i(x) = (x - x'_1)(x - x'_2), \ldots, (x - x'_i), \quad i = 1, 2, \ldots, p+1.$$

Avem atunci $l_{p+1}(x) = l(x)$ și

$$l_{i+1}(x) = (x - x'_{i+1})\, l_i(x), \quad i = 0, 1, \ldots, p. \tag{68}$$

Dacă, pentru simplificarea scrierii, convenim să punem

$$l_{i,\alpha}(x) = \frac{1}{(i-\alpha)!}\, l_i^{(i-\alpha)}(x), \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, i, \tag{69}$$

din (68) deducem imediat relațiile

$$l_{i+1,\alpha+1}(x) = l_{i,\alpha+1}(x) + (x - x'_{i+1})\, l_{i,\alpha}(x) \tag{70}$$

$$l_{i,\alpha}^{(\beta)}(x) = \frac{(i-\alpha+\beta)!}{(i-\alpha)!}\, l_{i,\alpha-\beta}(x). \tag{71}$$

In calcule se ia totdeauna $l_{i,\alpha}(x) = 0$, dacă $\alpha < 0$ sau $\alpha > i$.
Nodurile (6) le putem scrie sub forma

$$x'_i = x_0 + h_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p+1 \tag{72}$$

atunci $h_1, h_2, \ldots, h_{p+1}$ sunt *abaterile* nodurilor respective de la punctul de derivare x_0.

Vom nota cu H_i, $i = 0, 1, \ldots, p+1$ ($H_0 = 1$) polinoamele simetrice fundamentale ale abaterilor h_i, $i = 1, 2, \ldots, p+1$ și vom pune totdeauna $H_i = 0$, dacă $i < 0$ sau $i > p+1$. De asemenea, vom nota cu $H_{i,\alpha}$, $\alpha = 0, 1, \ldots, i$ polinoamele simetrice fundamentale ale primelor i abateri $h_1, h_2, \ldots, h_i$ ($H_{i,0} = 1$, $(i \geqq 0)$ și $H_{i,\alpha} = 0$ pentru $\alpha < 0$ și $\alpha > i$). Avem atunci formulele $H_{p+1,\alpha} = H_\alpha$, $\alpha = 0, 1, \ldots, p+1$ și

$$l_{i,\alpha}(x_0) = (-1)^\alpha H_{i,\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, i, \; i = 0, 1, \ldots, p+1. \tag{73}$$

Având în vedere cele expuse mai sus vom demonstra că avem

$$A_{m,i}(x) = m!\,(x - x'_{p+1-i})\, l_{p-i,p-m}(x), \quad i = 0, 1, \ldots, m. \tag{74}$$

Pentru aceasta observăm că $A_{0,0}(x) = l(x) = (x - x'_{p+1})\, l_{p,p}(x)$ și deci pentru $m = 0$, formulele (74) sunt adevărate. Să presupunem că aceste formule sunt adevărate pentru m și să le demonstrăm pentru $m+1$. Ținând seama de (67) și (74), deducem

$$\begin{aligned} A_{m+1,i}(x) = m!\,[\, & l_{p-i,p-m}(x) + (x - x'_{p+1-i})\, l'_{p-i,p-m}(x) - \\ & - (i+1)\, l_{p-i,p-m}(x) + i l_{p-i+1,p-m}(x)]. \end{aligned} \tag{75}$$

Dar din (70), (71) rezultă că

$$l'_{p-i,p-m}(x) = (m - i + 1)\, l_{p-i,p-m-1}(x)$$

$$l_{p-i+1,p-m}(x) = l_{p-i,p-m}(x) + (x - x'_{p+1-i})\, l_{p-i,p-m}(x)$$

și înlocuind în (75), găsim

$$A_{m+1,i}(x) = (m+1)!\,(x - x'_{p+1-i})\, l_{p-i,p-m-1}(x), \quad i = 0, 1, \ldots, m+1$$

care arată că formulele (74) sunt generale.

29. Aplicând formulei (63) formula de transformare a lui Abel, avem

$$R^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^{m-1}\left[\sum_{\alpha=1}^{m-i} A_{m,\,i+\alpha}(x)\right]\Big\{[\underbrace{x, x, \ldots, x}_{i+2}, x_1', x_2', \ldots, x_{p-i}'; f] - \tag{76}$$

$$-[\underbrace{x, x, \ldots, x}_{i+1}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1-i}'; f]\Big\} + \left[\sum_{i=0}^{m} A_{m,i}(x)\right][x, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}; f].$$

Dacă, însă, în formula (63) punem $f(x) = x^{p+1}$ și ținem seamă de (30) deducem

$$\sum_{i=0}^{m} A_{m,i}(x) = l^{(m)}(x). \tag{77}$$

Observăm că din (70), (74) rezultă

$$\sum_{\alpha=1}^{m-i} A_{m,\,i+\alpha}(x) = m! \sum_{\alpha=1}^{m-i}[l_{p+1-i-\alpha,\,p-m+1}(x) - l_{p+i-\alpha,\,p-m+1}(x)] =$$

$$= m!\, l_{p-i,\,p-m+1}(x).$$

Ținând seama de formula de recurență (66) și de (77), formula (76) devine

$$R^{(m)}(x) = m\sum_{i=0}^{m-1} A_{m-1,\,i}(x)\,[\underbrace{x, x, \ldots, x}_{i+2}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1-i}'; f] + \tag{78}$$

$$+ l^{(m)}(x)[x, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f].$$

Formulele (63), (78) subsistă, bineînțeles, oricare ar fi x (și dacă x coincide cu unul din nodurile x_i').

30. Numerele $A_{m,i}(x)$, $i=0, 1, \ldots, m$ nu pot fi toate nule. In cazul contrar, am avea $R[f] = 0$, oricare ar fi funcția $f(x)$, ceea ce este în contrazicere cu faptul că formula (57) are, pe baza ipotezelor făcute la punctul 2, un grad de exactitate determinat. Cel puțin unul dintre numerele $A_{m,i}(x)$, $i=0, 1, \ldots, m$ este diferit de zero. Rezultatul acesta, precum și cele ce urmează, subsistă dacă lărgim puțin ipotezele dela punctul 2. Putem să presupunem, mai general, că x_0 poate coincide și cu un nod. Trebue să presupunem însă atunci că

$$m \geqq r_i \text{ dacă } x_0 = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{79}$$

Dacă $x_0 = x_i$ și $m < r_i$ restul formulei (57) este nul oricare ar fi funcția $f(x)$.

Să presupunem că numerele $A_{m,i}(x_0)$ sunt toate de același semn[1]). Atunci, din observația de mai sus și din (77), rezultă că $l^{(m)}(x_0) \neq 0$. Prin urmare, gradul de exactitate al formulei (57) este p. Pentru fixarea ideilor să presupunem că

$$A_{m,j}(x_0) \neq 0. \tag{80}$$

Din formula (74) rezultă atunci că

$$x_0 \neq x_{p+1-j}'. \tag{81}$$

[1]) Vezi trimiterea [1]), dela pagina 75.

Dacă acum $f(x)$ este o funcție convexă de ordinul p, avem

$$[\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{i+1}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1-i}'; f] \geqq 0, \quad i = 0,1, \ldots, m. \tag{82}$$

Dar, o funcție convexă de ordinul p ($\geqq 0$) se bucură de proprietatea că diferențele divizate de ordinul $p+1$ ale sale, pe noduri nu toate confundate, sunt pozitive. Din (81) rezultă deci că

$$[\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{j+1}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1-j}'; f] > 0. \tag{83}$$

Din formulele (74), (80), (82), (83) rezultă atunci că avem $R[f] \neq 0$.

Pe baza criteriului C putem dar enunța teorema următoare:

Teorema 12. *Dacă numerele* $A_{m,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ *sunt toate de același semn, gradul de exactitate al formulei* (57) *este* p *și restul este de formă simplă.*

In condițiile teoremei, restul este deci de forma

$$R = l^{(m)}(x_0)\, D_{p+1}[f].$$

Dacă presupunem că $l^{(m)}(x_0) = 0$, o demonstrație absolut analoagă bazată pe formula (78), ne permite să enunțăm

Teorema 13. *Dacă* $l^{(m)}(x_0) = 0$ *și dacă numerele* $A_{m-1,i}(x_0)$, $i=0,1, \ldots, m-1$ *sunt de același semn, gradul de exactitate al formulei* (57) *este egal cu* $p+1$ *și restul este de formă simplă.*

In condițiile teoremei restul este de forma

$$R = m\; l^{(m-1)}(x_0)\, D_{p+2}[f]$$

deoarece din (62) deducem

$$R[x^{p+2}] = m\; l^{(m-1)}(x_0).$$

Teoremele 12, 13 sunt valabile în ipoteza (79). Intr'adevăr, dacă $r_i \leqq m$ și $x_0 = x_i$, egalitățile $l^{(m)}(x_0) = 0$ și $l^{(m-1)}(x_0) = 0$ sunt incompatibile pe baza lemei 1.

31. Să considerăm acum cazul general al formulei (E). Vom arăta cum se poate reduce acest caz la cazul $r = 0$.

Dacă considerăm polinomul de gradul $r-1$

$$L(x) = L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}; f \mid x) \tag{84}$$

și dacă ținem seama de formulele (28), (29), deducem

$$\frac{f(x) - L(x)}{(x-x_0)^r} = [\underbrace{x, x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}; f]. \tag{85}$$

Aplicând acum formula

$$L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f \mid x) =$$

$$= l(x) L\left(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}; \frac{f(x)}{l(x)} \mid x\right) + (x - x_0)^r L\left(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; \frac{f(x)}{(x-x_0)^r} \mid x\right) \tag{86}$$

funcției $f(x) - L(x)$ și ținând seama de relațiile

$$L\left(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}; \frac{f(x) - L(x)}{(x - x_0)^r} \mid x\right) = 0$$

$$L\left(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f(x) - L(x) \mid x\right) =$$

$$= L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f \mid x) - L(x)$$

deducem

$$L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f \mid x) =$$

$$= L(x) + (x - x_0)^r L(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; [x, \underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}; f] \mid x)$$

de unde

$$L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f \mid x_0) =$$

$$= \frac{(m+r)!}{m!} L^{(m)}(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; [x, \underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}; f] \mid x_0). \tag{87}$$

Dar, din (85) rezultă și

$$f^{(m+r)}(x_0) = \frac{(m+r)!}{m!} [x, \underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}]^{(m)}_{x=x_0}. \tag{88}$$

Să notăm cu $R[f]$ restul formulei (E) și cu $R_1[f]$ restul formulei (57). Avem atunci, ținând seama de (87) și (88),

$$R[f] = \frac{(m+r)!}{m!} R_1\left[[x, \underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}; f]\right] \tag{89}$$

iar formula (E) se poate scrie

$$f^{(m+r)}(x_0) = \frac{(m+r)!}{m!} L^{(m)}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}; [x, \underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}; f] \mid x_0) + \tag{90}$$

$$+ \frac{(m+r)!}{m!} R_1\big[[x, \underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}; f]\big].$$

32. Pentru a merge mai departe, vom demonstra mai întâi

Lema 4. *Dacă funcţionala aditivă şi omogenă* $R_1[f]$ *este de grad de exactitate* n $(\geqq 0)$ *şi de formă simplă, atunci funcţionala aditivă şi omogenă*

$$R[f] = K \cdot R_1\big[[x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f]\big] \tag{91}$$

unde $K \neq 0$ *este o constantă* (independentă de funcţia $f(x)$) *şi* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *sunt* k *puncte fixe, este de gradul de exactitate* $n + k$ *şi este de formă simplă.*

Demonstraţia se face cu uşurinţă. Avem $[x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; x^i] = 0$, pentru $i = 0, 1, \ldots, k-1$, iar pentru $i \geqq k$ această diferenţă divizată este un polinom de gradul $i - k$, cu primul coeficient 1, deci

$$[x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; x^i] = x^{i-k} + \ldots$$

De aici rezultă proprietatea relativă la gradul de exactitate.

Să presupunem acum că $f(x)$ este o funcţie convexă de ordinul $n + k$. Spunem atunci că funcţia de $x\,[x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f]$ este convexă de ordinul n. Într'adevăr, avem

$$\big[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+2}; [x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f]\big] = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+2}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k; f] > 0$$

dacă nodurile nu sunt toate confundate. Egalitatea (91) ne arată că $R[f] \neq 0$, pentru orice funcţie $f(x)$ convexă de ordinul $n + k$, deoarece $R_1[\varphi] \neq 0$ pentru orice funcţie $\varphi(x)$ convexă de ordinul n, deci în particular, $R_1\big[[x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k; f]\big] \neq 0$.

Lema 4 este complet demonstrată.

Ţinând seama de formula (89), din teoremele 12, 13 deducem, bazându-ne pe lema precedentă

Teorema 14. *Dacă* $r \geqq 0$ *este întreg şi dacă numerele* $A_{m,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ *sunt de acelaşi semn, formula de derivare numerică* (E) *are gradul de exactitate* $p + r$ *şi restul de formă simplă.*

Pe baza formulei (12) restul se scrie atunci

$$R = \frac{(m+r)!}{m!} l^{(m)}(x_0)\, D_{p+r+1}[f]. \tag{92}$$

Teorema 15. *Dacă* $r \geqq 0$ *este întreg, dacă* $l^{(m)}(x_0) = 0$ *şi dacă numerele* $A_{m-1,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$ *sunt de acelaşi semn, formula de derivare numerică* (E) *are gradul de exactitate* $p + r + 1$ *şi restul de formă simplă.*

Pe baza formulelor (12) restul se scrie atunci

$$R = \frac{(m+r)!}{(m-1)!} l^{(m-1)}(x_0)\, D_{p+r+2}[f].$$

Teoremele 14, 15 sunt valabile în ipoteza exprimată de relația (79).

33. Din cele spuse rezultă că formula (E) are cu siguranță restul de formă simplă dacă $m = 0$. Formula (E) pentru $m = 0$ are gradul de exactitate $p + r$ și restul

$$R = l(x_0)\, D_{p+r+1}[f]$$

în ipotezele dela punctul 2. In aceleași condiții, formula (E) are gradul de exactitate $p + r + 1$ și restul

$$R = l(x_0)\, D_{p+r+2}[f]$$

dacă $m = 1$ și x_0 este o rădăcină, diferită de noduri, a lui $l'(x)$.

Condiția impusă numerelor $A_{m,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, respectiv numerelor $A_{m-1,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, este suficientă pentru ca formula (E) să aibă restul de formă simplă. Formarea numerelor $A_{m,i}(x_0)$ depinde de ordinea în care sunt luate nodurile (6). Mai precis, un sistem de numere $A_{m,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ este caracterizat de ordinea în care sunt luate nodurile (6). Pentru ca formula (E) să fie de grad de exactitate $p + r$ și să aibă restul de formă simplă, este suficient ca unul din aceste sisteme să fie format din numere de același semn. Nu examinăm aici necesitatea acestei condiții în general. Rezultă însă din § 4 că în cazul $m = 1$ condiția este și necesară.

§ 4. Asupra câtorva aplicații ale rezultatelor precedente

Vom face aplicații ale formulelor precedente la următoarele 3 exemple:

34. *Exemplul 1.* Punctul de derivare x_0 este înafara celui mai mic interval deschis care conține nodurile (2).

Dacă presupunem că, mai general, ipoteza exprimată de condiția (79) este îndeplinită, avem

$$l^{(m)}(x_0) \neq 0, \tag{93}$$

deci formula (E) este de grad de exactitate $p + r$ și, în particular, nu este niciodată excepțională. Intr'adevăr, rădăcinile lui $l^{(m)}(x)$ aparțin celui mai mic interval închis care conține nodurile (2). Dacă x_0 nu aparține acestui interval, (93) este demonstrat. Să presupunem că x_0 coincide cu un nod extrem x_i. In acest caz $l^{(\alpha)}(x_i) \neq 0$ pentru $\alpha \geqq r_i$. Dar $m \geqq r_i$, pe baza ipotezei (79), așa că (93) rezultă și de data aceasta.

Abaterile [1]) h_i, $i = 1, 2, \ldots, p + 1$ ale nodurilor de punctul de derivare sunt în acest caz de același semn și anume nepozitive, respectiv nenegative, după cum

$$x_0 \geqq x_i', \; i = 1, 2, \ldots, p+1, \text{ respectiv } x_0 \leqq x_i', \; i = 1, 2, \ldots, p+1.$$

Formula (73) ne arată atunci că

$$l_{\alpha,\gamma}(x_0) = (-1)^{\gamma} H_{\alpha,\gamma} \geqq 0, \text{ respectiv } (-1)^{\gamma}\, l_{\alpha,\gamma}(x_0) = H_{\alpha,\gamma} \geqq 0,$$

oricare ar fi α și γ.

[1]) Vezi punctul 28.

Ţinând seama de formulele (74), avem atunci respectiv,

$$A_{m,i}(x_0) = (-1)^{p-m+1} m!\, h_{p+1-i} H_{p-i,p-m} \geqq 0,\ i = 0, 1, \ldots, m,$$

$$(-1)^{p-m+1} A_{m,i}(x_0) = m!\, h_{p+1-i} H_{p-i,p-m} \geqq 0,\ i = 0, 1, \ldots, m.$$

Toate ipotezele în care a fost stabilită teorema 14 sunt deci îndeplinite şi putem enunţa

T e o r e m a 16. *Dacă* r $\geqq 0$ *este întreg,* m *satisface condiţia exprimată de* (79) *iar* x_0 *este în afara celui mai mic interval deschis care conţine nodurile* (2), *avem formula de derivare numerică* (E), *cu gradul de exactitate* p + r *şi cu restul de forma* (92).

Ipotezele în care teorema este adevărată cer ca în cazul când $s = 1$, punctul x_0 să fie diferit de noduri.

35. *Exemplul 2.* Nodurile (2) sunt simetric distribuite faţă de punctul de derivare x_0. Pentru a simplifica limbajul vom spune, în acest caz, că formula (E) este o *formulă simetrică.*

In cazul simetric, putem să presupunem că punctul de derivare x_0 este diferit de noduri, deci că abaterile h^i sunt diferite de zero. Numărul nodurilor este atunci par şi egal cu $2q = p + 1$, unde $q > 0$. Pentru mai multă claritate vom nota cu $\pm t_i$, $i = 1, 2, \ldots, q$ abaterile, unde $t_1, t_2, \ldots, t_q$ sunt q numere pozitive (distincte sau nu). Vom nota cu T_i, $i = 0, 1, \ldots, q$ polinoamele simetrice fundamentale ale numerelor $t_1^2, t_2^2, \ldots, t_q^2$ ($T_0 = 1$, $T_i = 0$, pentru $i < 0$ şi pentru $i > q$). Vom nota de asemenea cu $T_{i,\alpha}, \alpha = 0, 1, \ldots, i$ polinoamele simetrice fundamentale ale numerelor $t_1^2, t_2^2, \ldots, t_i^2$ ($T_{i,0} = 1$, $T_{i,\alpha} = 0$, pentru $\alpha < 0$ şi pentru $\alpha > i$). Avem atunci $T_{q,i} = T_i$, $i = 0, 1, \ldots, q$.

Avem

$$l^{(m)}(x_0) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m \text{ este impar} \\ (-1)^{\frac{m}{2}} m!\, T_{q-\frac{m}{2}} & \text{dacă } m \text{ este par.} \end{cases}$$

Rezultă că $l^{(m)}(x_0) \neq 0$ sau $= 0$, după cum m este par sau impar. Formula (E) este în acest caz excepţională dacă $r > 0$, iar rezultatele dela punctul 11 ne arată că este destul să considerăm numai cazul când m este par, cazul m impar reducându-se la acesta prin modificarea numărului r.

In cazul când indicele de derivare m este par, îl vom nota cu 2μ, deci $m = 2\mu$, unde $0 \leqq \mu < q$.

Să luăm acum nodurile în ordinea următoare:

$$x_0 - t_1,\ x_0 + t_1,\ x_0 - t_2,\ x_0 + t_2, \ldots, x_0 - t_q,\ x_0 + t_q.$$

Avem, aşa dar [1])

$$h_\alpha = x'_\alpha - x_0 = (-1)^\alpha t_{\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]},\quad \alpha = 1, 2, \ldots, 2q. \tag{94}$$

Pentru a calcula numerele $A_{2\mu,i}(x_0)$ vom calcula întâi numerele (73) corespunzătoare, unde $H_{i,\alpha}$ corespund la abaterile (94).

[1]) $[z]$ însemnează cel mai mare întreg cuprins în z.

Dacă α este par, $H_{\alpha,\gamma}$, $\gamma = 0, 1, \ldots, \alpha$ sunt polinoamele simetrice fundamentale ale numerelor $\pm t_i$, $i = 1, 2, \ldots, \frac{\alpha}{2}$. Un calcul elementar ne arată că

$$H_{\alpha,\gamma} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \gamma \text{ este impar} \\ (-1)^{\frac{\gamma}{2}} T_{\frac{\alpha}{2}, \frac{\gamma}{2}}, & \text{dacă } \gamma \text{ este par.} \end{cases} \quad (\alpha \text{ par}) \qquad (95)$$

Dacă α este impar $H_{\alpha,\gamma}$, $\gamma = 0, 1, \ldots, \alpha$ sunt polinoamele simetrice fundamentale ale numerelor $\pm t_i$, $i = 1, 2, \ldots, \frac{\alpha-1}{2}$ și $t_{\frac{\alpha+1}{2}}$. Formulele (70), (73) împreună cu (94), (95) ne dau

$$H_{\alpha,\gamma} = \begin{cases} (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} t_{\frac{\alpha+1}{2}} T_{\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\gamma-1}{2}}, & \text{dacă } \gamma \text{ este impar} \\ (-1)^{\frac{\gamma}{2}} T_{\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\gamma}{2}}, & \text{dacă } \gamma \text{ este par.} \end{cases} \quad (\alpha \text{ impar})$$

Formulele (74) ne arată că avem

$$A_{2\mu,i}(x_0) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \text{ este impar} \\ (-1)^{q-\mu}(2\mu)!\, t^2_{q-\frac{i}{2}} T_{q-1-\frac{i}{2}, q-\mu-1}, & \text{dacă } i \text{ este par.} \end{cases}$$

Se vede dar că avem

$$(-1)^{q-\mu} A_{2\mu,i}(x_0) \geqq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, 2q$$

și deci că toate condițiile teoremei 14 sunt îndeplinite. Putem dar enunța

T e o r e m a 17. *Dacă* $r \geqq 0$ *este un număr întreg, dacă* μ *este un număr întreg, astfel ca* $0 \leqq \mu < q$, *iar* $t_1, t_2, \ldots, t_q$, $q \geqq 1$ *numere pozitive, avem formula de derivare numerică* [1])

$$f^{(2\mu+r)}(x_0) = L^{(2\mu+r)}(x_0, \underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_0 \pm t_1, x_0 \pm t_2, \ldots, x_0 \pm t_q ; f|x_0) +$$

$$+ (-1)^{q-\mu}(2\mu + r)!\, T_{q-\mu} D_{2q+r}[f]$$

de gradul de exactitate $2q + r - 1$.

36. *Exemplul 3.* Indicele de derivare m este egal cu 1.

Pentru a examina acest caz, vom presupune că nodurile (2), deci și (6), sunt în ordine nedescrescătoare, deci

$$x'_1 \leqq x'_2 \leqq \ldots \leqq x'_{p+1}$$

precum și

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_s. \qquad (96)$$

[1]) Pentru simplificarea notațiilor în polinomul de interpolare și în diferența divizată, notăm cu $x_0 \pm t_i$ cele două noduri simetrice $x_0 - t_i$, $x_0 + t_i$.

Condiția $m = 1$ implică $p \geqq 1$. Vom presupune $s > 1$, deci că nodurile nu sunt toate confundate. In cazul contrar revenim de altfel la exemplul 1 studiat mai sus, care epuizează atunci problema.

Pentru simplificare, să notăm cu $\varphi(x)$ polinomul $l_p(x)$. Avem deci

$$\varphi(x) = (x - x'_{p+1})\,\varphi(x) \tag{97}$$

și

$$A_{1,0}(x) = (x - x'_{p+1})\,\varphi'(x), \quad A_{1,1}(x) = \varphi(x)$$

de unde

$$A_{1,0}(x)\,A_{1,1}(x) = l(x)\,\varphi'(x)$$

dacă polinoamele $A_{1,0}(x)$, $A_{1,1}(x)$ sunt construite luând nodurile în ordinea (6).

Condiția ca aceste polinoame să fie de același semn devine deci

$$l(x)\,\varphi'(x) \geqq 0. \tag{98}$$

In mod analog, dacă punem

$$l(x) = (x - x'_1)\,\psi(x)$$

deci

$$\psi(x) = (x - x'_2)(x - x'_3)\ldots(x - x'_{p+1})$$

și dacă formăm polinoamele $A_{1,0}(x)$, $A_{1,1}(x)$ luând nodurile în ordinea inversă $x'_{p+1}, x'_p, \ldots, x'_1$, condiția ca aceste polinoame să fie de același semn este ca

$$l(x)\,\psi'(x) \geqq 0. \tag{99}$$

Ipoteza exprimată prin condiția (79) revine aici la faptul că x_0 nu coincide cu un nod care nu este simplu.

Ambele inegalități (98), (99) sunt verificate pentru $x = x_0$, dacă x_0 coincide cu un nod sau dacă x_0 este înafară de cel mai mic interval care conține nodurile. Suntem atunci în cazul exemplului 1 de mai sus.

Dacă avem

$$\varphi'(x)\,\psi'(x) \leqq 0 \tag{100}$$

una din inegalitățile (98), (99) este verificată pentru $x = x_0$. Dacă deci, în acest caz, x_0 nu coincide cu un nod care nu este simplu, formula noastră are gradul de exactitate $p + r$ și restul de formă simplă. Va fi deci destul să examinăm punctul x_0 din intervalul deschis (x_1, x_s), pentru care inegalitatea (100) nu este verificată. Dacă în plus, în acest caz, gradul de exactitate este $p+r$, vom vedea că restul nu este simplu.

37. Pentru a arăta acest lucru, ne vom baza pe criteriul C și vom demonstra mai întâi

Lema 5. *Dacă* $x_0 \in (x_1, x_s)$ *și dacă*

$$\varphi'(x_0)\,\psi'(x_0) > 0 \tag{101}$$

putem găsi o funcție convexă $f(x)$ *de ordinul* $p + r$ *în intervalul* $[x_1, x_s]$, *astfel ca să avem* $R[f] = 0$.

Să presupunem condiția (79) îndeplinită.

Pe baza lemei 3, este destul să putem construi două funcții $f_1(x)$, $f_2(x)$ neconcave de ordinul $p+r$, astfel ca inegalitatea (32) să fie verificată. Pentru aceasta, să considerăm funcțiile

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x \in [x_1, \lambda] \\ (x-\lambda)^{p+r}, & \text{pentru } x \in [\lambda, x_s] \end{cases} \tag{102}$$

definite pentru $\lambda \in [x_1, x_s]$.

Funcția $\varphi_\lambda(x)$ este neconcavă de ordinul $p+r$ în $[x_1, x_s]$. Dacă privim pe λ ca variabil, $R[\varphi_\lambda]$ este un polinom de gradul $p+r$ în raport cu $x-\lambda$, în orice interval care nu conține pe x_0 și nodurile.

Avem formula

$$\begin{aligned} R[\varphi_\lambda] = (x_0 - x_s)\,\varphi'(x_0)[\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r+1}, x_1', x_2', \ldots, x_p'; \varphi_\lambda] + \\ + \varphi(x_0)[\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r+2}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; \varphi_\lambda]. \end{aligned} \tag{103}$$

Dacă presupunem $x_{s-1} < \lambda < x_s$ și $x_s < \lambda$, atunci se vede că $R[\varphi_\lambda]$ este un polinom în $x_s - \lambda$, care se divide cu $(x_s-\lambda)^{p+r-r_s+1}$ și coeficienții acestei puteri a lui $x_s - \lambda$ provin numai din primul termen al membrului al doilea al formulei (103). Avem însă atunci

$$\begin{aligned} [\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r+1}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; \varphi_\lambda] = \\ = \left[\underbrace{x_s, x_s, \ldots, x_s}_{r_s}; \frac{(x-\lambda)^{p+r}}{(x-x_0)^{r+1} k_s(x)}\right] = \\ = \frac{1}{(r_s-1)!}\left[\frac{(x-\lambda)^{p+r}}{(x-x_0)^{r+1} k_s(x)}\right]^{(r_s-1)}_{x=x_s} \end{aligned}$$

polinomul $k_s(x)$ fiind dat de $l(x) = (x-x_0)^{r_s} k_s(x)$.

Făcând calculele găsim

$$R[\varphi_\lambda] = (x_s-\lambda)^{p+r-r_s+1}\left[\binom{p+r}{r_s-1}\frac{(x_0-x_s)\,\varphi'(x_0)}{(x-x_0)^{r+1} k_s(x_s)} + \cdots\right]$$

termenii nescriși fiind divizibili cu $x_s - \lambda$.

De aici se vede că, dacă λ este suficient de aproape de x_s avem $R[\varphi_\lambda] \neq 0$, și mai precis [1])

$$\operatorname{sg} R[\varphi_\lambda] = -\operatorname{sg} \varphi'(x_0). \tag{104}$$

---

[1]) Punem $\operatorname{sg} z = -1, 0, 1$, după cum $z < 0$, $z = 0$, $z > 0$. Avem relația fundamentală $\operatorname{sg} z_1 z_2 = \operatorname{sg} z_1 \cdot \operatorname{sg} z_2$.

Funcția $\psi_\lambda(x) = \varphi_\lambda(x) - (x-\lambda)^{p+r}$ este de asemenea neconcavă de ordinul $p+r$. Dacă presupunem $\lambda < x_0$, $\lambda \in (x_1, x_2)$ și folosim formula

$$R[\psi_\lambda] = (x_0 - x_1)\,\varphi'(x_0)\,[\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r+1}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; \psi_\lambda] +$$

$$+ \psi(x_0)\,[\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r+2}, x_2', x_3', \ldots, x_{p+1}'; \psi_\lambda]$$

găsim, ca mai sus, că polinomul $R[\psi_\lambda]$ în $x_1 - \lambda$ este de forma

$$R[\psi_\lambda] = -(x_1-\lambda)^{p+r-r_1+1}\left[\binom{p+r}{r_1-1}\frac{(x_0-x_1)\,\psi'(x_0)}{(x_1-x_0)^{r+1}\,k_1(x_1)} + \ldots\right]$$

unde polinomul $k_1(x)$ este dat de $l(x) = (x-x_1)^{r_1}k_1(x)$, iar termenii nescriși se divid cu $x_1 - \lambda$. De aici se vede că, dacă λ este suficient de aproape de x_1, avem $R[\psi_\lambda] \neq 0$, și mai precis

$$\operatorname{sg} R[\psi_\lambda] = \operatorname{sg} \psi'(x_0). \tag{105}$$

Formulele (104), (105) au fost deduse pe lângă ipotezele $\varphi'(x_0) \neq 0$, $\psi'(x_0) \neq 0$.

Să considerăm acum funcțiile

$$f_1(x) = \varphi_{\lambda_s}(x), \quad f_2(x) = \psi_{\lambda_1}(x).$$

Atunci, dacă λ_1 este suficient de aproape de x_1 iar λ_s suficient de aproape de x_s, din (101), (104), (105), deducem

$$\operatorname{sg} R[f_1]\,R[f_2] = -\operatorname{sg}\varphi'(x_0)\,\psi'(x_0) = -1$$

și inegalitatea (32) este verificată.

Lema 5 este complet demonstrată.

Din cele ce preced rezultă că, dacă $m = 1$ și dacă x_0 nu coincide cu un nod care nu este simplu, formulele de derivare numerică (E) prezintă unul din următoarele 3 aspecte:

1°. Dacă $l'(x_0) = 0$, gradul de exactitate este $p+r+1$, cu restul de formă simplă.

2°. Dacă $x_0 \in (x_1, x_s)$, $l'(x_0) \neq 0$ și dacă inegalitatea (101) este verificată, gradul de exactitate este $p+r$, însă restul *nu este* de formă simplă.

3°. Pentru toate celelalte valori ale lui x_0, gradul de exactitate este $p+r$ și restul de formă simplă.

38. Putem determina cu mai multă precizie poziția punctului x_0 după cele trei cazuri semnalate.

Fie $y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}$ rădăcinile distincte de noduri, ale derivatei $l'(x)$. Aceste rădăcini sunt separate de nodurile (96) și putem presupune

$$x_j < y_j < x_{j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, s-1.$$

Polinomul $\varphi'(x)$ are $s-2$, respectiv $s-1$, rădăcini diferite de noduri după cum $r_s = 1$, respectiv $r_s > 1$. Să notăm aceste rădăcini, în ordinea lor crescătoare, prin $z_1', z_2', \ldots, z_{s-1}'$, unde z_{s-1}' nu există dacă $r_s = 1$. Avem atunci

$$x_j < z_j' < y_{j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, s-2$$

iar dacă $r_s > 1$, aceste inegalități au loc și pentru $j = s-1$.

Din proprietatea binecunoscută a variației rădăcinilor derivatei unui polinom cu toate rădăcinile reale [8], rezultă că

$$y_j < z_j', \quad j = 1, 2, \ldots, s-2 \tag{106}$$

inegalitate care are loc și pentru $j = s-1$, dacă $r_s > 1$.

Să punem acum, prin definiție, $z_{s-1}' = x_s$, dacă $r_s = 1$. Atunci, inegalitatea (106) este adevărată totdeauna și pentru $j = s-1$.

In intervalele dintre noduri, $\varphi'(x)$, deci și $l(x)\,\varphi'(x)$, schimbă de semn, trecând prin punctele $z_1', z_2', \ldots$ Dar, din (97) rezultă că

$$l(y_j)\,\varphi'(y_j) = -\varphi^2(y_j) < 0.$$

Rezultă deci, că inegalitatea (98) este verificată numai în intervalele

$$(-\infty, x_1], [z_1'. x_2], [z_2', x_3], \ldots, [z_{s-2}', x_{s-1}], [z_{s-1}', \infty).$$

Să notăm de asemenea cu $z_1'', z_2'', \ldots, z_{s-1}''$ rădăcinile, diferite de noduri, ale lui $\psi'(x)$, unde z_1'' nu există dacă $r_1 = 1$. Ca și mai sus, se vede că

$$x_j < z_j'' < y_j < x_{j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, s-1$$

inegalități care sunt adevărate totdeauna convenind a pune, prin definiție, $z_1'' = x_1$ dacă $r_1 = 1$.

Rezultă atunci, ca și mai sus, că inegalitatea (105) este verificată numai în intervalele

$$(-\infty, z_1''], [x_2, z_2''], [x_3, z_3''], \ldots, [x_{s-1}, z_{s-1}''], [x_s, \infty)$$

Din analiza precedentă rezultă în definitiv

Teorema 18. *Dacă* $r \geqq 0$ *este un număr întreg, dacă* x_0 *nu coincide cu un nod care nu este simplu și dacă* $m = 1$, *formula de derivare numerică* (*E*) *este*:

1°. *Cu gradul de exactitate* $p + r + 1$ *și cu restul de formă simplă, dacă* x_0 *coincide cu unul din punctele* $y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}$.

2°. *Cu gradul de exactitate* $p + r$ *și cu restul de formă simplă, dacă* x_0 *aparține unuia din intervalele*

$$(-\infty, z_1''], [z_{s-1}', \infty), [z_j', z_{j+1}''], \quad j = 1, 2, \ldots, s-2.$$

3°. *Cu gradul de exactitate* $p + r$, *însă cu rest diferit de forma simplă, dacă* x_0 *aparține unuia din intervalele*

$$(z_j'', y_j), (y_j, z_j'), \quad j = 1, 2, \ldots, s-1.$$

Restul, în cazurile 1^0 și 2^0 respectiv este

$$R = (r+1)!\, l(x_0)\, D_{p+r+2}[f], \quad R = (r+1)!\, l'(x_0)\, D_{p+r+1}[f].$$

Aceste rezultate au fost găsite, pe altă cale și sub o formă mai puțin generală, de G. D. Birkhoff [1].

39. Din rezultatele precedente se poate trage o concluzie asupra formulei (E) în cazul când $m = 2$. In acest caz, dacă $l''(x) = 0$ și numerele $A_{1,0}(x_0)$, $A_{1,1}(x_0)$ sunt de același semn, restul formulei este de formă simplă. Pentru realizarea condiției de semn va fi destul să demonstrăm următoarea lemă:

Lema 6. *Rădăcinile derivatei a doua* $l''(x)$ *a polinomului* $l(x)$ *sunt toate cuprinse în intervalele deschise*

$$(-\infty, z_1''), (z_{s-1}', \infty), (z_j', z_{j+1}''), \quad j = 1, 2, \ldots, s-2.$$

Demonstrația se face simplu, dacă ne bazăm pe felul cum variază rădăcinile derivatei când rădăcinile polinomului variază [8].

Să demonstrăm, de exemplu, că în intervalul $[y_j, z_j']$ polinomul $l''(x)$ nu se anulează. Acest lucru este evident dacă $j = s-1$ și $r_s = 1$, pentrucă atunci y_{s-1} este cea mai mare rădăcină a lui $l'(x)$ și această rădăcină este simplă. In celelalte cazuri observăm că $l''(y_j) \neq 0$ pentrucă y_j este rădăcina simplă a lui $l'(x)$, iar din (112) deducem

$$l''(z_j') = \varphi''(z_j')\,(z_j' - x_s) \neq 0$$

pentrucă atunci $z_j' \neq x_s$ iar $\varphi''(z_j') \neq 0$ deoarece z_j' este rădăcină simplă a lui $\varphi'(x)$.

In intervalul deschis (y_j, z_j'), polinomul $l''(x)$ poate avea cel mult o rădăcină pentrucă, altfel, $l'(x)$ ar trebui să aibă o rădăcină în acest interval, ceea ce este imposibil. Să presupunem că ar exista o rădăcină a lui $l''(x)$ în intervalul (y_j, z_j'). Această rădăcină s'ar menține în intervalul (y_j, z_j'), în timp ce primele $r_1 + r_2 + \ldots + r_j - 1$ noduri și ultimele $r_{j+1} + r_{j+2} + \ldots + r_s - 2$ noduri ar varia. Făcând pe primele să tindă către $-\infty$, iar pe ultimele către $+\infty$, vedem că proprietatea ar trebui să fie adevărată în cazul particular

$$p = 2, \; x_1 < x_2 \leq x_3, \quad j = 1 \tag{107}$$

pentrucă, în timpul acestei variații, y_j, z_j' rămân la distanță finită pe axa reală.

In cazul (107) avem însă $y_1 < z_1' = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ și rădăcina $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ a lui $l''(x)$ este mai mare decât z_1'. Proprietatea este demonstrată.

Polinomul $l''(x)$ nu se anulează deci în intervalele $[y_j, z_j']$ $j = 1, 2, \ldots, s-1$.

La fel se demonstrează că acest polinom nu se anulează în intervalele

$$[z_j'', y_j], \quad j = 1, 2, \ldots, s-1.$$

Lema 6 este complet demonstrată.

Deducem prin urmare

Teorema 19. *Dacă* $r \geq 0$ *este un număr întreg, dacă* x_0 *nu coincide cu un nod care nu este simplu și dacă* $m = 2$, $l''(x_0) = 0$, *formula de derivare numerică* (E) *are gradul de exactitate* $p + r + 1$ *și restul de formă simplă.*

Restul formulei este

$$R = (r+2)!\, l'(x_0)\, D_{p+r+2}[f].$$

§ 5. Asupra câtorva formule explicite de derivare numerică

Utilizarea practică a formulelor de derivare numerică (E) depinde în mare măsură de forma explicită sub care se pune derivata respectivă a polinomului de interpolare. Rapiditatea și precizia calculului numeric efectiv depind de această formă explicită. De asemenea, utilizarea eventuală a tablelor numerice și a mașinilor de calcul necesită un studiu amănunțit al acestor forme explicite. Problema aceasta are o foarte vastă literatură. Ne limităm aici să citâm cercetările lui S. E. Micheladze [4] și J. F. Steffensen [10].

Vom examina două feluri de astfel de forme explicite:

1°. Formule de derivare numerică fără diferențe.

2°. Formule de derivare numerică cu diferențe.

In această lucrare ne interesează mai ales să dăm o completare a rezultatelor din §§ precedente. Intr'o lucrare următoare vom relua și alte exemple importante.

Formule fără diferențe

40. Formulele de derivare numerică de exactitate maximă se pot clasifica după valorile numerelor $p, m, r, r_1, r_2, \ldots, r_s$ care intră în caracteristicele acestei formule, precum și după natura lor particulară, ca de exemplu: gradul de exactitate, reductibilitate, excepționalitate, simetrie. In particular, formulele simetrice prezintă un interes deosebit și studiul acestora a fost reluat în ultimul timp de către S. E. Micheladze [4].

Vom presupune totdeuna $m \leqq p$.

Făcând abstracție de valorile nodurilor și de ordinea lor de mărime mutuală, unui sistem de valori ale lui p, m, r îi corespund atâtea *tipuri* de formule în câte feluri putem alege ordinele de multiplicitate $r_1, r_2, \ldots, r^s$ cu suma egală cu $p+1$. Acest număr este egal cu numărul Ω_{p+1} al soluțiilor în numere întregi nenegative $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$ ale ecuației diophantiene

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + p\alpha_p + (p+1)\alpha_{p+1} = p+1.$$

Deoarece m ia valorile $0, 1, \ldots, p$, numărul formulelor pentru p și r dați va fi $(p+1)\Omega_{p+1}$.

Rezultă că numărul formulelor (E) cu gradul de exactitate e ($\geqq 0$) și neexcepționale (generale) este egal cu

$$\Omega_1 + 2\Omega_2 + 3\Omega_3 + \ldots + (e+1)\Omega_{e+1}.$$

Pentru enumerarea formulelor (E) excepționale, este suficient, pe baza rezultatelor dela punctul 10, să considerăm numai acele formule excepționale care provin din mărirea gradului de exactitate cu o unitate[1]). Numărul acestor formule pentru p, r dați este $p(\Omega_{p+1}-1)$, deoarece astfel de formule nu pot exista pentru $s=1$ și pentru $m=0$. In schimb, pentru $s>1$ și $m>0$, pe baza inegalităților (24), există astfel de formule. Pentru p, r, m dați (și $s>1$) aceste

[1]) Formule prezentând aspectul 1° (punctul 10).

formule nu dispar decât pentru poziții mutuale particulare ale nodurilor. In enumerarea formulelor excepționale nu facem distincție între diferitele rădăcini, distincte de noduri, ale polinomului $l^{(m)}(x)$. Rezultă atunci că numărul formulelor excepționale cu gradul de exactitate e (≥ 2) este

$$\Omega_2 + 2\Omega_3 + 3\Omega_4 + \ldots + (e-1)\Omega_e - \frac{e(e-1)}{2}.$$

Pentru enumerarea formulelor simetrice, luăm $p = 2q-1$, $q > 0$. Am văzut că putem presupune $m = 2\mu$. Pentru q, r, μ dați vor exista Ω_q tipuri de astfel de formule. Pentru q, r dați vom avea deci $q\Omega_q$ astfel de formule. In fine, gradul de exactitate al formulei fiind $2q + r - 1$, numărul formulelor simetrice și cu gradul de exactitate e (≥ 1) este

$$\Omega_1 + 2\Omega_2 + 3\Omega_3 + \ldots + \left[\frac{e+1}{2}\right]\Omega_{\left[\frac{e+1}{2}\right]}.$$

Dacă e este par, toate aceste formule sunt excepționale. Dacă însă e este impar pentru $r = 0$, formulele nu sunt excepționale. Deci, în acest caz, $\frac{e+1}{2}\Omega_{\frac{e+1}{2}}$ dintre aceste formule sunt neexcepționale.

Pentru enumerarea formulelor reductibile deosebim două cazuri. Unele cu toate nodurile confundate ($r = 0$, $s = 1$). Pentru un p dat există p astfel de formule, corespunzând valorilor $1, 2, \ldots, p$ ale lui m. Gradul lor de exactitate este p; există, deci, e astfel de formule de grad de exactitate e (≥ 1). Celelalte formule reductibile au două noduri distincte ($r = 0$, $s = 2$), care pot prezenta $\left[\frac{p+1}{2}\right]$ tipuri diferite. Dintre acestea însă, numai la $\left[\frac{p+1}{2}\right] - 1$ pot corespunde formule reductibile, pentrucă dacă $r_1 = 1$, $r_2 = p$, polinomul (27) are toate rădăcinile confundate. De asemenea, m nu poate lua decât valorile $2, 3, \ldots, p-1$. Pentru un p (≥ 3) dat, avem deci $(p-2)\left(\left[\frac{p+1}{2}\right] - 1\right)$ astfel de formule. Aceste formule fiind neexcepționale, există $(e-2)\left(\left[\frac{e+1}{2}\right] - 1\right)$ astfel de formule cu gradul de exactitate e (≥ 3).

Tabloul următor rezumă discuția de mai sus relativ la numărul formulelor de exactitate maximă, după natura lor specificată, dela gradul de exactitate 0 până la gradul de exactitate 5 inclusiv.

Ținem seamă de următoarele valori ale numerelor,

$$\Omega_1 = 1, \quad \Omega_2 = 2, \quad \Omega_3 = 3, \quad \Omega_4 = 5, \quad \Omega_5 = 7, \quad \Omega_6 = 11.$$

Gradul de exactitate	Numărul formulelor							
	Reductibile			Neexcepţionale	Excepţionale	Simetrice		
	$s=1$	$s=2$	Total	$l^{(m)}(x_0)\neq 0$	$l^{(m)}(x_0)=0$	Neex.	Ex.	Total
0	—	—	—	1	—	—	—	—
1	1	—	1	5	—	1	—	1
2	2	—	2	14	1	—	1	1
3	3	1	4	34	5	4	1	5
4	4	2	6	69	17	—	5	5
5	5	6	11	135	41	9	5	14

41. Pentru a obţine formulele de exactitate maximă, putem pleca dela cazul $r=0$, $s=p+1$. Această din urmă condiţie este echivalentă cu faptul că toate nodurile sunt simple, adică punctele (6) sunt distincte. Avem atunci

$$L(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f|x) = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{l(x)}{(x-x_i')\,l'(x_i')} f(x_i'), \tag{108}$$

Pentru a exprima coeficienţii formulei (E) cu ajutorul abaterilor h_i ale nodurilor de punctul de derivare, introducem, pe lângă notaţiile dela punctul 28, şi numerele $H_\alpha^{(i)}$, $\alpha=0,1,\ldots,p$ care sunt polinoamele simetrice fundamentale ale lui $h_1, h_2, \ldots, h_{i-1}, h_{i+1}, \ldots, h_{p+1}$ ($H_0^{(i)}=1$, $H_\alpha^{(i)}=0$ pentru $\alpha<0$ şi pentru $\alpha>p$). Fie

$$\lambda(x) = (x-h_1)(x-h_2)\ldots(x-h_{p+1}).$$

Avem atunci $l(x)=\lambda(x-x_0)$, deci $l'(x_i')=\lambda'(h_i)$ şi formula (73) ne dă

$$l^{(m)}(x_0) = (-1)^{p+1-m}\, m!\, H_{p+1-m}$$

precum şi

$$\left[\frac{l(x)}{x-x_i'}\right]^{(m)}_{x=x_0} = (-1)^{p-m}\, m!\, H_{p-m}^{(i)}, \quad i=1,2,\ldots,p+1.$$

Ţinând seama de formula (108), deducem

$$\frac{(-1)^{p-m}}{m!} f^{(m)}(x_0) = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{H_{p-m}^{(i)}}{\lambda'(h_i)} f(x_0+h_i) + R. \tag{109}$$

Trecerea dala cazul $r=0$ la cazul $r>0$ se face utilizând formula (90). Formula (84) ne dă

$$L(x) = L(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}; f|x) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!} f^{(j)}(x_0) \tag{110}$$

şi din (85) deducem atunci

$$[x_0+h_i, \underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}; f] = \frac{1}{h_i^r}\left[f(x_0+h_i) - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{h_i^j}{j!} f^{(j)}(x_0)\right] \tag{111}$$

așa că ținând seama de formulele (90) și (109) deducem

$$\frac{(-1)^{p-m}}{(m+r)!} f^{(m+r)}(x_0) = -\sum_{j=0}^{r-1}\left[\sum_{i=1}^{p+1}\frac{H_{p-m}^{(i)}}{h_i^{r-j}\lambda'(h_i)}\right]\cdot\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} + \tag{112}$$

$$+\sum_{i=1}^{p+1}\frac{H_{p-m}^{(i)}}{h_i^r\lambda'(h_i)} f(x_0+h_i) + R.$$

Dacă $H_{p+1-m} \neq 0$, această formulă are gradul de exactitate $p+r$, și dacă restul este de formă simplă, avem

$$R = -H_{p+1-m} D_{p+r+1}[f].$$

Dacă $H_{p+1-m} = 0$, formula devine excepțională și are gradul de exactitate $p+r+1$ și dacă restul este de formă simplă, avem

$$R = H_{p+2-m} D_{p+r+2}[f].$$

Plecând dela formula (111), stabilită în cazul când abaterile h sunt distincte (și diferite de zero), obținem celelalte tipuri de formule de derivare numerică (E) făcând ca, pe grupe convenabile, abaterile să tindă una către alta.

42. Pentru a evalua coeficienții lui $f^{(j)}(x_0)$, $j = 0, 1, \ldots, r-1$ în formula (112), putem să ne folosim de formula (86). Referindu-ne la notațiile din formula (10), deducem din (86)

$$\sum_{j=0}^{r-1} c_j f^{(j)}(x_0) = \left[l(x) L\left(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}; \frac{f(x)}{l(x)} \mid x\right)\right]_{x=x_0}^{(m+r)}. \tag{113}$$

Ținând seama de (110) avem

$$\left[l(x) L\left(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}; \frac{f(x)}{l(x)} \mid x\right)\right]_{x=x_0}^{(m+r)} = \tag{114}$$

$$= \sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{j!}\left[l(x)(x-x_0)^j\right]_{x=x_0}^{(m+r)}\cdot\left[\frac{f(x)}{l(x)}\right]_{x+x_0}^{(j)}.$$

Insă, pe baza formulelor (69), (73),

$$\left[l(x)(x-x_0)^j\right]_{x=x_0}^{(m+r)} = (-1)^{p+1-m-r+j}(m+r)!\, H_{p+1-m-r+j}.$$

Din compararea formulelor (113), (114) deducem deci

$$c_{r-1-j} = \frac{(-1)^{p-m-j}(m+r)!}{(r-1-j)!}\sum_{\alpha=0}^{j} H_{p-m-j+\alpha}\frac{(-1)^\alpha}{\alpha!}\left[\frac{1}{l(x)}\right]_{x=x_0}^{(\alpha)}. \tag{115}$$

Dar, din egalitatea

$$l(x)\frac{1}{l(x)} = 1$$

deducem

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^{p+1} H_{p+1}\left[\frac{1}{l(x)}\right]_{x=x_0} = 1 \\ &\sum_{\alpha=0}^{i} H_{p+1-i+\alpha}\frac{(-1)^{\alpha}}{\alpha!}\left[\frac{1}{l(x)}\right]^{(\alpha)}_{x=x_0} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

Eliminând pe

$$\frac{(-1)^{\alpha}}{\alpha!}\left[\frac{1}{l(x)}\right]^{(\alpha)}_{x=x_0}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, j$$

din ecuația (115) și din primele $j+1$ ecuații (116), deducem

$$c_{r-1-j} = \frac{(-1)^{m+1}(m+r)!}{(r-1-j)!\,H_{p+1}^{j+1}} \begin{vmatrix} H_p & H_{p+1} & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ H_{p-1} & H_p & H_{p+1} & 0 \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ H_{p+1-j} & H_{p+2-j} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & H_{p+1} \\ H_{p-m-j} & H_{p-m-j+1} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & H_{p-m} \end{vmatrix}$$

$$j = 0, 1, \ldots, r-1.$$

Comparând această formulă cu (112) deducem în definitiv

$$\sum_{i=1}^{p+1} \frac{H_{p-m}^{(i)}}{h_i^{j+1}\lambda'(h_i)} = \frac{(-1)^p}{H_{p+1}^{j+1}} \begin{vmatrix} H_p & H_{p+1} & 0 & 0 \ldots & 0 \\ H_{p-1} & H_p & H_{p+1} & 0 \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ H_{p+1-j} & H_{p+2-j} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & H_{p+1} \\ H_{p-m-j} & H_{p-m-j+1} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & H_{p-m} \end{vmatrix} \tag{117}$$

$$j = 0, 1, \ldots, r-1.$$

43. Să considerăm câteva cazuri particulare

1°. Pentru $r = 0, s = 1$, avem

$$f^{(m)}(x_0) = \sum_{j=0}^{p-m} (-1)^j \frac{h^j}{j!} f^{(m+j)}(x_0 + h) + \tag{118}$$

$$+ (-1)^{p+1-m} \frac{(p+1)!}{(p+1-m)!} h^{p+1-m} D_{p+1}[f].$$

Aceasta este formula lui Taylor, cu o nouă expresie a restului. Pentru $m > 0$, obținem prima serie de formule reductibile.

2°. Pentru $p = m = 0$, obținem formula

$$\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) = -\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!\,h^{r-j}} f^{(j)}(x_0) + \frac{1}{r!} f(x_0 + h) - h D_{r+1}[f]. \tag{119}$$

Această formulă rezultă și din formula lui Taylor (118) (pentru $m = 0$ și cu o schimbare de notație). Pentru $p = m = r = 0$, cele două formule (118), (119) coincid.

3°. Să presupunem că $p = 1$, $m = 0$. Un calcul simplu ne arată că, determinantul din membrul al doilea al formulei (117) este egal cu

$$\frac{h_1^{j+2} - h_2^{j+2}}{h_1 - h_2}$$

și deducem formula

$$\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) = -\sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!\,(h_1 h_2)^{r-j}} \cdot \frac{h_1^{r-j+1} - h_2^{r-j+1}}{h_1 - h_2} f^{(j)}(x_0) - \\ - \frac{1}{(h_1 h_2)^r (h_1 - h_2)} [h_2^{r+1} f(x_0 + h_1) - h_1^{r+1} f(x_0 + h_2)] + h_1 h_2 D_{r+2}[f]. \tag{120}$$

Din aceasta se deduce și formula limită ($h_2 \to h_1 = h$)

$$\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) = -\sum_{j=0}^{r-1} \frac{r - j + 1}{j!\,h^{r-j}} f^{(j)}(x_0) + \frac{r+1}{h^r} f(x_0 + h) - \\ - \frac{1}{h^{r-1}} f'(x_0 + h) + h^2 D_{r+2}[f]. \tag{121}$$

4°. Pentru $p = m = 1$, determinantul din membrul al doilea al formulei (116) este egal cu

$$\frac{h_1^{j+1} - h_2^{j+1}}{h_1 - h_2}$$

și deducem formula

$$\frac{1}{(r+1)!} f^{(r+1)}(x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!\,(h_1 h_2)^{r-j}} \cdot \frac{h_1^{r-j} - h_2^{r-j}}{h_1 - h_2} f^{(j)}(x_0) + \\ + \frac{1}{(h_1 h_2)^r (h_1 - h_2)} [h_2^r f(x_0 + h_1) - h_1^r f(x_0 + h_2)] + R. \tag{122}$$

Această formulă este de gradul de exactitate $r + 1$, dacă $h_1 + h_2 \neq 0$, dar restul în general nu este de formă simplă. Din această formulă deducem și formula limită ($h_2 \to h_1 = h$)

$$\frac{1}{(r+1)!} f^{(r+1)}(x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{r - j}{j!\,h^{r-j+1}} f^{(j)}(x_0) - \frac{r}{h^{r+1}} f(x_0 + h) + \\ + \frac{1}{h^r} f'(x_0 + h) - 2h D_{r+2}[f]. \tag{123}$$

Dacă $h_1 + h_2 = 0$, formula (122) devine excepțională și se poate scrie sub forma

$$\frac{1}{(r+1)!} f^{(r+1)}(x_0) = -\sum_{j=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{1}{(r-1-2j)!} \cdot \frac{1}{h^{2j+2}} f^{(r-1-2j)}(x_0) + \\ + \frac{1}{2h^{r+1}} [f(x_0+h) + (-1)^{r+1} f(x_0-h)] - h^2 D_{r+3}[f]. \tag{124}$$

44. Dintre formulele de gradul de exactitate $\leqq 5$ nu vom scrie explicit decât pe acelea pentru care $s = 1$, deci pentru care nodurile sunt toate confundate, afară bineînțeles de acelea care au și fost semnalate. Restul acestor formule este de formă simplă. Pentru gradele de exactitate 0, 1, 2, 3, 4, 5, există respectiv 1, 3, 6, 10, 15, 21 astfel de formule. Dintre aceste formule 1, 2, 3, 4, 5 respectiv 6 se deduc din formula (118) și câte una din formulele (119), (121), (123). Grupăm cele 0, 0, 0, 3, 7 respectiv 12 formule rămase după gradul lor de exactitate. In paranteză, după formulă, indicăm pe rând valorile corespunzătoare ale numerelor p, r, m. Pentru simplificare, în formulele particulare pe care le scriem, presupunem $x_0 = 0$. Se trece la cazul lui x_0 oarecare, printr'o transformare lineară simplă.

Gradul de exactitate 3:

$$\text{(F1)} \quad f'(0) = \frac{3}{h}[f(h) - f(0)] - 2f'(h) + \frac{h}{2} f''(h) - h^3 D_4[f] \qquad (2,1,0)$$

$$\text{(F2)} \quad f''(0) = \frac{6}{h^2}[f(0) - f(h)] + \frac{6}{h} f'(h) - 2f''(h) + 6h^2 D_4[f] \qquad (2,1,1)$$

$$\text{(F3)} \quad f'''(0) = \frac{6}{h^3}[f(h) - f(0)] - \frac{6}{h^2} f'(h) + \frac{3}{h} f''(h) - 18h D_4[f] \qquad (2,1,2)$$

Gradul de exactitate 4:

$$\text{(F4)} \quad f'(0) = \frac{4}{h}[f(h) - f(0)] - 3f'(h) + hf''(h) - \frac{h^2}{6} f'''(h) + h^4 D_5[f] \qquad (3,1,0)$$

$$\text{(F5)} \quad f''(0) = \frac{12}{h^2}[f(0) - f(h)] + \frac{12}{h} f'(h) - 5f''(h) + hf'''(h) - 8h^3 D_5[f] \qquad (3,1,1)$$

$$\text{(F6)} \quad f'''(0) = \frac{24}{h^3}[f(h) - f(0)] - \frac{24}{h^2} f'(h) + \frac{12}{h} f''(h) - 3f'''(h) + \\ + 36h^2 D_5[f] \qquad (3,1,2)$$

$$\text{(F7)} \quad f^{IV}(x) = \frac{24}{h^4}[f(0) - f(h)] + \frac{24}{h^3} f'(h) - \frac{12}{h^2} f''(h) + \\ \frac{4}{h} f'''(h) - 96h D_5[f] \qquad (3,1,3)$$

$$(F8)\quad f''(0)=\frac{12}{h^2}[f(h)-f(0)]-\frac{6}{h}[f'(0)+f'(h)]+f''(h)-2h^3D_5[f] \qquad (2,2,0)$$

$$(F9)\quad f'''(0)=\frac{48}{h^3}[f(0)-f(h)]+\frac{18}{h^2}f'(0)+\frac{80}{h^2}f'(h)- \\ -\frac{6}{h}f''(h)+18h^2D_5[f] \qquad (2,2,1)$$

$$(F10)\quad f^{IV}(0)=\frac{72}{h^4}[f(h)-f(0)]-\frac{24}{h^3}f'(0)-\frac{48}{h^3}f'(h)+ \\ \frac{12}{h^2}f''(h)-72hD_5[f] \qquad (2,2,2)$$

Gradul de exactitate 5:

$$(F11)\quad f'(0)=\frac{5}{h}[f(h)-f(0)]-4f'(h)+\frac{3}{2}hf''(h)- \\ \frac{1}{3}h^2f'''(h)+\frac{h^3}{24}f^{IV}(h)-h^5D_6[f] \qquad (4,1,0)$$

$$(F12)\quad f''(0)=\frac{20}{h^2}[f(0)-(fh)]+\frac{20}{h}f'(h)-9f''(h)+ \\ +\frac{7}{3}hf'''(h)-\frac{h^2}{3}f^{IV}(h)+10h^4D_6[f] \qquad (4,1,1)$$

$$(F13)\quad f'''(0)=\frac{60}{h^3}[f(h)-f(0)]-\frac{60}{h^2}f'(h)+\frac{30}{h}f''(h)- \\ -9f'''(h)+\frac{3}{2}hf^{IV}(h)-60h^3D_6[f] \qquad (4,1,2)$$

$$(F14)\quad f^{IV}(0)=\frac{120}{h^4}[f(0)-f(h)]+\frac{120}{h^3}f'(h)-\frac{60}{h^2}f''(h)+ \\ +\frac{20}{h}f'''(h)-4f^{IV}(h)+240h^2D_6[f] \qquad (4,1,3)$$

$$(F15)\quad f^{V}(0)=\frac{120}{h^5}[f(h)-f(0)]-\frac{120}{h^4}f'(h)+\frac{60}{h^3}f''(h)- \\ -\frac{20}{h^2}f'''(h)+\frac{5}{h}f^{IV}(h)-600hD_6[f] \qquad (4,1,4)$$

$$(F16)\quad f''(0)=\frac{20}{h^2}[f(h)-f(0)]-\frac{8}{h}f'(0)-\frac{12}{h}f'(h)+ \\ +3f''(h)-\frac{h}{3}f'''(h)+2h^4D_6[f] \qquad (3,2,0)$$

$$(F17)\quad f'''(0)=\frac{120}{h^3}[f(0)-f(h)]+\frac{36}{h^2}f'(0)+\frac{84}{h^2}f'(h)-$$
$$-\frac{24}{h}f''(h)+3f'''(h)-24h^3D_6[f] \qquad (3,2,1)$$

$$(F18)\quad f^{IV}(0)=\frac{360}{h^4}[f(h)-f(0)]-\frac{96}{h^3}f'(0)-\frac{264}{h^3}f'(h)+$$
$$\frac{84}{h^2}f''(h)-\frac{12}{h}f'''(h)+144h^2D_6[f] \qquad (3,2,2)$$

$$(F19)\quad f^{V}(0)=\frac{480}{h^5}[f(0)-f(h)]+\frac{120}{h^4}f'(0)+\frac{360}{h^4}f'(h)-$$
$$-\frac{120}{h^3}f''(h)+\frac{20}{h^2}f'''(h)-480hD_6[f] \qquad (3,2,3)$$

$$(F20)\quad f'''(0)=\frac{60}{h^3}[f(h)-f(0)]-\frac{36}{h^2}f'(0)-\frac{9}{h}f''(0)-$$
$$-\frac{24}{h^2}f'(h)+\frac{3}{h}f''(h)-6h^3D_6[f] \qquad (2,3,0)$$

$$(F21)\quad f^{IV}(0)=\frac{360}{h^4}[f(0)-f(h)]+\frac{192}{h^3}f'(0)+\frac{36}{h^2}f''(0)+$$
$$+\frac{168}{h^3}f'(h)-\frac{24}{h^2}f''(h)+72h^2D_6[f] \qquad (2,3,1)$$

$$(F22)\quad f^{V}(0)=\frac{720}{h^5}[f(h)-f(0)]-\frac{360}{h^4}f'(0)-\frac{60}{h^3}f''(0)-$$
$$-\frac{360}{h^4}f'(h)+\frac{60}{h^3}f''(h)-360hD_6[f] \qquad (2,3,2)$$

45. Formulele excepționale se obțin impunând abaterilor restricția $H_{p+1-m}=0$. Vom scrie formulele excepționale de grad de exactitate $\leqq 5$, însă numai pe acelea corespunzătoare lui $s=2$, fără acelea care rezultă din formula (124). In acest caz, cele două abateri distincte h_1, h_2 sunt legate de o relație care permite să le exprimăm sub forma αh, βh (α, β fiind două numere fixe). Raportul numerelor α, β nu este totdeauna rațional. Restul acestor formule este de formă simplă când $m=1,2$, sau când formula este simetrică. Pentru gradele de exactitate 3, 4, 5 avem respectiv 2, 8, 16 astfel de formule, dintre care la 6 forma simplă a restului nu rezultă din cele ce preced. In paranteză, indicăm valorile lui p, r, m, precum și restricția la care este supus h_1 și h_2, ordinul de multiplicitate a nodului x_2 fiind cel puțin egal cu al lui x_1.

Gradul de exactitate 3:

$$(F23)\qquad f'(0)=\frac{4}{9h}[f(h)-f(-2h)]-\frac{1}{3}f'(-2h)-4h^3D_4[f]$$

$$(2,0,1;\ 2h_1+h_2=0)$$

$$(F24)\qquad f''(0)=\frac{2}{9h^2}[f(-2h)-f(h)]+\frac{2}{3h}f'(h)-6h^2D_4[f]$$

$$(2,0,2;\ h_1+2h_2=0)$$

Gradul de exactitate 4:

$$(F25)\qquad f'(0)=\frac{27}{64h}[f(h)-f(-3h)]-\frac{11}{16}f'(-3h)-$$

$$-\frac{3h}{8}f''(-3h)-27h^4D_5[f]\qquad(3,0,1;\ 3h_1+h_2=0)$$

$$(F26)\qquad f'(0)=\frac{3}{4h}[f(h)-f(-h)]-\frac{1}{4}[f'(h)+f'(-h)]+h^4D_5[f]$$

$$(3,0,1;\ h_1+h_2=0)$$

$$(F27)\qquad f''(0)=\frac{3}{4h^2}[f(h)-f(-h)]-\frac{3}{2h}f'(-h)-\frac{1}{2}f''(-h)-4h^3D_5[f]$$

$$(3,0,2;\ h_1+h_2=0)$$

$$(F28)\qquad f''(0)=\frac{2\sqrt{3}+3}{3h^2}\{f(h)-f(-[2-\sqrt{3}]h)-(2-\sqrt{3})hf'(h)-$$

$$-hf'(-[2-\sqrt{3}]h)\}+4(3\sqrt{3}-5)h^3D_5[f]$$

$$(3,0,2;\ h_1^2+4h_1h_2+h_2^2=0)$$

$$(F29)\qquad f'''(0)=\frac{3}{32h^3}[f(h)-f(-3h)]-\frac{3}{8h^2}f'(h)+\frac{3}{4h}f''(h)+R$$

$$(3,0,3;\ h_1+3h_2=0)$$

$$(F30)\qquad f'''(0)=\frac{3}{2h^3}[f(-h)-f(h)]+\frac{3}{2h^2}[f'(h)+f'(-h)]-12h^2D_5[f]$$

$$(3,0,3;\ h_1+h_2=0)$$

$$(F31)\qquad f''(0)=\frac{1}{18h^2}[16f(h)+11f(-2h)-27f(0)]+\frac{1}{3h}f'(-2h)-$$

$$-8h^3D_5[f]\qquad(2,1,1;\ 2h_1+h_2=0)$$

$$(F32)\qquad f'''(0)=\frac{1}{3h^3}[9f(0)-8f(h)-f(-2h)]+\frac{2}{h^2}f'(h)-18h^2D_5[f]$$

$$(2,\,1,\,2);\ h_1+2h_2=0)$$

Gradul de exactitate 5:

$$(F33)\qquad f'(0)=\frac{256}{625h}[f(h)-f(-4h)]-\frac{131}{125}f'(-4h)-\frac{28}{25}hf''(-4h)-$$

$$-\frac{8}{15}h^2f'''(-4h)-256h^5D_6[f]\qquad(4,\,0,\,1;\ 4h_1+h_2=0)$$

$$(F34)\qquad f'(0)=\frac{216}{625h}[f(2h)-f(-3h)]-\frac{1}{125}[27f'(2h)+64f'(-3h)]-$$

$$-\frac{6h}{25}f''(-3h)+108h^5D_6[f]\qquad(4,\,0,\,1;\ 3h_1+2h_2=0)$$

$$(F35)\qquad f''(0)=\frac{108}{625h^2}[f(2h)-f(-3h)]-\frac{108}{125h}f'(-3h)-\frac{29}{25}f''(-3h)-$$

$$-\frac{3h}{5}f'''(-3h)-270h^4D_6[f]\qquad(4,\,0,\,2;\ 3h_1+2h_2=0)$$

$$(F36)\qquad f''(0)=\frac{9(117+62\sqrt{6})}{625h^2}\left[f(h)-f\left(-\frac{3-\sqrt{6}}{3}h\right)\right]+$$

$$+\frac{9(54+19\sqrt{6})}{250h}\left[(\sqrt{6}-2)f'(h)+\frac{\sqrt{6}}{3}f'\left(-\frac{3-\sqrt{6}}{3}h\right)\right]+\frac{3\sqrt{6}-2}{25}f''(h)-$$

$$-\frac{2}{3}(3+4\sqrt{6})h^4D_6[f]\qquad(4,\,0,\,2;\ 3h_1^2+6h_1h_2+h_2^2=0)$$

$$(F37)\qquad f'''(0)=\frac{48}{625h^3}[f(3h)-f(-2h)]-\frac{48}{125h^2}f'(-2h)-\frac{24}{25h}f''(-2h)-$$

$$-\frac{3}{5}f'''(-2h)+R\qquad(4,\,0,\,3;\ 2h_1+3h_2=0)$$

$$(F38)\qquad f'''(0)=\frac{6(311+129\sqrt{6})}{625h^3}[f(-[3-\sqrt{6}]h)-f(h)]+$$

$$+\frac{3(81+34\sqrt{6})}{125h^2}f'(-[3-\sqrt{6}]h)+\frac{3(107+48\sqrt{6})}{125h^2}f'(h)-$$

$$-\frac{3(2+3\sqrt{6})}{25}f''(h)+R\qquad(4,\,0,\,3;\ h_1^2+6h_1h_2+3h_2^2=0)$$

(F39) $$f^{IV}(0)=\frac{24}{625h^4}[f(-4h)-f(h)]+\frac{24}{125h^3}f'(h)-\frac{12}{25h^2}f''(h)+$$
$$+\frac{4}{5h}f'''(h)+R \qquad (4,0,4;\ h_1+4h_2=0)$$

(F40) $$f^{IV}(0)+\frac{72}{625h^4}[f(-2h)-f(3h)]+\frac{24}{125h^3}[f'(3h)+2f'(-2h)]+$$
$$+\frac{12}{25h^2}f''(-2h)+R \quad (4,0,4;\ 2h_1+3h_2=0)$$

(F41) $$f''(0)=\frac{1}{96h^2}[81f(h)+47f(-3h)-128f(0)]+\frac{5}{8h}f'(-3h)+$$
$$+\frac{1}{4}f''(-3h)-54h^4D_6[f] \qquad (3,1,1;\ 3h_1+h_2=0)$$

(F42) $$f''(0)=\frac{2}{h^2}[f(-h)-2f(0)+f(h)]+\frac{1}{2h}[f'(-h)-f'(h)]+2h^4D_6[f]$$
$$(3,1,1;\ h_1+h_2=0)$$

(F43) $$f'''(0)=\frac{1}{4h^3}[48f(0)-9f(-h)-39f(H)]+\frac{15}{2h}f'(h)-\frac{3}{2}f''(h)+$$
$$12h^4D_6[f] \qquad (3,1,2;\ h_1+h_2=0)$$

(F44) $$f'''(0)=\frac{-12(5+3\sqrt{3})}{h^3}f(0)+\frac{3(1+\sqrt{3})}{h^3}f(h)+$$
$$+\frac{3(19+11\sqrt{3})}{h^3}f([\sqrt{3}-2]h)-\frac{\sqrt{3}}{h^2}f'(h)+\frac{12+7\sqrt{3}}{h^2}f'([\sqrt{3}-2]h)+$$
$$+12(3\sqrt{3}-5)h^3D_6[f] \qquad (3,1,2;\ h_1^2+4h_1h_2+h_2^2=0)$$

(F45) $$f^{IV}(0)=\frac{1}{8h^4}[f(-3h)+63f(h)-64f(0)]-$$
$$-\frac{15}{2h^3}f'(h)+\frac{3}{h^2}f''(h)+R \qquad (3,1,3;\ h_1+3h_2=0)$$

(F46) $$f^{IV}(0)=\frac{12}{h^4}[2f(0)-f(h)-f(-h)]+\frac{6}{h^3}[f'(h)-f'(-h)]-$$
$$-48h^2D_6[f] \qquad (3,1,3,\ h_1+h_2=0)$$

(F47) $$f'''(0)=\frac{1}{6h^3}[16f(h)-9f(0)-7f(-2h)]-$$
$$-\frac{1}{2h^2}[9f'(0)+f'(-2h)]-24h^3D_6[f] \qquad (2,2,1;\ 2h_1+h_2=0)$$

$$(F48)\qquad f^{IV}(0)=\frac{2}{3h^4}[27f(0)+f(-2h)-28f(h)]+\frac{4}{h^3}[3f'(0)+2f'(h)]-$$

$$-72h^2\,D_6[f]\qquad(2,2,2;\,h_1+2h_2=0)$$

46. Formulele reductibile din a doua serie (cu $s=2$) se obțin ușor din formulele excepționale deoarece o astfel de formulă este excepțională ca o formulă de derivare numerică a funcției $f'(x)$. O formulă reductibilă cu caracteristicele $p,(r=)\,0,\,m$ se obține din formula excepțională corespunzătoare cu caracteristicele respective $p-2,\,0,\,m-1$. Cele 9 formule reductibile de grad de exactitate $\leqq 5$, din această serie, se obțin din formula (124) pentru $r=0$ și din formulele (F23) — (F30). Aceste formule sunt

Gradul de exactitate 3:

$$(F49)\qquad f''(0)=\frac{1}{2h}[f'(h)-f'(-h)]-4h^2\,D_4[f]\qquad(3,0,2)$$

Gradul de exactitate 4:

$$(F50)\qquad f''(0)=\frac{4}{9h}[f'(h)-f'(-2h)]-\frac{1}{3}f''(-2h)-20h^3\,D_5[f]$$

$$(4,0,2;\,2h_1+h_2=0)$$

$$(F51)\qquad f'''(0)=\frac{2}{9h^2}[f'(-2h)-f'(h)]+\frac{2}{3h}f''(h)-30h^2\,D_5[f]$$

$$(4,0,3;\,h_1+2h_2=0)$$

Gradul de exactitate 5:

$$(F52)\qquad f''(0)=\frac{27}{64h}[f'(h)-f'(-3h)]-\frac{11}{16}f''(-2h)-\frac{3h}{8}f'''(-3h)-$$

$$-162h^4\,D_6[f]\qquad(5,0,2;\,3h_1+h_2=0)$$

$$(F53)\qquad f''(0)=\frac{3}{4h}[f'(h)-f'(-h)]-\frac{1}{4}[f''(h)+f''(-h)]+6h^4\,D_6[f]$$

$$(5,0,2;\,h_1+h_2=0)$$

$$(F54)\qquad f'''(0)=\frac{3}{4h^2}[f'(h)-f'(-h)]-\frac{3}{2h}f''(-h)-$$

$$-\frac{1}{2}f'''(-h)-24h^3D_6[f]\qquad(5,0,3;\,h_1+h_2=0)$$

$$(F55)\qquad f'''(0)=\frac{2\sqrt{3}+3}{3h^2}\{f'(h)-f'(-[2-\sqrt{3}]\,h)-(2-\sqrt{3})\,hf''(h)-$$

$$-hf''(-[2-\sqrt{3}]\,h)\}+24(3\sqrt{3}-5)\,h^3\,D_6[f]$$

$$(5,0,3;\,h_1^2+4h_1h_2+h_2^2=0)$$

$$(F56)\qquad f^{IV}(0)=\frac{3}{32h^3}[f'(h)-f'(-3h)]-\frac{3}{8h^2}f''(h)+\frac{3}{4h}f'''(h)+R$$

$$(5,0,4;\ h_1+3h_2=0)$$

$$(F57)\qquad f^{IV}(0)=\frac{3}{2h^3}[f'(-h)-f'(h)]+\frac{3}{2h^2}[f''(h)+f''(-h)]-72h^2D_6[f]$$

$$(5,0,4;\ h_1+h_2=0)$$

Simplicitatea restului, în cazul formulelor (F49), (F53), (F57), rezultă din simetria acestor formule.

Resturile formulelor (F50), (F51), (F52), (F54) şi (F55) se pot scrie respectiv

$$-4h^3D_4[f'],\quad -6h^2D_4[f'],\quad -27h^4D_5[f'],\quad -4h^3D_5[f'],$$
$$4(3\sqrt{3}-5)h^3D_5[f'].$$

Dar funcţionala ($n\geqq 2$)

$$R[f]=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\ ;\ f']$$

unde $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ sunt n puncte fixe, nu toate confundate, este de grad de exactitate $n-1$ şi este de formă simplă. Proprietatea relativă la gradul de exactitate rezultă din formula (30). Simplicitatea rezultă din faptul că, dacă $f(x)$ este o funcţie convexă de ordinul $n-1$, $f'(x)$ este o funcţie convexă de ordinul $n-2$. Avem în acest caz $R[x^n]=n$, deci

$$[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n;f']=nD_n[f]$$

intervalul $[a,b]$ fiind cel mai mic interval închis care conţine punctele $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. De aici rezultă formula

$$D_{n-1}[f']=nD_n[f]$$

a cărei însemnătate este clară şi din care am dedus resturile formulelor (F50), (F51), (F52), (F54) şi (F55).

47. Formulele (E) simetrice se pot scrie întrebuinţând notaţiile dela punctul 35, scriind abaterile sub forma $\pm t_i$, $i=1,2,\ldots,q$. Dacă notăm cu $T_\alpha^{(i)}$, $\alpha=0,1,\ldots,q-1$ polinoamele simetrice fundamentale ale lui $t_1^2,t_2^2,\ldots,t_{i-1}^2,t_{i+1}^2,\ldots,t_q^2$ ($T_0^{(i)}=1$, $T_\alpha^{(i)}=0$, pentru $\alpha<0$ şi $\alpha>q-1$) şi dacă ţinem seama de (94), deducem

$$H_{2q-2\mu-1}^{(2i)}=(-1)^{q-\mu}t_iT_{q-\mu-1}^{(i)},\quad H_{2q-2\mu-1}^{(2i-1)}=(-1)^{q-\mu-1}t_iT_{q-\mu-1}^{(i)}$$
$$i=1,2,\ldots,q.$$

Avem şi

$$H_\alpha=\begin{cases}0, & \text{pentru } \alpha \text{ impar}\\ (-1)^{\frac{\alpha}{2}}T_{\frac{\alpha}{2}} & \text{pentru } \alpha \text{ par.}\end{cases}\qquad(125)$$

Să punem

$$\rho(x)=(x-t_1^2)(x-t_2^2)\dots(x-t_q^2)$$

atunci $\lambda(x)=\rho(x^2)$, de unde, ținând seama de (94),

$$\lambda'(h_{2i})=2t_i\,\rho'(t_i^2),\quad \lambda'(h_{2i-1})=-2t_i\,\rho'(t_i^2).$$

Făcând calculele, formula (109) devine

$$\frac{(-1)^{q-\mu-1}}{(2\mu)!}f^{2\mu}(x_0)=\sum_{i=1}^{q}\frac{T_{q-\mu-1}^{(i)}}{2\rho'(t_i^2)}[f(x_0+t_i)+f(x_0-t_i)]-T_{q-\mu}D_{2q}[f].$$

Pentru a trece la cazul $r>0$, ținem seama de formulele (85) și (90). Observăm că

$$[x_0+t_i,\underbrace{x_0,x_0,\dots,x_0}_{r};f]+[x_0-t_i,\underbrace{x_0,x_0,\dots,x_0}_{r};f]=$$

$$=2[x_0\pm t_i,\underbrace{x_0,x_0,\dots,x_0}_{r-1};f]$$

membrul al doilea reducându-se prin definiție la $f(x_0+t_i)+f(x_0-t_i)$, când $r=0$. Deducem deci [1])

$$\frac{(-1)^{q-\mu-1}}{(2\mu+r)!}f^{(2\mu+r)}(x_0)=\sum_{i=1}^{q}\frac{T_{q-\mu-1}^{(i)}}{\rho'(t_i^2)}[x_0\pm t_i,\underbrace{x_0,x_0,\dots,x_0}_{r-1};f]-$$

$$-T_{q-\mu}D_{2q+r}[f]. \tag{126}$$

Ținând seama de (111), mai deducem

$$[x_0\pm t_i,\underbrace{x_0,x_0,\dots,x_0}_{r-1};f]=\frac{1}{2t_i^r}[f(x_0+t_i)+(-1)^r f(x_0-t_i)-$$

$$-2\sum_{j=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}\frac{t_i^{r-2j}}{(r-2j)!}f^{(r-2j)}(x_0)].$$

Înlocuind în (126), obținem în definitiv formula

$$\frac{(-1)^{q-\mu-1}}{(2\mu+r)!}f^{(2\mu+r)}(x_0)=-\sum_{j=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}\left[\sum_{i=1}^{q}\frac{T_{q-\mu-1}^{(i)}}{t_i^{2j}\rho'(t_i^2)}\right]\frac{f^{(r-2j)}(x_0)}{(r-2j)!}+$$

$$+\sum_{i=1}^{q}\frac{T_{q-\mu-1}^{(i)}}{2t_i^r\rho'(t_i^2)}[f(x_0+t_i)+(-1)^r f(x_0-t_i)]-T_{q-\mu}D_{2q+r}[f]. \tag{127}$$

[1]) Vezi notația prescurtată la [1]), dela pagina 39.

Coeficienţii lui $f^{(r-2j)}(x_0)$, $j = 0, 1, \ldots, \left[\frac{r}{2}\right]$ în această formulă se pot calcula ca şi mai sus, în cazul formulei (112). Făcând calculele şi urmărind procedeul de mai sus deducem

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{T_{q-\mu-1}^{(i)}}{t_i^{2j}\,\rho'(t_i^2)} = \frac{(-1)^{q-1}}{T_q^j} \begin{vmatrix} T_{q-1} & T_q & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ T_{q-2} & T_{q-1} & T_q & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{q-j+1} & T_{q-j+2} & \ldots & \ldots & \ldots & T_q \\ T_{q-\mu-j} & T_{q-\mu-j+1} & \ldots & \ldots & \ldots & T_{q-\mu-1} \end{vmatrix},$$

$$j = 0, 1, \ldots, \left[\frac{r}{2}\right].$$

Acest rezultat se poate deduce şi din (117), ţinând seama de (125). Formula (127) este valabilă atâta timp cât abaterile $\pm t_i$ sunt distincte. Formulele de celelalte tipuri se obţin făcând ca abaterile t_i, $i = 1, 2, \ldots, q$ să tindă, pe grupe, una către alta.

48. Din (120) deducem formula simetrică ($h_1 + h_2 = 0$)

$$\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) = -\sum_{j=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \frac{f^{(r-2j)}(x_0)}{(r-2j)!\,h^{2j}} + \frac{1}{2h^r}[f(x_0+h) + (-1)^r f(x_0-h)] - h^2 D_{r+2}[f].$$

Aceasta, pentru $r = 0, 1, 2, 3, 4$, ne dă formulele simetrice de grad de exactitate 1, 2, 3, 4, 5,

$$(\text{F58})\quad f(0) = \frac{1}{2}[f(h) + f](-h) - h^2 D_2[f] \qquad (1,0,0)$$

$$(\text{F59})\quad f'(0) = \frac{1}{2h}[f(h) - f(-h)] - h^2 D_3[f] \qquad (1,1,0)$$

$$(\text{F60})\quad \frac{1}{2} f''(0) = -\frac{f(0)}{h^2} + \frac{1}{2h^2}[f(h) + f(-h)] - h^2 D_4[f] \qquad (1,2,0)$$

$$(\text{F61})\quad \frac{1}{6} f'''(0) = -\frac{f'(0)}{h^2} + \frac{1}{2h^3}[f(h) - f(-h)] - h^2 D_5[f] \qquad (1,3,0)$$

$$(\text{F62})\quad \frac{1}{24} f^{IV}(0) = -\frac{f(0)}{h^4} - \frac{f''(0)}{2h^2} + \frac{1}{2h^4}[f(h) + f(-h)] - h^2 D_6[f] \qquad (1,4,0)$$

Afară de aceasta, mai avem următoarele formule simetrice de grad de exactitate ≤ 5:

Gradul de exactitate 3:

$$(\text{F63})\quad f(0) = \frac{u^2[f(t) + f(-t)] - t^2[f(u) + f(-u)]}{2(u^2 - t^2)} + t^2 u^2 D_4[f] \qquad (-3,0,0)$$

$$(F64)\quad f(0)=\frac{f(h)+f(-h)}{2}-\frac{h}{4}[f'(h)-f'(-h)]+h^4 D_4[f] \qquad (3,0,0)$$

$$(F65)\quad f''(0)=\frac{f(t)+f(-t)-f(u)-f(-u)}{t^2-u^2}-2(t^2+u^2)D_4[f] \qquad (3,0,2).$$

La acestea se mai adaugă formula (F49).

Gradul de exactitate 4:

$$(F66)\quad f'(0)=\frac{u^3[f(t)-f(-t)]-t^3[f(u)-f(-u)]}{2ut(u^2-t^2)}+t^2u^2D_5[f] \qquad (3,1,0).$$

$$(F67)\quad f'''(0)=3\frac{u[f(t)-f(-t)]-t[f(u)-f(-u)]}{ut(t^2-u^2)}-6(t^2+u^2)D_5[f]. \qquad (3,1,2)$$

La acestea se mai adaugă formulele (F26), (F30).

Gradul de exactitate 5:

$$(F68)\quad f(0)=\frac{\Sigma u^2\varphi^2(\varphi^2-u^2)[f(t)+f(-t)]}{(\varphi^2-u^2)(\varphi^2-t^2)(u^2-t^2)}-t^2u^2\varphi^2D_6[f] \qquad (5,0,0)$$

$$(F69)\quad f(0)=\frac{u^2(u^2-2t^2)[f(t)+f(-t)]+t^4[f(u)+f(-u)]}{2(u^2-t^2)^2}-$$

$$-\frac{u^2t}{4(u^2-t^2)}[f'(t)-f'(-t)]-t^4u^2D_6[f] \qquad (5,0,0)$$

$$(F70)\quad f(0)=\frac{f(h)+f(-h)}{2}-\frac{5h}{16}[f'(h)-f'(-h)]+$$

$$+\frac{h^2}{16}[f''(h)+f''(-h)]-h^6D_6[f] \qquad (5,0,0)$$

$$(F71)\quad f''(0)=\frac{\Sigma(u^4-\varphi^4)[f(t)+f(-t)]}{(\varphi^2-u^2)(\varphi^2-t^2)(u^2-t^2)}+2(\Sigma t^2u^2)D_6[f] \qquad ((5,0,2)$$

$$(F72)\quad f''(0)=\frac{2t^2}{(u^2-t^2)^2}[f(t)+f(-t)-f(u)-f(-u)]+$$

$$+\frac{u^2+t^2}{2t(u^2-t^2)}[f'(t)-f'(-t)]+2t^2(t^2+2u^2)D_6[f] \qquad (5,0,2)$$

$$(F73)\quad f^{IV}(0)=\frac{12\Sigma(\varphi^2-u^2)[f(t)+f(-t)]}{(\varphi^2-u^2)(\varphi^2-t^2)(u^2-t^2)}-24(\Sigma t^2)D_6[f] \qquad (5,0,4)$$

$$(F74)\quad f^{IV}(0)=\frac{12}{(u^2-t^2)^2}[f(u)+f(-u)-f(t)-f(-t)]-$$

$$-\frac{6}{t(u^2-t^2)}[f'(t)-f'(-t)]-24(2t^2+u^2)D_6[f] \qquad (5,0,4)$$

$$(F75)\quad f''(0) = -2\frac{u^2+t^2}{u^2 t^2} f(0) + \frac{u^4[f(t)+f(-t)] - t^4[f(u)-f(-u)]}{t^2 u^2 (u^2 - t^2)} + \\ + 2t^2 u^2 D_6[f] \qquad (3,2,0)$$

$$(F76)\quad f^{IV}(0) = \frac{24}{u^2 t^2} f(0) - 12\frac{u^2[f(t)+f(-t)] - t^2[f(u)+f(-u)]}{t^2 u^2 (u^2 - t^2)} - \\ - 24(t^2+u^2) D_6[f] \qquad (3,2,2)$$

La acestea se mai adaugă formulele (F42), (F46), (F53) și (F57). Abaterile h, t, u, v, ... care într'o formulă se presupun diferite între ele și diferite de zero. Sumația din formulele (F68), (F71) și (F73) se referă la permutările circulare ale literelor t, u, v. Pentru simplificarea scrierii, am presupus și aici $x_0 = 0$.

Formule cu diferențe

49. Vom indica, pe scurt, modul cum se obțin aceste formule, fără a ne preocupa acum de forma restului. Dacă folosim notațiile precedente, formula lui Newton

$$L(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f \mid x) = \sum_{i=0}^{p} (x - x_1')(x - x_2') \ldots (x - x_i')[x_1', x_2', \ldots, x_{i+1}'; f]$$

ne dă

$$L^{(m)}(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f \mid x_0) = \\ = m! \sum_{i=m}^{q} (-1)^{i-m} H_{i,i-m}[h_1, h_2, \ldots, h_{i+1}; f(x_0 + x)]$$

pentrucă, ținând seama de (72), avem [1])

$$[x_1', x_2', \ldots, x_{i+1}'; f(x)] = [h_1, h_2, \ldots, h_{i+1}; f(x_0 + x)].$$

Deducem următoarea formulă de derivare numerică

$$f^{(m)}(x_0) = m! \sum_{i=m}^{p} (-1)^{i-m} H_{i,i-m}[h_1, h_2, \ldots, h_{i+1}; f(x_0 + x)] + R. \qquad (128)$$

Dacă ne folosim de formula (21), deducem

$$L(x_1', x_2', \ldots, x_p'; f \mid x) = L(x_0, x_1, x_2', \ldots, x_p'; f \mid x) + \\ + (x_{p+1}' - x_0)(x - x_1')(x - x_2') \ldots (x - x_p')[x_0, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f]$$

de unde obținem formula de derivare numerică

$$f^{(m)}(x_0) = m! \sum_{j=m-1}^{p-1} (-1)^{i-m+1} H_{i,i-m+1}[0, h_1, h_2, \ldots, h_{i+1}; f(x_0 + x)] + \qquad (129) \\ + m!\, h_{p+1} H_{p,p-m}[0, h_1, h_2, \ldots, h_{p+1}; f(x_0 + x)] + R.$$

[1]) Pentru mai multă claritate, punem în evidență și variabila x în notația diferenței divizate (și a polinomului de interpolare).

50. Să vedem cum trecem la cazul $r > 0$. Din formula generală [1])

$$L(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; fg \mid x) = \sum_{i=0}^{p} L(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; l_i(x)\, g(x) \mid x)[x_1', x_2', \ldots, x_{i+1}'; f] \tag{130}$$

dacă x_0 este diferit de noduri, deducem

$$L\left(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; \frac{f(x)}{(x-x_0)^r} \mid x\right) = \sum_{i=0}^{p} L\left(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; \frac{l_i(x)}{(x-x_0)^r} \mid x\right)[x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f].$$

Ţinând seama de formulele (86) şi (113), obţinem

$$L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f \mid x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} c_j f^{(j)}(x_0) + \frac{(m+r)!}{m!} \sum_{i=0}^{p} I_i^{(r)}[h_1, h_2, \ldots, h_{p+1}; f(x_0 + x)]$$

unde coeficienţii $I_i^{(r)}$ sunt daţi de formula

$$I_i^{(r)} = L^{(m)}\left(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; \frac{l_i(x)}{(x-x_0)^r} \mid x_0\right), \quad i = 0, 1, \ldots, p.$$

Din formula (130) se mai deduce

$$L(x_0, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; fg \mid x) = L(x_0, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; g \mid x) f(x_0) + (x - x_0) \sum_{i=0}^{p} L(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; l_i(x) g(x) \mid x)[x_0, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; f].$$

Inlocuind aici funcţia $g(x)$ cu $(x - x_0)\, g(x)$, deducem [2])

$$L(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; fg \mid x) = L(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; g \mid x) f(x_0) + \sum_{i=0}^{p} L(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; l_i(x)(x - x_0) g(x) \mid x)[x_0, x_1', x_2', \ldots, x_{i+}$$

Avem prin urmare şi formula

$$L\left(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; \frac{f(x)}{(x-x_0)^r} \mid x\right) = L\left(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; \frac{1}{(x-x_0)^r} \mid x\right) f(x_0) + \sum_{i=0}^{p} L\left(x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'; \frac{l_i(x)}{(x-x_0)^{r-1}} \mid x\right)[x_0, x_1', x_2', \ldots, x_{i+1}'; f].$$

[1]) Egalitatea rezultă din faptul că cele două polinoame de gradul p, din membrul întâiu şi al doilea, coincid în nodurile x_i'.

[2]) Se poate proceda ca la formula (130).

Deducem de aici că, dacă $r > 0$ și dacă x_0 este diferit de noduri,

$$L^{(m+r)}(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{r}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}; f \mid x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} c_j f^{(j)}(x_0) +$$

$$+ \frac{(m+r)!}{m!}\left\{I_0^{(r)} f(x_0) + \sum_{i=0}^{p} I_i^{(r-1)}[0, h_1, h_2, \ldots, h_{i+1}; f(x_0 + x)]\right\}.$$

In definitiv avem următoarele formule de derivare numerică

$$f^{(m+r)}(x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} c_j f^{(j)}(x_0) +$$

$$+ \frac{(m+r)!}{m!} \sum_{i=0}^{p} I_i^{(r)}[h_1, h_2, \ldots, h_{i+1}; f(x_0 + x)] + R \tag{131}$$

$$f^{(m+r)}(x_0) = \sum_{j=0}^{r-1} c_j f^{(j)}(x_0) +$$

$$+ \frac{(m+r)!}{m!}\left\{I_0^{(r)} f(x_0) + \sum_{i=0}^{p} I_i^{(r-1)}[0, h_1, h_2, \ldots, h_{i+1}; f(x_0 + x)] + R.\right. \tag{132}$$

Coeficienții $I_i^{(r)}$ se pot calcula cu ajutorul formulei de recurență

$$I_i^{(r)} = I_{i+1}^{(r+1)} + h_{i+1} I_i^{(r+1)} \quad (I_{p+1}^{(r)} = 0)$$

dând lui r, în mod succesiv, valorile $-1, 0, 1, 2, \ldots$ și observând că

$$I_0^{(0)} = I_1^{(0)} = \ldots = I_{m-1}^{(0)} = 0, \; I_i^{(0)} = m!\,(-1)^{i-m} H_{i,\,i-m}$$

$$i = m, m+1, \ldots, p.$$

Coeficienții c_j, $j = 0, 1, \ldots, r-1$ au fost calculați mai sus.

51. Formula (131) este comodă, în particular, dacă nodurile sunt echidistante, iar formula (132), dacă nodurile și punctul de derivare formează un sistem echidistant.

Pentru a exemplifica cele spuse, vom considera un caz particular.

Să presupunem că $r = 0$, $m = 1$, că nodurile sunt echidistante și simetrice față de x. Folosind notațiile (94), punând

$$t_i = (2i-1)h, \quad i = 1, 2, \ldots, q \tag{133}$$

și observând că

$$H_{i,\,i-1} = h_1 h_2 \ldots h_i\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_i}\right)$$

deducem

$$H_{i,\,i-1} = \begin{cases} 0, & \text{pentru } i \text{ par} \\ (-1)^{\frac{i-1}{2}} 1^2 \cdot 3^2 \ldots (i-2)^2 h^{i-1}, & \text{pentru } i \text{ impar} \end{cases} \tag{134}$$

$$(H_{1,\,0} = 1)$$

Formula (128) devine

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^{q} H_{2i-1,\,2i-2}[h_1, h_2, \ldots, h_{2i};\ f(x_0 + x)] + R.$$

Introducând notația obișnuită a diferențelor și ținând seama de (94), (133), deducem

$$[h_1, h_2, \ldots, h_{2i};\ f(x_0 + x)] = \frac{\Delta_{2h}^{2i-1} f(x_0 - [2i-1]h)}{(2i-1)!\,(2h)^{2i-1}},\quad i = 1, 2, \ldots, q.$$

Dacă folosim și relațiile (134), avem în definitiv formula de derivare numerică

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^{q} \frac{(-1)^{i-1}(2i-2)!}{(2i-1)\,[(i-1)!]^2\,2^{4i-3}\,h}\,\Delta_{2h}^{2i-1} f(x_0 - [2i-1]h) +$$

$$+ 1^2 \cdot 3^2 \ldots (2q-1)^2\,h^{2q} D_{2q+1}[f].$$

Să presupunem că nodurile sunt simetrice față de x_0 și că împreună cu acest punct formează un sistem de puncte echidistante. Atunci putem utiliza formula (129).

In loc de (133) luăm

$$t_i = ih,\quad i = 1, 2, \ldots q.$$

Avem atunci

$$H_{i,i} = \begin{cases} (-1)^{\frac{i+1}{2}} \left[\left(\dfrac{i-1}{2}\right)!\right]^2 \dfrac{i+1}{2}\,h^i, & \text{pentru } i \text{ impar} \\ (-1)^{\frac{i}{2}} \left[\left(\dfrac{i}{2}\right)!\right]^2 h^i, & \text{pentru } i \text{ par} \end{cases}$$

și

$$[0, h_1, h_2, \ldots, h_{i+1};\ f] = \begin{cases} \dfrac{\Delta_h^{i+1} f\left(x_0 - \dfrac{i+1}{2}\,h\right)}{(i+1)!\,h^{i+1}}, & \text{pentru } i \text{ impar} \\ \dfrac{\Delta_h^{i+1} f\left(x_0 - \dfrac{i+2}{2}\,h\right)}{(i+1)!\,h^{i+1}}, & \text{pentru } i \text{ par} \end{cases}$$

și deducem formula de derivare numerică

$$f'(x_0) = \sum_{i=0}^{q-1} \frac{(-1)^i (i!)^2}{(2i+1)!\,2h}\Big[2\Delta_h^{2i+1} f(x_0 - [i+1]h) +$$

$$+ \Delta_h^{2i+2} f(x_0 - [i+1]h)\Big] + (q!)^2 D_{2q+1}[f].$$

Secția de Științe Matematice a Filialei Academiei R.P.R., Cluj

ОТНОСИТЕЛЬНО ОСТАТКА В НЕСКОЛЬКИХ ФОРМУЛАХ ЧИСЛОВОЙ ДЕРИВАЦИИ (I)

НЕСПОЛЬКО СВОЙСТВ ФОРМУЛ ЧИСЛОВОЙ ДЕРИВАЦИИ МАКСИМАЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Формула числовой деривации есть формула вида (1) и служит для вычисления приближенного значения производной порядка $m+r$ функции $f(x)$ в точке x_0. Приближенное значение $f^{(m+r)}(x_0)$ равно сумме (без R) второго члена формулы (1), и R есть *остаток* числовой деривации. Узлы (2) и точки деривации x_0 суть различны и имеют соответственно порядки множественности $r, r_1, r_2, \ldots, r_s$. Сумма $r_1+r_2+\ldots+r_s=p+1$ есть общее число узлов.

Сумма максимальных рядов дериваций, эффективно вступающих во второй член, увеличенная числом s различных узлов и еще с 1, когда $r>0$, есть порядок формулы (1). Остаток $R=R[f]$ есть аддитивный и гомогенный функционал относительно функции $f(x)$. *Степень точности* формулы (1) или функционала $R[f]$ равна наименьшему целому n, такому, чтобы $R[f]$ был нулевым для любого многочлена n степени и отличен от нуля по меньшей мере для одного многочлена степени $n+1$, следовательно такому, чтобы формула (1) была точна без остатка для любого многочлена n степени, но не для всех многочленов $n+1$ степени. Важной формулой (1) является формула (E), которая получается подстановкой на место функции $f(x)$ ее многочлена интерполяции Лагранжа-Гермита, соответствующего узлам (2) и точке x_0, повторенной r раз. В настоящей работе особо изучается формула (E). Подчеркивается переход от случая $r=0$ к случаю $r>0$, что в общем не представляет затруднений.

В § 1 доказывается, что среди всех формул (1), полученных изменением коэффициентов a_j, $a_{i,j}$ этой формулы, формула (E) обладает самой большой степенью точности (теорема 2). Поэтому будем называть формулу (E) формулой *максимальной точности*. В общем степень точности формулы (E) равна $p+r$ и ее порядок равен $p+r+1$. Степень точности равна порядку и эти два числа равны $p+r$ или $p+r+1$, тогда и только тогда, если x_0 есть корень, отличный от узла одного из многочленов (16), где $l(x)$ есть многочлен (3) имеющий в качестве корней узлы (теорема 3). Будем говорить, что формула (E) есть *исключительная*, если ее порядок равен ее степени точности. Хотя, по меньшей мере по внешнему виду, исключительность представляет три различных вида, в зависимости от увеличения степени точности на единицу или уменьшения порядка на единицу, доказывают (№№ 10, 11), что эти три вида возвращаются друг к другу. Все доказательства даны без использования коэффициентов формулы интерполяции (10). Когда узлы (2) и числа m, r даны, существует конечное число точек x_j, для которых формула (E) становится исключительной. Определяется это число (теорема 4) и по-

казывается (теорема 5), что в общем существуют исключительные формулы. Формула (E) называется *сократимой*, когда она зависит отчетливо лишь от производных функции $f(x)$. §1 заканчивается определением сократимых формул (теорема 6).

В § 2 приводятся несколько соображений относительно остатка. Аддитивный и гомогенный функционал $R[f]$, порядка точности n, будем называть *простой формой*, когда имеются (31) с $M \neq 0$, независимым от функции $f(x)$, где ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, являются $n+2$ различными точками интервала (открытого) определения функции $f(x)$. Функция $f(x)$ полагается непрерывной в этом интервале (закрытом). Для того чтобы остаток был простой формы, необходимо и достаточно (критерий C), чтобы имелось $R[f] \neq 0$ для любой выпуклой функции $f(x)$ порядка n. Изучаются некоторые свойства функционалов (34) простой формы и задача решается полностью для случая, когда степень точности есть -1, 0 или 1 (теорема 9, 10 и 11). Функционал (34), степень точности которого есть r, может быть простой формы лишь тогда, когда он четко содержит производные порядка $> n+1$ функции $f(x)$ (теорема 8).

В §§ 3 и 4 изучаются несколько случаев, когда можно утверждать, что остаток формулы (E) простой формы. Если $R[f]$, порядка точности $p+(x=0)$, принимает вид линейной комбинации разделенных разностей

$$(x=x_0),\ [\underbrace{x, x \ldots, x}_{i+1}, x_1', x_2', \ldots, x_{p+1-i}'; f], i = 0, 1, \ldots, m,$$

где $x_1', x_2', \ldots, x_{p+1}'$

суть узлы (2), записанные каждый со своей соответствующей множественностью, тогда этот остаток есть простой формы, если коэффициенты $A_{m,i}(x_0)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, данные формулой (74) одинакового знака (теорема 14). Имеется аналогичное свойство, когда формула есть исключительная, степени точности $p + r + 1$ (теорема 15). В частности находят в более общей форме, что остаток простой формы, когда x_0 находится вне наименьшего открытого интервала, содержащего узлы (теорема 16). Доказывается, и это является главным результатом настоящей работы, что остаток будет простой формы, когда в (E) узлы симметрично распределены относительно точки x_0 (теорема 17). Этот результат окончательно решает проблему остатка, в частности, в случае формул (E), происшедших от формул интерполяции с центральными разностями. Далее находят вновь, другим путем и в более общей форме, полное обсуждение остатка формулы (E) в случае $m=1$ (теорема 18). Наконец доказывают, что исключительные формулы для $m=2$ $[l''(x_0) = 0]$ имеют остаток простой формы.

В § 5 точно приведены формулы (E). Показывается как можно получить эти выражения, и выявляются, помимо нескольких общих простых формул, все сократимые, исключительные и симметричные формулы, степень точности которых $\leqq 5$.

SUR LE RESTE DANS QUELQUES FORMULES DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE (I)

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FORMULES DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE D'EXACTITÉ MAXIMUM

(RÉSUMÉ)

Une formule de dérivation numérique est une formule de la forme (1) et sert à calculer une valeur approximative de la dérivée d'ordre $m+r$ de la fonction $f(x)$ au point x_0. La valeur approximative de $f^{(m+r)}(x_0)$ est égale à la somme (sans R) du second membre de la formule (1) et R est le *reste* de cette formule de dérivation numérique. Les noeuds (2) et le point de dérivation x_0 sont distincts et ont respectivement les ordres de multiplicité $r, r_1, r_2, \ldots, r_s$. La somme $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = p + 1$ est le nombre total des noeuds. La somme des ordres maxima de dérivation qui interviennent effectivement dans le second nombre, augmentée du nombre s des noeuds distincts et de 1 si $r > 0$, est *l'ordre* de la formule (1). Le reste $R = R[f]$ est une fonctionnelle additive et homogène par rapport à la fonction $f(x)$. Le *degré d'exactitude* de la formule (1), ou de la fonctionnelle $R[f]$, est égal au plus petit entier n, tel que $R[f]$, soit nul pour tout polynôme du degré n et différent de zéro pour au moins un polynôme du degré $n+1$, donc tel que la formule (1) soit exacte, sans reste, pour tout polynôme du degré n, mais non pas pour tous les polynômes du degré $n+1$. Une formule importante (1) est la formule (E) obtenue en remplaçant la fonction $f(x)$ par son polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite, correspondant aux noeuds (2) et au point x_0, répété r fois. On s'occupe spécialement, dans ce travail, de la formule (E). On insiste partout sur le passage du cas $r = 0$ au cas $r > 0$, ce qui se fait assez facilement en général.

Dans le § 1, on démontre que, parmi toutes les formules (1), obtenues en faisant varier les coefficients $a_j, a_{i,j}$; de cette formule, la formule (E) a le plus grand degré d'exactitude (théorème 2).

La formule (E) sera donc appelée: formule d'*exactitude maximum*. En général, le degré d'exactitude de la formule (E) est égal à $p+r$ et son ordre, à $p+r+1$. Le degré d'exactitude est égal à l'ordre, et ces deux nombres sont égaux à $p+r$ ou $p+r+1$ si, et seulement si, x_0 est une racine, différente d'un noeud, de l'un des polynômes (16), où $l(x)$ est le polynôme (3) ayant les noeuds pour racines (théorème 3). La formule (E) est dite *exceptionnelle*, si son ordre est égal à son degré d'exactitude. Quoique, en apparence du moins, l'exceptionnalité présente trois aspects différents, suivant que le degré d'exactitude augmente d'une unité, ou que l'ordre diminue d'une unité, on démontre (Nos 10, 11) que ces trois aspects reviennent l'un à l'autre. Toutes les démonstrations sont faites sans utiliser les coefficients de la formule d'interpolation (10). Quand les noeuds (2) et les nombres m, r sont donnés, il existe un nombre fini de points x_0, pour lesquels la formule (E) devient exceptionnelle. On détermine ce nombre (théorème 4) et on montre (théorème 5), qu'il existe en général, des formules exceptionnelles. Une formule (E) est dite *réductible* si elle ne dépend explicitement que des dérivées de la fonction $f(x)$. La détermination des formules réductibles (théorème 6) termine le § 1.

Dans le § 2, on fait quelques considérations sur le reste. Une fonctionnelle additive et homogène $R[f]$, de degré d'exactitude n, est dite de *forme simple* si l'on a (31) où $M \neq 0$ est indépendant de la fonction $f(x)$, les ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, étant $n+2$ points distincts de l'intervalle (ouvert) de définition de la fonction $f(x)$. La fonction $f(x)$ est supposée continue dans cet intervalle (fermé). Pour que le reste soit de forme simple, il faut, et il suffit, (critère C) que l'on ait $R[f] \neq 0$ pour toute fonction $f(x)$ convexe, d'ordre n. On étudie quelques propriétés des fonctionnelles (34) de forme simple et on résout complètement le problème, dans le cas où le degré d'exactitude est —1, 0 ou 1 (théorèmes 9, 10 et 11). La fonctionnelle (34), dont le degré d'exactitude est n, ne peut être de forme simple que si elle ne contient pas explicitement, les dérivées d'ordre $> n+1$ de la fonction $f(x)$ (théorème 8).

Dans les §§ 3 et 4, on étudie quelques cas, pour lesquels on peut affirmer que le reste de la formule (E) est de forme simple. Si $R[f]$, de degré d'exactitude $p + r \leqq 0$ est mis sous la forme d'une combinaison linéaire des différences divisées $(x = x_0)$

$$[\underbrace{x, x \ldots x}_{i+1}, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1-i}; f] \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, m$$

où $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}$ sont les noeuds (2), écrit chacun avec sa multiplicité respective, alors ce reste est de forme simple si les coefficients $A_{m,i}(x_0)$, $i=0, 1, \ldots m$, donnés par les formules (74), sont du même signe (théorème 14). On a une propriété analogue, si la formule est exceptionnelle du degré d'exactitude $p + r + 1$ (théorème 15). En particulier, on trouve, sous une forme plus générale que le reste est de forme simple si x_0 est en dehors du plus petit intervalle ouvert qui contient les noeuds (théorème 16). On démontre également, et c'est le principal résultat de ce travail, que le reste est de forme simple, si dans (E) les noeuds sont symétriquement distribués par rapport au point x_0 (théorème 17). Ce résultat résout complètement le problème du reste, en particulier, dans le cas des formules (E), provenant des formules d'interpolation avec des différences centrales. Par une autre voie et sous une forme plus générale, on retrouve en suite, la discussion complète du reste de la formule (E), dans le cas $m=1$ (théorème 18). On démontre enfin que les formules exceptionnelles pour $m=2$ $[l''(x_0) = 0]$ ont un reste de forme simple.

Dans le § 5, on donne une forme explicite aux formules (E). On montre comment on peut obtenir ces expressions et on met en évidence, outre quelques formules générales simples, toutes les formules réductibles, exceptionnelles et symétriques dont le degré d'exactitude est $\leqq 5$.

BIBLIOGRAFIE

1. Birkhoff G. D., *General mean value and remainder theorems.* Transac. Amer. Math. Soc., 1906, 7, 107—136.
2. Hermite Ch., *Sur la formule d'interpolation de Lagrange.* Journ. für Math., 1877, 84, 70—75.
3. Markoff A. A., *Differenzenrechnung*, 1896.

4. Micheladze S. E., *Cislennoe integrirovanie.* Uspehi Mat. Nauc., 1948, III, 6 (28), 3—88.
5. Norlund N. E., *Differenzenrechnung.* 1924.
6. Popoviciu T., *Introduction à la théorie des différences divisées*, Bull. Math. Soc. Roum. Sc. 1940, 42, 65—78.
7. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (XX). *Ibid.* 1942, 43, 85—141.
8. — *Sur certaines inégalités entre les zéros, supposés tous réels, d'un polynôme et ceux de sa dérivée.* Annales Sc. de l'Univ. Jassy, 1948, XXX, 191—218.
9. — *Asupra restului în unele formule de aproximație ale analizei.* Lucrările Sesiunii Generale Științifice a Academiei R.P.R., 1950, p. 183—186.
10. Steffensen J. F. *Interpolation*, 1927.
11. Zemplen Gy., *Etude sur l'interpolation et la décomposition des fonctions rationnelles en fractions partielles.* Archiv der Mathematik und Physik, 1905, (3) 8, 214—226.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul III, Nr. 1—2, 1952

STUDIUL DIRECŢIILOR ÎNFĂŞURĂTOARE ÎNTR'UN SPAŢIU CU CONEXIUNE AFINĂ

DE

MILLU ROTH

INTRODUCERE

In acest memoriu vom studia o generalizare a noţiunii de direcţii concurente într'un spaţiu riemannian, noţiune introdusă de Acad. Al. Myller.

In 1917, T. Levi-Civită [1], [2] a introdus pentru o varietate riemanniană, noţiunea de direcţii paralele de-a-lungul unei curbe, pentru acele direcţii care sunt tangente la varietate de-a-lungul curbei, iar după ce se efectuează desfăşurarea varietăţii pe diversele spaţii euclidiene tangente ei în punctele curbei, devin paralele în sensul obişnuit al cuvântului.

In 1924, Acad. Al. Myller [3], [4] a dat o generalizare a noţiunii datorite lui T. Levi-Civită, introducând noţiunea de direcţii concurente de-a-lungul unei curbe, pentru acele direcţii, care, după desfăşurare, devin concurente în sensul obişnuit al cuvântului.

Noţiunea astfel introdusă s'a dovedit deosebit de rodnică; ea a fost întrebuinţată cu folos de către O. Mayer [5], care cu ajutorul ei a studiat diverse reţele pe suprafeţele ordinare, reuşind să unifice o mare diversitate de rezultate clasice şi să pună în evidenţă altele noi; de către A. Haimovici care în *Teza* sa [6] a generalizat ideea Acad. Myller pentru un spaţiu conform; de Agostinelli [7] care i-a cercetat unele proprietăţi; de asemenea matematicianul sovietic P. A. Şirocov (Kazan) [8] a cercetat spaţiile riemanniene, în care există un câmp de direcţii concurente.

In această lucrare, ne propunem să studiem o generalizare a noţiunii introduse de Al. Myller, punând condiţia ca direcţiile considerate, după desfăşurarea varietăţii să înfăşure o curbă, adică două direcţii infinit vecine să fie incidente după desfăşurare. Astfel, definim noţiunea de *direcţii înfăşurătoare în sens Myller.*

După cum se remarcă imediat, această definiţie intrinsecă se poate da nu numai pentru spaţii metrice, ci şi pentru spaţiile cu conexiune afină.

Noţiunea de direcţie înfăşurătoare în sens Myller într'un spaţiu cu conexiune afină, când direcţiile înfăşură un punct, ne dă noţiunea de *direcţii concurente în sens Myller într'un spaţiu cu conexiune afină*, ceea ce generalizează definiţia dată de Al. Myller.

De sigur, când punctul înfășurat este la infinit în spațiu tangent, regăsim paralelismul atașat conexiunii.

Lucrarea cuprinde patru capitole;

In primul capitol, se studiază problemele legate de definiția intrinsecă a direcțiilor înfășurătoare, respectiv concurente într'un spațiu cu conexiune afină, se introduce un parametru principal și unul normal, invariant legat de problemă și se studiază problema olonomilor acestor transporturi.

Se consideră de asemenea cazul metric, dându-se și unele exemple.

Capitolul al doilea este consacrat studiului problemei în varietăți subordonate unui spațiu riemannian; studiul se face atât cu ajutorul ecuațiilor lineare, cât și cu ajutorul bi- și trivectorilor asociați, definiți în acest capitol. Se studiază de asemenea transporturile în varietăți tangente. Tot în acest capitol se deduce o definiție extrinsecă a înfășurării și din aceasta se regăsesc ecuațiile înfășurării. Astfel se generalizează ideile lui B i a n c h i [9], [10].

Capitolul al treilea se ocupă cu relațiile metrice care există în cazul unor perechi de serii de direcții fiecare înfășurătoare, concurentă sau paralelă de-a-lungul aceleiași curbe.

De asemenea, se studiază diverse expresii și relații între curburile care se definesc, precum și relația dintre parametrul principal și arcul curbei de transport în cazul unui spațiu metric.

Capitolul al patrulea este dedicat studiului rețelelor înfășurătoare, într'un A_2 și într'un A_n cu conexiune afină sau riemanniană.

Se dau definițiile rețelelor și ecuațiilor cu ajutorul cărora se pot găsi acestea.

Rețelele acestea generalizează pe de o parte rețelele introduse de C e b î ș e v [11] și de M a y e r [5], iar pe de altă parte rețelele conjugate [12], [13], [14].

Ecuațiile care dau aceste rețele generalizează pe de o parte ecuațiile lui Servant [15], [16], iar pe de altă parte ecuația lui Laplace.

Suprafețele care poartă aceste rețele generalizează pe de o parte suprafețele de translație introduse de K. M. P e t e r s o n [17], [18], [19], [20] pentru un spațiu euclidian și generalizate de B o m p i a n i [21] pentru un spațiu riemannian în raport cu paralelismul lui L e v i - C i v i t à și de M y l l e r [3] pentru același spațiu în raport cu concurența, iar pe de altă parte ele generalizează suprafețele purtătoare de rețele conjugate.

Unele rezultate ale acestei lucrări au fost comunicate în cadrul Sesiunii Generale Științifice a Academiei R. P. R., din 1950 [22] și în cadrul Sesiunii Științifice a Academiei R.P.R., din 1951.

Lucrarea aceasta a fost realizată în cadrul Secțiunii a II-a a Institutului Matematic al Academiei R.P.R., sub conducerea Acad. G r. C. M o i s i l; ea s'a bucurat de toată atenția Prof. O. M a y e r din Iași, ceea ce a contribuit la îmbunătățirea ei.

CAPITOLUL I

STUDIUL INTRINSEC AL PROBLEMEI

A. CAZUL SPAȚIULUI CU CONEXIUNE AFINĂ

§ 1. Definiția intrinsecă a înfășurării în sens Myller într'un spațiu cu conexiune afină. Fie A_n un spațiu cu conexiune afină, n-dimensional, în care coordonatele unui punct sunt $u^i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ și în acest spațiu fie o curbă C dată de ecuațiile

$$u^i = u^i(\sigma) \tag{I,1}$$

unde σ este un parametru pe curba C.

In punctele curbei C, în spațiul A_n considerăm o serie de ∞^1 direcții g, date de vectori $\theta^i(\sigma) \neq 0\ (i = 1, 2, \ldots, n)$, definiți până la un factor arbitrar $h(\sigma) \neq 0$.

Notăm tot cu g dreapta de direcție g care pornește din punctul M al curbei C și se află în spațiul afin A_n^M, n-dimensional, tangent spațiului cu conexiune afină A_n în punctul M.

Vom presupune că această serie de direcții g are proprietatea că la desfășurarea spațiilor afine A_n^M pe unul din ele, cu alte cuvinte făcând harta afină a diverselor repere atașate punctelor M ale curbei C, dreptele g rămân tangente unei curbe Γ, ceea ce revine la a spune că două drepte infinit vecine ale seriei date devin incidente după ce se efectuează desfășurarea spațiilor A_n^M. Pentru aceasta este necesar și suficient ca, pe fiecare dreaptă g care trece prin punctul M al curbei C, să existe un punct M' care, în spațiul desfășurării, adică în hartă, să descrie o curbă tangentă dreptei respective. Deoarece, într'un caz particular al problemei considerate, se regăsesc rezultatele obținute de Al. Myller [3], [4], numim direcțiile *g-direcții înfășurătoare în sensul Acad. Myller într'un spațiu cu conexiune afină* : pe scurt le vom numi *direcții înfășurătoare.*

Punctul M', să-l numim *punct principal al dreptei* pe care se află, iar curba Γ, s'o numim *curbă asociată seriei de drepte* considerate.

Dacă în hartă coordonatele punctului M' sunt $\bar{u}^i$, avem:

$$\bar{u}^i = u^i + \rho\theta^i \tag{I,2}$$

unde

$$MM' = \xi^i = \rho\theta^i$$

Condiția impusă lui M' arată că trebue să existe niște funcții $\rho(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$ așa că

$$d\bar{u}^i = \lambda\theta^i\, d\sigma\,; \tag{I,3}$$

diferențiind relația (I,2) cu ajutorul operatorului diferențial obișnuit în hartă, și deci cu operatorul diferențierii absolute D în spațiul A_n, deducem din (I,2), (I,3):

$$D(\rho\theta^i) + du^i = \lambda\theta^i\, d\sigma \tag{I,4}$$

care sunt ecuațiile problemei.

La aceste ecuații putem ajunge și în alt mod, pornind dela condiția de incidență a două drepte infinit vecine ale seriei date.

Fie M, M^* două puncte infinit vecine ale curbei $C, -g, g^*$ direcțiile și M', M'^* punctele principale corespunzătoare. Condiția problemei se exprimă prin faptul că patrulaterul închis $MM^*M'^*M'M$ este în cazul nostru un triunghiu, deoarece laturile MM' și $M'M'^*$ sunt coliniare.

Scriind:

$$\overrightarrow{MM^*} + \overrightarrow{M^*M'^*} + \overrightarrow{M'^*M'} + \overrightarrow{M'M} = 0, \tag{I,5}$$

ajungem iar la (I,4).

Ecuațiile (I,4) se mai scriu:

$$\rho\frac{d\theta^i}{d\sigma} + u^i + (\dot{\rho} - \lambda)\,\theta^i + \rho\Gamma^i_{jk}\theta^j\dot{u}^k = 0 \tag{I,6}$$

unde punctele arată derivarea în raport cu σ, sau

$$D\theta^i + \frac{du^i}{\rho} = \theta^i\left(\frac{\lambda d\sigma}{\rho} - d\log\rho\right). \tag{I,7}$$

Dacă în ecuația (I,4) se fac substituțiile:

$$\theta^i = h\theta_1^i \qquad \sigma = \sigma(\sigma_1) \tag{I,8}$$

este suficient să considerăm și

$$\rho_1 = \rho h, \qquad \lambda_1 = \lambda h\frac{d\sigma}{d\sigma_1}, \tag{I,9}$$

adică

$$d\tau = \frac{\lambda d\sigma}{\rho} = \frac{\lambda_1 d\sigma_1}{\rho_1} = d\tau_1, \tag{I,10}$$

pentru ca ecuația (I,4) să subsiste în noile condiții. Ecuațiile direcțiilor considerate sunt deci invariante față de o schimbare de parametru σ și față de schimbarea vectorului θ^i cu un altul colinear, ceea ce confirmă caracterul geometric al noțiunii.

Această ultimă relație (I,10) care arată că parametrul τ este invariant, atât la o schimbare a factorului h cât și a lui σ, se mai poate deduce și din

$$\xi^i = \rho\theta^i = \rho_1\theta_1^i; \qquad d\bar{u}^i = \lambda\theta^i d\sigma = \lambda_1\theta_1^i d\sigma_1. \tag{I,11}$$

Așa dar, invarianța lui τ la schimbarea lui h și σ exprimă analitic faptul geometric că M' este invariant legat de M, indiferent de sistemul de parametri aleși.

Dacă facem doar o schimbare a parametrului σ, și considerăm deci $h = 1$, avem $\rho = \rho_1$ și

$$\lambda_1 = \frac{d\sigma}{d\sigma_1}\lambda \tag{I,12}$$

ceea ce arată caracterul covariant al lui λ.

Dacă facem o schimbare a lui λ în λ_1, se vede că este suficient să considerăm parametrul σ_1 dat de (I,12) pentru ca ecuațiile (I,4) să se păstreze. Dacă facem doar o schimbare a factorului h, și considerăm deci $\sigma = \sigma_1$, avem

$$\frac{\lambda}{\rho} = \frac{\lambda_1}{\rho_1} \tag{I,13}$$

Ecuațile (I,7) se mai pot scrie sub formă echivalentă:

$$\frac{D\theta^i}{d\sigma} = \mu\theta^i + \nu\frac{du^i}{d\sigma} \tag{I,14}$$

cu

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} - \frac{d\log\rho}{d\sigma}, \quad \nu = -\frac{1}{\rho}. \tag{I,15}$$

La o schimbare de coordonate u^i în u_1^i,

$$\frac{\partial u_1^i}{\partial u^i}\left(\frac{D\theta^i}{d\sigma} - \mu\theta^i - \nu\frac{du^i}{d\sigma}\right) = \frac{D\theta_1^i}{d\sigma} - \mu\theta_1^i - \nu\frac{du_1^i}{d\sigma} = 0$$

ceea ce arată că ecuațiile (I,14) se păstrează cu

$$\mu_1 = \mu, \quad \nu_1 = \nu.$$

La o schimbare de parametru σ în σ_1,

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_1}\cdot\left(\frac{D\theta^i}{d\sigma} - \mu\theta^i - \nu\frac{du^i}{d\sigma}\right) = \frac{D\theta^i}{d\sigma_1} - \mu\frac{d\sigma}{d\sigma_1}\cdot\theta^i - \nu\frac{du^i}{d\sigma_1} = 0$$

deci ecuațiile (I,14) se păstrează cu

$$\mu_1 = \mu\frac{d\sigma}{d\sigma_1}, \quad \nu_1 = \nu \tag{I,16}$$

ceea ce arată caracterul covariant al lui μ și invariant al lui ν, în raport cu schimbarea lui σ.

La o schimbare a vectorului θ^i cu un altul colinear $\theta = h\theta_1^i$, ecuațiile (I,14) devin

$$\frac{D\theta_1^i}{d\sigma} = \mu_1 \theta_1^i + \nu_1 \frac{du^i}{d\sigma}$$

cu

$$\mu_1 = \mu_1 - \frac{d \log h}{d\sigma}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{h}. \tag{I,17}$$

Dacă se face schimbarea $h\theta^i = h_1\theta_1^i$, avem același rezultat cu

$$\mu_1 = \mu - \frac{d}{d\sigma}\log\left(\frac{h_1}{h}\right), \quad \nu_1 = \frac{h}{h_1}\nu. \tag{I,18}$$

Geometric, condiția impusă seriei de direcții revine la aceea că vectorii

$$\frac{D\theta^i}{d\sigma}, \quad \theta^i, \frac{du^i}{d\sigma}$$

să fie dependenți, adică planul primilor doi să fie tangent curbei C date. Acest plan se află în A_n^M și este unic determinat de seria de direcții, independent de alegerea lui h și σ; el constitue generalizarea afină a direcției asoc ate de paralelism a lui Bianchi [9], [10] și din această cauză poate fi numit *plan asociat seriei de direcții considerate*. El este nedeterminat numai în cazul în care

$$\frac{D\theta^i}{d\sigma} = \mu\theta^i,$$

adică seria de direcții este paralelă în sens absolut, în raport cu conexiunea lui A_n.

Așa dar, avem următoarea

T e o r e m ă I: *Condiția necesară și suficientă pentru ca o serie de direcții definite de vectorii* θ^i, *de-a-lungul curbei* C *în* A_n, *să fie înfășurătoare, este ca*

$$\theta^i, \quad \frac{D\theta^i}{d\sigma}, \frac{du^i}{d\sigma}$$

să fie coplanari.

Condiția aceasta, când $n \geqslant 3$, revine la anularea trivectorului

$$r^{ijk} = \begin{vmatrix} D\theta^i & \theta^i & du^i \\ D\theta^j & \theta^j & du^j \\ D\theta^k & \theta^k & du^k \end{vmatrix} \tag{I,19}$$

care se poate ataşa oricărei serii de direcții g.

In locul lui r^{ijk}, putem considera trivectorul:

$$p^{ijk} = \frac{1}{(d\sigma)^3} \cdot \begin{vmatrix} D_1\theta^i & D_2\theta^i & D_3\theta^i \\ D_1\theta^j & D_2\theta^j & D_3\theta^j \\ D_1\theta^k & D_2\theta^k & D_3\theta^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Omega_1^i & \Omega_2^i & \Omega_3^i \\ \Omega_1^j & \Omega_2^j & \Omega_3^j \\ \Omega_1^k & \Omega_2^k & \Omega_3^k \end{vmatrix} \tag{I,20}$$

unde

$$\begin{aligned} \Omega_1^i d\sigma &= D_1\theta^i = D\theta^i + du^i - \lambda\theta^i d\sigma \,(\lambda \neq 0) \\ \Omega_2^i d\sigma &= D_2\theta^i = D\theta^i + du^i \\ \Omega_3^i d\sigma &= D_3\theta^i = D\theta^i. \end{aligned} \tag{I,21}$$

La o schimbare a coordonatelor u^i în u_1^i, avem:

$$p_1^{ijk} = \frac{du_1^i}{du^l} \cdot \frac{du_1^j}{du^m} \cdot \frac{du_1^k}{du^n} p^{lmn} = \sum_{(l,\,m,\,n)} \frac{\partial(u_1^i,\, u_1^j,\, u_1^k)}{\partial(u^l,\, u^m,\, u^n)}\, p^{lmn}; \tag{I,22}$$

suma ultimă fiind extinsă la toate combinațiile de câte 3 din indicii $1,2,\ldots,n$. Anularea trivectorului p^{ijk} este independentă de factorul h; trivectorul este covariant cu privire la σ:

$$p^{*ijk} = \left(\frac{d\sigma}{d\sigma^*}\right)^3 p^{ijk}. \tag{I,23}$$

Acest trivector îl vom numi trivector asociat seriei de direcții date, pentru parametrul σ; el devine geometric dacă θ^i și σ sunt aleși geometric.

Condiția impusă seriei de direcții este totdeauna satisfăcută, dacă $n = 1, 2$.

Sistemul

$$p^{ijk} = 0, \tag{I,24}$$

fiind echivalent cu (I,14), revine la $n-2$ ecuații independente, căci în (I,14) avem n ecuații, dintre care trebue să eliminăm pe μ, ν.

Dacă sistemul (I,24) admite soluția $\theta^i(\sigma)$, admite și soluția $h(\sigma)\theta^i(\sigma)$. Punând încă o condiție care să respecte această omogeneitate, cum ar fi

$$\theta^2 = \varphi(\sigma) \cdot \theta^1, \tag{I,25}$$

cu $\varphi(\sigma)$ o funcție dată, arbitrară, obținem un sistem de $n-1$ ecuații independente, cu n necunoscute $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n$ ale cărui integrale, de forma:

$$\theta^i = h(\sigma)\,\theta_1^i(\sigma)$$

depind de funcția $\varphi(\sigma)$. Cum funcția $h(\sigma)$ nu este esențială, ea poate fi fixată printr'o condiție neomogenă, cum ar fi $\theta^1 = 1$; rezultă că seriile înfășurătoare purtate de o curbă depind de o singură funcție arbitrară (esențială), de un argument.

Sub forma (I,6), (I,7), ecuațiile problemei, n la număr, conțin $n+2$ funcții necunoscute $\theta^i(\sigma)$, $\rho(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$, doarece $\dot{u}^i$ sunt cunoscute din (I,1). Din aceste ecuații deducem aceleași rezultate ca mai sus.

Pentru λ se ia o funcție arbitrară (neesențială), a cărei arbitrarietate nu schimbă rezultatele (deoarece la schimbarea lui λ, întovărășită de o schimbare a lui σ, dată de (I,12), ecuațiile (I,4) se păstrează), iar pentru $\rho(\sigma)$ o funcție arbitrară (esențială) de un argument; în aceste condiții, sistemul va da pe $\theta^i(\sigma)$ cu ajutorul a n constante arbitrare θ_0 care definesc o direcție inițială a seriei.

Atât din definiție, cât și din ecuațiile problemei, se constată că toate curbele sunt *autoînfășurătoare*.

§ 2. Normalizarea ecuațiilor înfășurării. Direcțiile tangente curbei C formează o serie de direcții care îndeplinesc în mod banal condițiile cerute pentru înfășurare, deoarece pentru ele

$$p^{ijk} = 0 \left(\theta^i = \frac{du^i}{d\theta},\ \rho = 0,\ \lambda = 1\right).$$

Excluzând acest caz, putem fixa geometric vectorul θ^i, luându-l egal cu vectorul principal

$$\xi^i = MM'.$$

In acest caz, avem în ecuațiile problemei $\rho = 1$ și deci (I,4) se va scrie

$$D_2\xi^i = D\xi^i + du^i = \lambda\xi^i d\sigma,$$

sau

$$\frac{D_2\xi^1}{\xi^1} = \frac{D_2\xi^2}{\xi^2} = \ldots = \frac{D_2\xi^n}{\xi^n} = \lambda d\sigma \qquad (I,26)$$

sistem care nu mai este omogen și care comportă o singură funcție arbitrară (esențială). Urmează deci că o serie de direcții care îndeplinesc condițiile impuse de problema noastră poate fi caracterizată prin posibilitatea de a defini direcțiile ei printr'o serie de vectori ξ^i care să verifice sistemul (26); în acest caz, ξ^i va fi vectorul principal al seriei.

Dacă îl cunoaștem pe ξ^i, deducem din

$$\bar{u}^i = u^i + \xi^i$$

curba asociată Γ.

Sub forma (I,26) avem un sistem de n ecuații cuprinzând $n + 1$ funcții necunoscute $u^i(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$, de îndată ce-l cunoaștem pe ξ^i; luându-l pe λ arbitrar, ceea ce nu aduce decât o schimbare a parametrului σ de pe curba C, sistemul (I,26) va da pe $u^i(\sigma)$, deci curba C, cu ajutorul a n constante arbitrare u_0^i care definesc poziția unui punct al curbei C.

Se observă că în (I,26) σ nu apare explicit, deci rapoartele sunt invariante la o schimbare a parametrului σ; așa dar,

$$\lambda d\sigma = \lambda_1 d\sigma_1$$

ceea ce se putea deduce și din (I,12); de asemenea, la o schimbare a coordonatelor u^i în u_1^i, avem:

$$\frac{D_2\xi^i}{\xi^i} = \frac{\frac{\partial u_1^j}{\partial u^i} \cdot D_2\xi^i}{\frac{\partial u_1^j}{\partial u} \cdot \xi^i} = \frac{D_2\xi_1^j}{\xi_1^j} = \lambda d\sigma \qquad (I,27)$$

conform teoremei rapoartelor egale; așa dar, atât sistemul (I,26), cât și $\lambda d\sigma = d\tau$, sunt invariante la o schimbare a lui σ, sau a lui u^i.

Fiind dată o serie înfășurătoare, putem dispune de h și σ astfel ca ecuațiile (I,4), sau (I,14), pe care ea le verifică, să capete o formă mai simplă. Pentru a-l fixa pe h geometric, vom lua ca mai sus $\xi^i = \theta^i$. Din (I,10) deducem că, dacă $\lambda \neq 0$ (adică direcțiile nu sunt concurente, precum se va arăta într'un paragraf următor) ($d\bar{u}^i \neq 0$), cu $\rho = 1$, avem:

$$d\tau = \lambda d\sigma, \tag{I,28}$$

adică, avem definit până la o constantă aditivă un parametru τ, geometric, al seriei de direcții înfășurătoare. El este invariant la schimbarea lui h, a lui σ și a lui u^i.

Considerând și $\sigma = \tau$, deci $\lambda = 1$, ecuațiile (I,4) se scriu:

$$D\xi^i + du^i = \xi^i d\tau. \tag{I,29}$$

In cele de mai sus, din cauza lui $\xi^i = \theta^i$, avem $\rho = 1$, deci (I,28); în general, cu θ^i oarecare, avem după (I,10) și (I,15):

$$d\tau = \frac{\lambda d\sigma}{\rho} = \mu d\sigma - d\log \nu. \tag{I,30}$$

Invarianța lui $d\tau$, la schimbarea lui h, σ, u^i, se poate verifica imediat pe baza expresiei (I,30), cu ajutorul lui (I,16) și (I,17).

De sigur, putem considera ecuațiile (I,19) scrise cu ajutorul oricărui parametru σ în loc de τ, dar din (I,30) se observă că aceasta revine la a considera $\rho = \lambda$, adică a fixa funcția arbitrară $\rho(\sigma)$; în acest mod, parametrului $\tau = \sigma$ îi vor corespunde doar ∞^n serii înfășurătoare date de (I,29), una din acestea fiind determinată de un vector principal inițial ξ_0^i (sau, altfel spus, de o direcție inițială și punctul principal corespunzător). Când parametrul este fixat geometric pe curbă, seriile înfășurătoare care îi sunt atașate capătă o semnificație geometrică pentru curba însăși și pot fi utilizate la construirea invarianților acesteia.

Alt mijloc de a-l fixa pe h, este de a pune

$$\theta^i = \frac{d\bar{u}^i}{d\sigma} = \dot{\bar{u}}^i. \tag{I,31}$$

Această alegere este invariantă pentru schimbările de coordonate, dar nu pentru schimbările de parametru σ; ea revine la a lua $\lambda = 1$ în (I,3).

Notând cu r valoarea corespunzătoare a lui ρ, $(\xi_i = r\dot{\bar{u}}^i)$, avem

$$d\tau = \frac{d\sigma}{r} \tag{I,32}$$

și deci

$$\xi^i = r\dot{\bar{u}}^i = \frac{d\bar{u}^i}{d\tau}. \tag{I,33}$$

Așa dar, τ este un parametru cu ajutorul căruia vectorul asociat ξ^i se exprimă sub forma (I,33); parametrul τ îl vom numi *parametru principal al seriei de direcții înfășurătoare considerate.*

Ecuațiile (I,29) devin:

$$D\left(\frac{d\bar{u}^i}{d\tau}\right) + du^i = \frac{d\bar{u}^i}{d\tau} d\tau. \tag{I,34}$$

Ne putem propune, însă, să simplificăm aceste ecuații printr'o schimbare de parametru, care să le păstreze forma; dacă σ_0 este parametrul căutat, vom deduce din (I,34):

$$D\left(\frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0} \cdot \sigma_0'\right) + du^i = \frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0} \cdot d\sigma_0,$$

unde

$$\sigma_0' = \frac{d\sigma_0}{d\tau}.$$

Așa dar, avem:

$$D\left(\frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0}\right) + \frac{du^i}{\sigma_0'} = \frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0} \cdot \left(d\tau - \frac{d\sigma_0'}{\sigma_0'}\right). \tag{I,35}$$

Putem determina pe σ_0, astfel ca paranteza din membrul al doilea al acestei ecuații să ia o valoare dată, $-d\log f(\tau)$, deci

$$d\tau - d\log\sigma_0' = -d\log f(\tau): \tag{I,36}$$

care dă:

$$\sigma_0 = c\int f(\tau)\, e^{\tau} d\tau + c', \tag{I,37}$$

cu c, c' constante arbitrare; dacă $f(\tau) = 1$, membrul al doilea al ecuației (I,35) este nul, iar

$$\sigma_0 = c\, e^{\tau} + c'. \tag{I,38}$$

Deoarece τ este invariant pentru seria de direcții înfășurătoare, tot așa este și σ_0 care, după cum se vede din (I,38), este definit până la o substituție lineară întreagă; pe σ_0 îl vom numi *parametrul normal al seriei de direcții înfășurătoare*, iar pe $\frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0}$ *vectorul normalizat* corespunzător.

Luând $c = 1$, $c' = 0$, ecuațiile problemei sunt:

$$D\left(\frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0}\right) + \frac{du^i}{\sigma_0} = 0. \tag{I,39}$$

Avem o relație simplă între vectorul principal și cel normalizat:

$$\frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0} = \frac{d\bar{u}^i}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{d\sigma_0} = e^{-\tau}\xi^i, \tag{I,40}$$

așa că (I,39) se mai poate scrie și

$$D(e^{-\tau}\xi^i) + e^{-\tau} du^i = 0 \tag{I,41}$$

care, de altfel, desvoltată conduce la (I,29).

Din (I,32) deducem că valoarea r_0 a lui r, corespunzătoare parametrului σ_0, este dată de

$$r_0 = \frac{d\sigma_0}{d\tau} = c\,e^{\tau} = \sigma_0 - c' \tag{I,42}$$

așa dar este definită până la un factor constant de proporționalitate în funcție de τ și până la o constantă aditivă în funcție de σ_0. Condițiile pe care le-am impus seriei de direcții date, care pornesc din punctele M ale curbei C, aflându-se în spațiul A_n, sunt ca ele să admită o curbă înfășurătoare Γ, atunci când facem desfășurarea varietăților A_n^M tangente în punctele M la A_n. In configurația formată de harta afină a diverselor repere atașate punctelor M, direcțiile date g vor descrie o suprafață desfășurabilă. Normalizarea nu înseamnă nimic altceva decât că, pe fiecare dreaptă g alegem un punct P, impunând vectorului normalizat $\overrightarrow{MP}$ condiția ca creșterea sa absolută să fie paralelă cu tangenta la curba C în punctul M; după cum am văzut, parametrul normal este acel parametru σ_0 care îl dă pe MP sub forma $\frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0}$, în timp ce parametrul principal îl dă pe MM' sub forma $\frac{d\bar{u}^i}{d\tau}$.

In cazul $n=2$, condițiile de înfășurare fiind verificate pentru orice serie de direcții, rezultă următoarea

Teoremă II: *Intr'un spațiu cu conexiune afină, cu două dimensiuni, oricărei serii de direcții i se poate ataşa în mod invariant un parametru principal τ, deci şi unul normal σ_0.*

Din ecuațiile (I,14) care în acest caz se reduc la două, deducem:

$$\mu d\sigma = \frac{D\theta^1 \cdot du^2 - D\theta^2 \cdot du^1}{\theta^1 \cdot du^2 - \theta^2 \cdot du^1}\,; \qquad \nu = -\frac{1}{\rho} = \frac{\theta^1 \cdot D\theta^2 - \theta^2 \cdot D\theta^1}{\theta^1 \cdot du^2 - \theta^2 \cdot du^1}$$

așa dar, conform ecuației (I,30)

$$\begin{gathered} d\tau = \frac{D\theta^1 \cdot du^2 - D\theta^2 \cdot du^1}{\theta^1 du^2 - \theta^2 du^1} - d\log\frac{\theta^1 D\theta^2 - \theta^2 D\theta^1}{\theta^1 du^2 - \theta^2 du^1} \\ \xi^i = \frac{\theta^1 du^2 - \theta^2 du^1}{\theta^2 D\theta^1 - \theta^1 D\theta^2} \cdot \theta^i . \end{gathered} \tag{I,43}$$

După cum ecuațiile (I,14) ne-au condus să atașăm unei serii de direcții g trivectorul dat de (I,19), (I,20), tot așa ecuațiile normalizate (I,39), (I,41) ne conduc să atașăm unei serii de vectori θ^i bivectorul dat de

$$r^{ij} = \begin{vmatrix} D\theta^i & du^i \\ D\theta^j & du^j \end{vmatrix} \tag{I,44}$$

In locul lui r^{ij} putem considera bivectorul

$$\bar{p}^{ij} = \begin{vmatrix} \bar{\Omega}_2^i & \Omega_3^i \\ \bar{\Omega}_2^j & \Omega_3^j \end{vmatrix} \tag{I,45}$$

unde

$$\overline{\Omega}_2^i = \frac{D_3\theta}{d\sigma} + \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{du^i}{d\sigma}. \qquad (I,46)$$

Din (I,39) deducem că dacă

$$\theta^i = \frac{d\overline{u}^i}{d\sigma_0}$$

(I,44) și deci (I,45) este nul; invers, din anularea acestui bivector deducem:

$$\overline{\Omega}_2^i + p\Omega_3^i = \frac{D_3\theta^i}{d\sigma}(1+p) + \frac{1}{\sigma}\frac{du^i}{d\sigma} = 0 \qquad (p \neq -1) \qquad (I,47)$$

sau notând

$$\sigma_0 = (1+p)\,\sigma \qquad (I,48)$$

în cazul în care σ_0 nu este o constantă,

$$\frac{D_3\theta^i}{d\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0}\cdot\frac{du^i}{d\sigma_0} = 0$$

ceea ce înseamnă că seria considerată este înfășurătoare, parametrul normal σ_0 este dat de (I,48), iar θ^i sunt vectorii normalizați.

Cazul în care σ_0 este o constantă va fi discutat în paragraful următor.

§ 3. Definiția intrinsecă a concurenței în sens Myller, într'un spațiu cu conexiune afină. In cazul în care curba înfășurătoare Γ se reduce la un punct, dreptele g înfășură acest punct, după ce s'a făcut harta afină a reperelor atașate punctelor M; punctul M' fiind fix, urmează că în (I,2) $\overline{u}^i$ sunt niște constante.

Deoarece, în cazul spațiilor riemanniene, problema a fost studiată de Al. Myller [3], [4], am numit direcțiile acestea, *direcții concurente în sens Myller într'un spațiu cu conexiune afină*, sau, pe scurt, *direcții concurente*.

Considerăm că direcțiile sunt date tot de vectorii $\theta^i(\sigma) \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ ca și în cazul precedent, acești vectori fiind definiți până la un factor arbitrar $h(\sigma) \neq 0$.

In acest caz, avem $d\overline{u}^i = 0$, deci din (I,2):

$$D(\rho\theta^i) + du^i = 0 \qquad (I,4')$$

care sunt ecuațiile problemei propuse.

Și în acest caz putem fixa pe h, considerând $\xi^i = \theta^i$, $\rho = 1$, așa că (I,4') devine

$$D\xi^i + du^i = 0.$$

Aceste ecuații corespund cazului $\lambda = 0$ în (I,4); în acest caz,

$$\mu = \frac{d\log\nu}{d\sigma} \qquad (I,15')$$

care se deduce din (I,14); această relație se obține din (I,15), cu $\lambda = 0$, eliminând pe ρ între cele două relații.

Dacă urmăm a doua metodă, pe care am schițat-o doar în cazul înfășurării, condiția impusă seriei de direcții în acest caz este

$$\overrightarrow{MM^*} + \overrightarrow{M^*M'} + \overrightarrow{M'M} = 0, \tag{I,5'}$$

care arată că punctele M' și M'^* coincid.

Deoarece:

$$\overrightarrow{M'M} = -\overrightarrow{MM'} = -\rho\theta^i$$

$$\overrightarrow{M^*M'} = \rho\theta^i + D(\rho\theta^i)$$

$$\overrightarrow{MM^*} = du^i$$

deducem din (I,5') ecuațiile (I,4').

Ecuațiile (I,4') se mai pot scrie:

$$\rho\frac{d\theta^i}{d\sigma} + \dot{u}^i\,\dot{\rho}\theta^i + \rho\Gamma^i_{jk}\,\theta^j\,\dot{u}^k = 0 \tag{I,6'}$$

sau

$$D\theta^i + \frac{du^i}{\rho} = -\,\theta^i\,d\log\rho. \tag{I,7'}$$

Și în acest caz, putem fixa pe h, considerând $\xi^i = \theta^i$; în acest caz, $\rho = 1$ și (I,4') devin

$$D_2\,\xi^i = D\xi^i + du^i = 0.$$

Sub această formă, avem un sistem de n ecuații lineare cu n funcții necunoscute ξ^i; soluțiile depind deci de n constante arbitrare ξ_0, care definesc un vector principal inițial, sau altfel spus, o serie de direcții concurente este cunoscută de îndată ce se cunoaște direcția unui vector inițial și punctul principal respectiv. Aceleași concluzii se trag și din (I,4'), dar acolo trebue să ne dăm funcția arbitrară $\rho(\sigma)$. Faptul că luăm pentru ρ o funcție sau alta nu schimbă direcția vectorilor θ^i, ci doar mărimea lor.

Invers, dacă cunoaștem θ^i sau $\xi^i(\sigma)$, atunci ecuațiile (I,4') sau (I,6') ne dau $u^i(\sigma)$, dacă luăm pe $\rho(\sigma)$ arbitrar.

Considerând în aceste ecuații

$$\xi^i = \frac{du^i}{d\sigma}, \tag{I,49}$$

obținem

$$\frac{d^2u^i}{d\sigma^2} + \sigma^i_{jk}\frac{du^j}{d\sigma}\cdot\frac{du^k}{d\sigma} + \frac{du^i}{d\sigma} = 0 \tag{I,50}$$

și făcând schimbarea de variabilă

$$e^{-\sigma} = t, \tag{I,51}$$

avem:

$$\frac{d^2 u^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} = 0 \qquad (I,50')$$

ecuațiile autoparalelelor. Așa dar

T e o r e m a III: *Intr'un spațiu cu conexiune afină, curbele autoconcurente și cele autoparalele coincid.*

Prin intermediul expresiilor (I,44), am atașat unei serii oarecare de vectori θ^i un bivector r^{ij}; în locul lui r^{ij} putem considera bivectorul:

$$p^{ij} = \frac{1}{(d\sigma)^2} \begin{vmatrix} D_2\theta^i & D_3\theta^i \\ D_2\theta^j & D_3\theta^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Omega^i_2 & \Omega^i_3 \\ \Omega^j_2 & \Omega^j_3 \end{vmatrix}. \qquad (I,45')$$

Se observă că dacă vectorii θ^i sunt vectorii principali ai unor direcții concurente, bivectorul p^{ij} este nul; invers, dacă p^{ij} este nul, avem:

$$\Omega^i_2 + p\Omega^i_3 = \frac{D_3\theta^i}{d\sigma}(1+p) + \frac{du^i}{d\sigma} = 0;$$

în cazul în care p este constant, notând:

$$\xi^i = (1+p)\,\theta^i,$$

avem

$$\frac{D_3\xi^i}{d\sigma} + \frac{du^i}{d\sigma} = 0,$$

ceea ce arată că θ^i sunt vectorii unei serii de direcții concurente.

Cazul în care p nu este constant corespunde direcțiilor înfășurătoare propriu zise.

Bivectorul p^{ij} este covariant în raport cu σ

$$p^{ij}_1 = \left(\frac{d\sigma}{d\sigma_1}\right)^2 \cdot p^{ij} \qquad (I,23')$$

iar la o schimbare a coordonatelor u^i în u^i_1, avem:

$$p^{ij}_1 = \sum_{(l,\,m)} \frac{\partial(u^i_1, u^j_1)}{\partial(u^l, u^m)} p^{lm}. \qquad (I,22')$$

§ 4. Parametru principal, parametru normal. Și în acest caz, putem considera în spațiul desfășurării o curbă Δ, ale cărei ecuații să fie

$$\bar{\varphi}^i = \bar{\varphi}^i(\sigma) \qquad (I,2')$$

cu condiția ca tangentele în punctele $M''(\sigma)$ ale acestei curbe și dreptele $g(\sigma)$ să fie respectiv paralele pentru aceeași valoare a lui σ, după desfășurare, așa dar ca

$$d\bar{\varphi}^i = k(\sigma)\,\theta^i(\sigma)\,d\sigma \quad (k \neq 0). \qquad (I,3')$$

Dreptele g concurente reprezintă o imagine a variației tangentelor curbei Δ; această *curbă o numim curbă asociată virtuală a seriei de direcții concurente*, deoarece curba asociată Γ a aceleiași serii este redusă la punctul de coordonate $\bar{u}^i$.

Deoarece ξ^i și $d\bar{\varphi}^i$ trebue să rămână invarianți la o schimbare atât a factorului h, cât și a lui σ, avem

$$\begin{aligned} \xi^i &= \rho\theta^i = \rho_1\theta_1^i, \\ d\bar{\varphi}^i &= k\theta^i d\sigma = k_1\theta_1^i d\sigma_1, \end{aligned} \tag{I,11'}$$

de unde deducem:

$$d\tau = \frac{k d\sigma}{\rho} = \frac{k_1 d\sigma_1}{\rho_1} = d\tau_1,$$

de unde deducem că $d\tau$ reprezintă o diferențială invariantă la o schimbare a lui σ și h.

Avem astfel și în cazul concurenței un *parametru principal invariant, legat de seria de direcții concurente date, precum și de curba* Δ; variind Δ, variază și τ.

Ca și în cazul direcțiilor înfășurătoare, deducem și aici relația (I,32) și deci

$$\xi^i = r\dot{\bar{\varphi}}^i = \frac{d\bar{\varphi}^i}{d\tau}. \tag{I,33'}$$

Așa dar, τ permite și în acest caz să exprimăm vectorul ξ^i sub forma (I,33'). Ecuațiile problemei devin

$$D\left(\frac{d\bar{\varphi}^i}{d\tau}\right) + du^i = 0. \tag{I,34'}$$

Efectuând și aici o schimbare de parametru, ca și în cazul direcțiilor înfășurătoare, avem

$$D\left(\frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0}\right) + \frac{du^i}{\sigma_0'} = -\frac{d\bar{u}^i}{d\tau}\cdot\frac{d\sigma_0'}{\sigma_0'}. \tag{I,35'}$$

Punem condiția

$$-d\log\sigma_0' = -d\log f(\tau), \tag{I,36'}$$

$$\sigma_0 = c\int f(\tau)\,d\tau + c'. \tag{I,37'}$$

Dacă $f(\tau) = 1$, membrul al doilea din (I,35') este nul și

$$\sigma_0 = c\tau + c'. \tag{I,38'}$$

După cum τ este invariant legat de seria de direcții concurente și de Δ, la fel este și σ_0, care, precum se vede, este definit până la o substituție lineară întreagă; σ_0 ar putea fi numit *parametrul normal în raport cu* Δ *al seriei de direcții concurente.*

Dacă $c' = 0$, $c = 1$, σ_0 și τ sunt identici.
In acest caz:

$$r_0 = \frac{d\sigma_0}{d\tau} = 1. \qquad (I,42')$$

Condițiile pe care le-am impus seriei de direcții date, care pornesc din puncte e M ale curbei C, aflându-se în spațiul A_n, sunt ca ele să admită un punct de concurență, atunci când facem desfășurarea varietăților afine A_n^M tangente lui A_n în punctele M, pe una din ele. Așa dar, în configurația formată de harta afină a diverselor repere atașate punctelor M, direcțiile date — g — vor descrie un con.

§ 5. Cazul direcțiilor paralele în sens Levi-Civită într'un spațiu cu conexiune afină se regăsește ca un caz particular al direcțiilor concurente, anume, dacă punctul de concurență este la infinit, deci $\rho = \infty$, $d\rho = 0$, așa că ecuațiile (I,7') devin

$$D\theta^i = 0,$$

ecuațiile paralelismului; în acest caz, cum este bine cunoscut, condițiile impuse seriei de direcții date sunt ca ele să fie paralele atunci când facem desfășurarea varietăților afine A_n^M. Așa dar, în configurația formată de harta afină a diverselor repere atașate punctelor M, direcțiile date — g — descriu un cilindru.

§ 6. Definiția intrinsecă a înfășurării, concurenței, paralelismului cu ajutorul noțiunii de transport de puncte.

a. *Definiția noțiunii de transport de puncte, dată de E. Cartan*[1]. Considerând că fiecărui punct M al unui spațiu cu conexiune afină A_n i se atașează un punct M' determinat, de coordonate ξ^i în raport cu reperul natural (R) relativ la M, avem un câmp de puncte și căutăm deplasarea elementară a lui M' când trecem dela M la M^*.
Din

$$\overrightarrow{MM'} = M' - M = \xi^i e_i,$$

unde e_i sunt vectorii lui (R), deducem:

$$dM' = dM + D\xi^i . e_i = (du^i + D\xi^i) e_i.$$

E. Cartan definește expresia

$$D_2 \xi^i = D\xi^i + du^i,$$

ca diferențiala absolută a câmpului de puncte. In baza acestei noțiuni, putem reconsidera problema direcțiilor înfășurătoare, concurente, sau paralele.

[1]) [23], [24], p. 40.

b. *Direcții înfășurătoare*

Condiția ca direcția $\overrightarrow{MM'}$ să înfășure curba Γ, în hartă, se poate formula în sensul ca, punctul M' de coordonate $\xi^i = \rho\theta^i$ în raport cu (R), să descrie curba Γ, adică diferențiala sa absolută să fie $d\bar{u}^i$, așa dar

$$D_2\xi^i = du^i, \tag{I,52}$$

ceea ce reprezintă ecuațiile înfășurării, dacă ținem seamă de (I,2), (I,3); așa dar, ecuațiile înfășurării exprimă faptul că M', punctul de contact al dreptei g cu Γ, descrie Γ în transportul său absolut în hartă.

c. *Direcții concurente*

Dacă cerem ca punctul M' să fie fix, deci ca diferențiala absolută a lui ξ^i să fie mereu nulă, avem ecuațiile direcțiilor concurente într'un A_n :

$$D_2\xi^i = 0$$

ceea ce exprimă faptul că, punctul M' este fix în raport cu transportul său absolut.

d. *Direcții paralele*

Dacă ρ devine infinit, ecuațiile precedente dau:

$$D\xi^i = 0$$

care exprimă deci faptul că, punctul M' dela infinit în direcția g este fix în raport cu transportul său absolut; adică, ξ^i se transportă paralel.

§ 7. Olonomia transporturilor prin înfășurare, concurență, paralelism.

a. *Cazul direcțiilor înfășurătoare*

Să considerăm că fiecărui punct M al spațiului cu conexiune afină A_n îi atașăm un punct M' de coordonate afine ξ^i în raport cu reperul natural (R) atașat lui M. Condiția de olonomie pentru transportul direcțiilor înfășurătoare se traduce prin condiția ca, în hartă, direcția MM' să revină asupra ei însăși după ce punctul M a descris un ciclu $MM_1M_3M_2M$; cu alte cuvinte, trebue ca punctul M' să revină într'o poziție M'' pe dreapta MM'.

Insemnând cu $d,\bar{d}$ deplasările elementare pe arcele MM_1, respectiv MM_2, urmează că, în deplasările acestea, punctul M' sufere o deplasare absolută, dată respectiv de:

$$\begin{aligned} D_2\xi^i &= d\xi^i + du^i + \omega_k^i(d)\,\xi^k, \\ \bar{D}_2\xi^i &= \bar{d}\xi^i + \bar{d}u^i + \omega_k^i(\bar{d})\,\xi^k, \end{aligned} \tag{I,53}$$

unde s'a notat:

$$\begin{aligned} \omega_k^i(d) &= \Gamma_{kj}^i du^j \\ \omega_k^{i'}(\bar{d}) &= \Gamma_{kj}^i \bar{d}u^j. \end{aligned} \tag{I,54}$$

Deplasarea lui M', de-a-lungul contururilor MM_1M_3, MM_2M_3, dă deci în desfășurare punctele M_3', $\overline{M}_3'$ care, raportate la reperul (R) al punctului M, au coordonatele

$$\xi^i + D_2\xi^i + \overline{D}_2\xi^i + D_2\overline{D}_2\xi^i, \quad \xi^i + \overline{D}_2\xi^i + D_2\xi^i + \overline{D}_2 D_2\xi^i. \tag{I,55}$$

Deplasarea suferită de M_3' în deplasarea lui M de-a-lungul ciclului, este proporțională în cazul nostru cu ξ^i, deci

$$\overline{D}_2 D\xi^i - D_2\overline{D}_2\xi^i = m\xi^i. \tag{I,56}$$

Făcând toate calculele, această relație se scrie:

$$\xi^k \mathcal{H}_k^i + du^k \cdot \omega_k^i(\overline{d}) - \overline{d}u^k \cdot \omega_k^i(d) = m\xi^i, \tag{I,57}$$

unde m este o funcție de punct și

$$\mathcal{H}_k^i = (\omega_k^i)' - [\omega_h^i \omega_k^h], \tag{I,58}$$

în notația calculului exterior a lui Cartan [23], [24].

Ecuațiile considerate se scriu sub forma:

$$\xi^k(\mathcal{H}_k^i - m\delta_k^i) + T_{hk}^i du^h \overline{d}u^k = 0. \tag{I,59}$$

Pentru ca această egalitate să aibă loc, oricare ar fi ξ^k, este necesar și suficient ca

$$\begin{aligned} T_{hk}^i &= 0 \\ \mathcal{H}_k^i &= m\delta_k^i. \end{aligned} \tag{I,60}$$

Dar

$$\mathcal{H}_k^i = R_{.krs}^i \cdot p^{rs}, \tag{I,61}$$

cu

$$p^{rs} = du^r \overline{d}u^s - du^s \overline{d}u^r. \tag{I,62}$$

Considerăm că

$$m = m_{rs} p^{rs} \tag{I,63}$$

cu m_{rs} un tensor de două ori covariant, ținând seama că p^{rs} poate fi arbitrar, ecuațiile de mai sus dau:

$$\begin{aligned} T_{hk}^i &= 0 \\ R_{.krs}^i &= m_{rs}\delta_k^i. \end{aligned} \tag{I,64}$$

Dar din relațiile

$$R_{.krs}^i + R_{.rsk}^i + R_{.skr}^i = \frac{\partial T_{kr}^i}{\partial u^s} + \frac{\partial T_{rs}^i}{\partial u^k} + \frac{\partial T_{sk}^i}{\partial u^r} + \Gamma_{ls}^i T_{rk}^l + \tag{I,65}$$

$$+ \Gamma_{lr}^i T_{ks}^l + \Gamma_{lk}^i T_{sk}^l,$$

care se găsesc de exemplu în [25] [1]), deducem

$$m_{rs} = 0, \quad m = 0, \tag{I,66}$$

deci

$$\begin{aligned} T^i_{hk} &= 0 \\ R^i_{.krs} &= 0. \end{aligned} \tag{I,67}$$

Așa dar, am putea avea olonomie pentru transportul direcțiilor prin înfășurare, dacă spațiul este afin și m nul, dar acest din urmă fapt arată că direcțiile nu ar fi înfășurătoare propriu zis, ci concurente.

Așa dar, pentru înfășurarea veritabilă nu există niciun spațiu cu transport olonom.

b. *Pentru cazul direcțiilor concurente* reiese din cele de mai sus că avem transport olonom numai în spațiile afine.

c. *Pentru cazul direcțiilor paralele* este cunoscută condiția

$$R^i_{.krs} = 0.$$

B. CAZUL UNUI SPAȚIU METRIC

§ 8. Definiția intrinsecă a înfășurării în sens Myller, într'un spațiu metric. Să considerăm o varietate metrică, n dimensională V_n, cu sau fără torsiune, în care este definită o formă diferențială pătratică

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j \,(i, j = 1, \ldots n) \tag{I,68}$$

unde $u^i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sunt coordonatele unui punct al varietății. După cum se știe, într'un astfel de spațiu se află definită o conexiune afină, astfel că putem considera V_n ca un spațiu cu conexiune afină, toate rezultatele stabilite pentru un astfel de spațiu A_n fiind deci valabile și pentru V_n. Într'un V_n metric, avem un mijloc *a priori* de a fixa geometric pe h, luându-l pe θ^i unitar; în acest caz, r, valoarea lui ρ, este lungimea vectorului principal ξ^i și prin urmare invariant.

Ecuațiile problemei sunt în acest caz:

$$\begin{aligned} &\frac{D(r\theta^1) + du^1}{\theta^1} = \frac{D(r\theta^2) + du^2}{\theta^2} = \ldots = \frac{D(r\theta^n) + du^n}{\theta^n}; \\ &g_{ij}\, \theta^i\, \theta^j = 1. \end{aligned} \tag{I,69}$$

Toate concluziile referitoare la multiplicitatea soluțiilor în cazul unui A_n rămân de sigur valabile și aici.

Deoarece avem

$$\xi^i = \frac{d\bar{u}^i}{d\tau} \tag{I,70}$$

[1]) [25], p. 239.

cu τ parametrul principal al seriei înfășurătoare, deducem:

$$r^2 d\tau^2 = g_{ij} d\bar{u}^i du^j = d\bar{s}^2$$
$$r = \frac{d\bar{s}}{d\tau}, \tag{I,71}$$

$d\bar{s}$ fiind arcul curbei asociate Γ, iar măsurarea făcându-se cu metrica lui V_n în punctul M, adică cu metrica varietății euclidiene E_n^M tangente la V_n în M.

Ecuațiile direcțiilor înfășurătoare se mai pot scrie și

$$r\frac{d\theta^i}{d\sigma} + \dot{u}^i + (\dot{r} - \lambda)\theta^i + r\Gamma^i_{jk}\theta^j \dot{u}^k = 0, \quad g_{ij}\theta^i\theta^j = 1. \tag{I,72}$$

In cazul unui V_n, planul asociat seriei înfășurătoare poate fi înlocuit prin direcția pe care o conține, ortogonală la direcția θ^i; aceasta este tocmai direcția lui Bianchi și este dată de vectorul

$$\eta^i = \frac{D\theta^i}{d\sigma} - \theta^i \cdot \frac{\theta_h D\theta^h}{\theta_k \theta^k d\sigma} \tag{I,73}$$

care este vectorul lui Bianchi, când θ^i este unitar și $\sigma = s$ arcul curbei C.

Considerând un V_n, scufundat într'un V_{n+1}, *putem defini ca linii de curbură ale lui* V_n *în raport cu* V_{n+1}, *acele curbe pentru care normalele la* V_n *de-a-lungul lor, sunt direcții înfășurătoare în sens Myller.*

In acest mod, regăsim un rezultat al lui Cartan [24] [1]) pentru un V_2 într'un V_3, luând în considerație teorema I.

Dacă V_{n+1} este euclidian, regăsim definiția liniilor de curbură drept acele curbe pentru care normalele descriu desfășurabile.

§ 9. Definiția intrinsecă a concurenței în sens Myller, într'un spațiu metric. In acest caz, putând fixa și aici *a priori* pe θ^i unitar, ecuațiile problemei sunt

$$r\frac{d\theta^i}{d\sigma} + \dot{u}^i + \dot{r}\theta^i + r\Gamma^i_{jk}\theta^j \dot{u}^k = 0$$
$$(i, j, k = 1, \ldots n) \tag{I,72'}$$
$$g_{ij}\theta^i\theta^j = 1.$$

Toate concluziile referitoare la multiplicitatea soluțiilor în cazul unui A_n rămân de sigur valabile și aici.

Deoarece avem

$$\theta^i = \frac{d\bar{v}^i}{d\tau}, \tag{I,74}$$

se arată, ca și în cazul înfășurării, că avem și expresia (I,71) unde $\bar{s}$ reprezintă arcul curbei Δ. Cele spuse despre planul asociat unei serii înfășurătoare, rămân valabile și aici. Acesta este cazul tratat de Al. Myller [3], [4].

[1]) P. 101.

Deoarece în § 3 s'a demonstrat că, pentru un spațiu cu conexiune afină, curbele autoconcurente și cele autoparalele coincid, urmează că, într'un spațiu riemannian, autoconcurentele și geodezicele coincid; așa dar, cu ajutorul noțiunii de concurență în sens Myller putem ajunge la noțiunea de geodezică, exact ca și dela noțiunea de paralelism Levi-Civită.

§ 10. Cazul direcțiilor paralele în sens Levi-Civită într'un spațiu metric este dat de

$$D\theta^i = 0, \quad g_{ij}\,\theta^i\theta^j = 1 \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \qquad (I,72'')$$

Așa dar, noțiunea de directii înfășurătoare într'un spațiu cu conexiune afină cuprinde ca niște cazuri particulare, degenerate, atât noțiunea introdusă de Al. Myller, cât și paralelismul absolut.

§ 11. Exemple:

a. *Cazul direcțiilor înfășurătoare*

Să considerăm un spațiu cu conexiune afină A_3, în care

$$\Gamma^1_{22} = -\sin u^1 \cos u^1; \quad \Gamma^2_{12} = \operatorname{cotg} u^1; \quad \Gamma^3_{12} = \operatorname{cotg} u^1$$

$$\Gamma^1_{33} = -\sin u^1 \cos u^1 (\sin u^2)^2; \quad \Gamma^2_{33} = -\sin u^2 \cos u^2; \qquad (I,75)$$

$$\Gamma^3_{23} = \operatorname{cotg} u^2$$

iar ceilalți coeficienți de conexiune sunt nuli. Curba C fie dată de

$$u^1 = u^1_0 = \text{const}, \quad u^2 = \sigma, \quad u^3 = u^3_0 = \text{const}.$$

Sistemul (I,26) devine:

$$\frac{\dfrac{d\xi^1}{d\sigma} - \xi^2 \sin u^1_0 \cos u^1_0}{\xi^1} = \frac{\dfrac{d\xi^2}{d\sigma} + \xi^1 \operatorname{cotg} u^1_0 - \xi^2 \sin\sigma\cos\sigma + 1}{\xi^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{d\xi^3}{d\sigma} + \xi^3 \operatorname{cotg}\sigma}{\xi^3} \qquad (I,76)$$

și are soluții de forma

$$\xi^i = \rho\theta^i = f^i[\sigma;\ \varphi(\sigma);\ \xi^1_0, \xi^2_0, \xi^3_0], \qquad (I,77)$$

unde $\varphi(\sigma)$ este o funcție arbitrară.

Dacă vom considera o varietate riemanniană cu 3 dimensiuni, de curbură totală 1, deci cu metrica dată de:

$$ds^2 = (du^1)^2 + (\sin u^1)^2 (du^2)^2 + (\sin u^1 \sin u^2)^2 (du^3)^2 \qquad (I,78)$$

vom observa că admite tocmai conexiunea dată mai sus, așa că pentru această varietate, calculul și sistemul diferențial de mai sus rămân valabile; în plus, deoarece, dacă θ^i este unitar, avem:

$$\rho^2 = g_{ij}\, f^i\, f^j$$

se deduce că:

$$\rho^2 = (f^1)^2 + (\sin u_0^1)^2 (f^2)^2 + (\sin u_0^1 \sin\sigma)^2 (f^3)^2 \qquad (I,79)$$

ceea ce îl determină pe ρ.

b. *Cazul direcţiilor concurente*

In acest caz considerând acelaşi spaţiu cu conexiune ca şi mai sus, avem pentru aceeaşi curbă C, sistemul:

$$\begin{aligned} &\frac{d\xi^1}{d\sigma} - \xi^2 \sin u_0^1 \cos u_0^1 = 0 \\ &\frac{d\xi^2}{d\sigma} + \xi^1 \operatorname{cotg} u_0^1 - \xi^2 \sin\sigma \cos\sigma + 1 = 0 \qquad (I,76') \\ &\frac{d\xi^3}{d\sigma} + \xi^3 \operatorname{cotg}\sigma = 0, \end{aligned}$$

care are soluţii de forma:

$$\xi^i = \rho\theta^i = f^i(\sigma; \xi_0^1, \xi_0^2, \xi_0^3). \qquad (I,77')$$

Dacă ne aflăm în cazul metric, cu θ^i unitar, atunci ρ este dat de o ecuaţie analoagă lui (I,79).

In cazul acestor exemple, V_3 se poate scufunda într'un E_4 euclidian, aşa că în cazul prim, avem ca rezultat în spaţiul hărţii o desfăşurabilă, iar în al doilea un con, într'un E_4.

Cazul direcţiilor paralele este cunoscut; în a doua ecuaţie din (I,76'), renunţând la termenul ultim, avem ecuaţiile transportului paralel.

CAPITOLUL II

STUDIUL PROBLEMEI ÎN VARIETĂȚI SUBORDONATE UNUI SPAȚIU RIEMANNIAN

A. DIRECȚII ÎNFĂȘURĂTOARE ÎN VARIETĂȚI SUBORDONATE UNUI SPAȚIU RIEMANNIAN

§ 12. Discuția ecuațiilor lineare ale problemei. In spațiul riemannian S_n, să considerăm o varietate V_m subordonată cu m dimensiuni $(1<m<n)$; fie C o curbă din V_m și g o serie de direcții trecând prin punctele lui C și aparținând lui V_m; *ne întrebăm în ce caz aceste direcții sunt înfășurătoare în raport cu varietatea* V_m.

Considerăm că direcțiile g sunt date de vectorii θ^i.

Incepem prin a stabili

Teorema IV: *Dacă direcțiile* g *date de vectorii* θ^i *sunt înfășurătoare în raport cu spațiul ambiant* S_n, *ele sunt înfășurătoare și în raport cu varietatea subordonată* V_m; *fie că vom considera înfășurarea în raport cu* S_n, *sau cu* V_m, *avem aceiași vectori principali, același parametru principal, același parametru normal, aceiași vectori normalizați.*

Fie dată varietatea V_m prin ecuațiile parametrice:

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m) \qquad (i=1, \ldots n) \qquad \text{(II,1)}$$

unde x^i sunt coordonatele unui punct din S_n și u^α coordonatele unui punct din V_m.

Fie în S_n dată metrica

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad (i, k = 1, \ldots, n) \qquad \text{(II,2)}$$

Ținând seama de ecuațiile lui V_m, elementul de arc pentru o curbă din V_m este

$$ds^2 = g_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta} \cdot \partial u^\alpha\, du^\beta = \gamma_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta, \qquad \text{(II,3)}$$

cu

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta}. \qquad \text{(II,4)}$$

Dacă vectorul principal al direcției θ^i este ξ^i și parametrii directori ai acestuia în raport cu V_m sunt η^α, avem

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \eta^\alpha \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots n \\ \alpha = 1, \ldots m \end{pmatrix}. \qquad \text{(II,5)}$$

Introducem expresiile

$$D\xi^i = d\xi^i + \Gamma^i_{rs}\, \xi^r\, dx^s \qquad \text{(II,6)}$$

$$\Delta\eta^\alpha = d\eta^\alpha + G^\alpha_{\lambda\pi}\, \eta^\lambda\, du^\pi \qquad \begin{pmatrix} i, r, s = 1, \ldots n \\ \alpha, \lambda, \pi = 1, \ldots m \end{pmatrix}, \qquad \text{(II,7)}$$

unde am însemnat cu D, Δ operatorii de diferențiere absolută în raport cu metrica dată de tensorul g_{ik}, $\gamma_{\alpha\beta}$ respectiv și cu Γ^i_{rs}, $G^\alpha_{\lambda\pi}$ coeficienții de conexiune respectivi.

Reluând un calcul al lui Bianchi [10] [1]) stabilim relațiile între expresiile (II,6) și (II,7).

Din (II,5) avem

$$d\xi^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \eta^\alpha du^\beta + \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} d\eta^\alpha$$

$$dx^s = \frac{\partial x^s}{\partial u^\nu} du^\nu \tag{II,8}$$

care introduse în (II,6) dau:

$$D\xi^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \eta^\alpha du^\beta + \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} d\eta^\alpha + \Gamma^i_{\lambda\pi} \xi^\lambda \cdot \frac{\partial x^s}{\partial u^\nu} du^\nu. \tag{II,9}$$

Inmulțind aceste relații cu

$$g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\mu} \tag{II,10}$$

și ținând seamă de (II,4) (II,5), precum și de

$$g_{jk} \Gamma^k_{rs} = \Gamma_{rs,j}, \tag{II,11}$$

deducem

$$g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\mu} D\xi^i = \gamma_{\alpha\mu} d\eta^\alpha + \eta^\alpha du^\nu \left[g_{ij} \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\nu} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\mu} + \right. \tag{II,12}$$

$$\left. + \Gamma_{rs,j} \frac{\partial x^r}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial u^\nu} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\mu} \right].$$

Deoarece expresia din paranteză reprezintă tocmai $G_{\alpha\nu,\mu}$, avem

$$g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} D\xi^i = \gamma_{\alpha\beta} \Delta\eta^\alpha \tag{II,13}$$

care este relația dintre (II,6) și (II,7).

Din

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha$$

[1]) P. 798.

prin înmulțire cu

$$g^{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}$$

deducem

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}dx^i = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\cdot du^\alpha = \gamma_{\alpha\beta}\,du^\alpha. \tag{II,14}$$

Făcând harta euclidiană a reperelor de-a-lungul curbei C în S_n și în V_m, obținem în fiecare punct M al curbei C un E_n^M, respectiv un E_m^M, așa că E_m^M este subordonat lui E_n^M; fie deci $\overline{x}^i, (i=1,\ldots n), \overline{u}^\alpha (\alpha = 1,\ldots m)$ coordonatele unui punct situat în E_n^M.

Fie

$$\begin{aligned}\overline{x}^i &= \overline{x}^i(\sigma)\\ \overline{u}^\alpha &= \overline{u}^\alpha(\sigma)\end{aligned} \tag{II,15}$$

ecuațiile curbei asociate seriei date de direcții înfășurătoare în raport cu S_n, scrise în raport cu harta obținută din desfășurarea spațiilor E_m^M, E_n^M, respectiv.

In acest caz avem

$$d\overline{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}d\overline{u}^\alpha. \tag{II,16}$$

Din

$$d\overline{x}^i = \lambda\theta^i d\sigma = \frac{\lambda d\sigma}{\rho}\cdot\xi^i = \xi^i d\tau, \tag{II,17}$$

cu τ parametrul principal al seriei înfășurătoare în raport cu S_n, ținând seama de (II,5) și (II,16) deducem:

$$d\overline{u}^\alpha = \eta^\alpha d\tau. \tag{II,18}$$

Prin înmulțirea lui (II,16) cu

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}$$

deducem

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\cdot d\overline{x}^i = \gamma_{\alpha\beta}d\overline{u}^\alpha.$$

Așa dar, deducem:

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\Omega_1^i = \gamma_{\alpha\beta}H_1^\gamma$$

$$\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\Omega_{1,j} = H_{1,\beta} \tag{II,19}$$

unde am notat:

$$\Omega_1^i = \frac{D_1\xi^i}{d\tau} = \frac{D\xi^i}{d\tau} + \frac{dx^i}{d\tau} - \xi^i$$

$$H_1^\alpha = \frac{\Delta_1\eta^\alpha}{d\tau} = \frac{\Delta\eta^\alpha}{d\tau} + \frac{du^\alpha}{d\tau} - \eta^\alpha \tag{II,20}$$

$$g_{ij}\Omega_1^i = \Omega_{1,j}, \quad \gamma_{\alpha\beta}H_1^\alpha = H_{1,\beta}.$$

Se observă din (II,19) că, dacă

$$\Omega_1^i = \frac{D_1\xi^i}{d\tau} = 0$$

deci, dacă direcțiile date sunt înfășuratoare în S_n, urmează că și

$$H_{1,\beta} = \gamma_{\alpha\beta}H_1^\alpha = 0.$$

Presupunând că

$$\gamma = |\gamma_{\alpha\beta}| \neq 0$$

deci, că V_m nu este varietate singulară, rezultă:

$$H_1^\alpha = \frac{\Delta_1\eta^\alpha}{d\tau} = 0, \tag{II,21}$$

deci că direcțiile sunt înfășurătoare și în raport cu V_m.

Din (II,5) deducem că vectorii principali sunt aceiași, iar din (II,17) (II,18) că parametrul principal τ este același, fie că vom considera înfășurarea în raport cu S_n, fie că o vom considera, în raport cu V_m; urmează că și parametrii normali și vectorii normalizați sunt aceiași.

Considerând ecuațiile normalizate ale înfășurării, avem

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{du^\alpha}\overline{\Omega}_2^i = \gamma_{\alpha\beta}\overline{H}_2^\beta, \tag{II,19''}$$

care se demonstrează la fel cu (II,19) și unde $\overline{\Omega}_2^i$ este dat de (I,46), iar $\overline{H}_2^\alpha$ este corespunzătorul său în V_m.

In loc de (II,19'') putem scrie și

$$\frac{\partial x^j}{du^\alpha}\overline{\Omega}_{2,j} = \overline{H}_{2,\alpha} \tag{II,19'''}$$

unde s'a notat:

$$g_{ij}\overline{\Omega}_2^i = \overline{\Omega}_{2,j}, \quad \gamma_{\alpha\beta}\overline{H}_2^\alpha = \overline{H}_{2,\beta}.$$

Din (II,19''), (II,19''') se citește același lucru ca și din (II,19),(II,19') și în plus că în S_n și V_m avem același parametru normal al seriei înfășurătoare. Așa dar, am demonstrat într'un chip nou teorema IV.

Dacă înfășurarea este degenerată în concurență, avem:

$$g_{ij}\frac{\partial x^i}{du^\beta}\Omega_2^i = \gamma_{\alpha\beta}H_2^\alpha \qquad \text{(II,20')}$$

$$\frac{\partial x^j}{du^\beta}\Omega_{2,j} = H_{2,\beta}, \qquad \text{(II,20'')}$$

unde am notat

$$\Omega_2^i = \frac{D_2\xi^i}{d\tau} = \frac{D\xi^i}{d\tau} + \frac{dx^i}{d\tau} \qquad \text{(II,21')}$$

$$H_2^\alpha = \frac{\Delta_2\eta^\alpha}{d\tau} = \frac{\Delta\eta^\alpha}{d\tau} + \frac{du^\alpha}{d\tau}$$

$$g_{ij}\,\Omega_2^i = \Omega_{2,j}\,, \qquad \gamma_{\alpha\beta}H_2^\alpha = H_{2,\beta}.$$

Ca și în cazul precedent, dacă seria este concurentă în raport cu S_n, iar V_m nu este degenerată, conchidem că seria este concurentă și în V_m; de asemenea, se păstrează concluziile referitoare la vectorii principali și normalizați, precum și la parametrii principali și normali, deci

Teorema V: *Dacă direcțiile* g *date de vectorii* θ^i *sunt concurente în raport cu spațiul ambiant* S_n, *ele sunt concurente și în raport cu varietatea subordonată* V_m; *fie că considerăm concurența în raport cu* S_n, *fie cu* V_m, *avem aceiași vectori principali, același parametru normal, aceiași vectori normalizați.*

Dacă înfășurarea este degenerată în paralelism, avem

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\Omega_3^i = \gamma_{\alpha\beta}H_3^\alpha \qquad \text{(II,22)}$$

$$\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\Omega_{3,j} = H_{3,\beta} \qquad \text{(II,22')}$$

cu

$$\Omega_3^i = \frac{D_3\xi^i}{d\tau} = \frac{D\xi^i}{d\tau}$$

$$H_3^\alpha = \frac{\Delta_3\eta^\alpha}{d\tau} = \frac{\Delta\eta^\alpha}{d\tau} \qquad \text{(II,23)}$$

$$g_{ij}\Omega_3^i = \Omega_{3,j}\ ;\quad \gamma_{\alpha\beta}H_3^\alpha = H_{3,i\beta}.$$

Bianchi a demonstrat următoarea teoremă: Dacă direcțiile g date de vectorii θ^i sunt paralele în raport cu spațiul ambiant S_n, ele sunt paralele și în raport cu varietatea subordonată V_m.

Cazul unui V_m singular cere un studiu special.

Bazându-ne pe rezultatele de mai sus, deducem că, dacă o curbă este autoconcurentă în S_n ea este autoconcurentă și în V_n; dar s'a arătat în § 3

și în § 9 că, curbele autoconcurente și curbele geodezice coincid, așa că urmează — folosind numai noțiunea de concurență — că o curbă din V_m care este geodezică în S_n este geodezică și în V_m.

§. 13. Discuția problemei cu ajutorul trivectorilor asociați. S'a arătat în § 1 că, condiția necesară și suficientă ca o serie de direcții, date de vectorii θ^i, să fie înfășurătoare în S_n, este ca trivectorul

$$p^{ijk} = \begin{vmatrix} \Omega_1^i & \Omega_2^i & \Omega_3^i \\ \Omega_1^j & \Omega_2^j & \Omega_3^j \\ \Omega_1^k & \Omega_2^k & \Omega_3^k \end{vmatrix} \tag{II,24}$$

să fie nul; la fel în V_m, trebue să considerăm trivectorul

$$\pi^{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} H_1^\alpha & H_2^\alpha & H_3^\alpha \\ H_1^\beta & H_2^\beta & H_3^\beta \\ H_1^\gamma & H_2^\gamma & H_3^\gamma \end{vmatrix} \tag{II,25}$$

a cărui anulare este condiția necesară și suficientă a înfășurării, respectiv concurenței direcțiilor date de vectorii η^α.

Să căutăm relația dintre p^{ijk} și $\pi^{\alpha\beta\gamma}$.

Bazându-ne pe formulele (II,19), (II,20), și (II,22) înmulțim cele trei linii ale lui p^{ijk}, respectiv cu:

$$g_{ih}\frac{\partial x^h}{\partial u^\lambda}, \quad g_{jl}\frac{\partial x^l}{\partial u^\mu}, \quad g_{kt}\frac{\partial x^t}{\partial u^\nu} \tag{II,26}$$

și contractăm după i, j, k, avem

$$g_{ih}g_{jl}g_{kt}\frac{dx^h}{\partial u^\lambda}\frac{\partial x^l}{\partial u^\mu}\frac{\partial x^t}{\partial u^\nu}p^{ijk} = \begin{vmatrix} g_{ih}\frac{\partial x^h}{\partial u^\lambda}\Omega_1^i & g_{ih}\frac{\partial x^h}{\partial u^\lambda}\Omega_2^i & g_{ih}\frac{\partial x^h}{\partial u^\lambda}\Omega_3^i \\ g_{jk}\frac{\partial x^k}{\partial u^\mu}\Omega_1^j & g_{jk}\frac{\partial x^k}{\partial u^\mu}\Omega_2^j & g_{jk}\frac{\partial x^k}{\partial u^\mu}\Omega_3^j \\ g_{lt}\frac{\partial x^t}{\partial u^\nu}\Omega_1^l & g_{lt}\frac{\partial x^t}{\partial u^\nu}\Omega_2^l & g_{lt}\frac{\partial x^t}{\partial u^\nu}\Omega_3^l \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma_{\lambda\alpha}H_1^\alpha & \gamma_{\lambda\alpha}H_2^\alpha & \gamma_{\lambda\alpha}H_3^\alpha \\ \gamma_{\mu\beta}H_1^\beta & \gamma_{\mu\beta}H_2^\beta & \gamma_{\mu\beta}H_3^\beta \\ \gamma_{\nu\gamma}H_1^\gamma & \gamma_{\nu\gamma}H_2^\gamma & \gamma_{\nu\gamma}H_3^\gamma \end{vmatrix} = \tag{II,27}$$

$$= \gamma_{\alpha\lambda}\gamma_{\beta\mu}\gamma_{\gamma\nu}\begin{vmatrix} H_1^\alpha & H_2^\alpha & H_3^\alpha \\ H_1^\beta & H_2^\beta & H_3^\beta \\ H_1^\gamma & H_2^\gamma & H_3^\gamma \end{vmatrix} = \gamma_{\alpha\lambda}\gamma_{\beta\mu}\gamma_{\gamma\nu}\pi^{\alpha\beta\gamma}.$$

Se observă însă că prima expresie din acest șir de egalități se poate scrie [1])

$$g_{(ijk)\,(hlt)}\,\frac{\partial\,(x^h,\,x^l,\,x^t)}{\partial\,(u^\lambda,\,u^\mu,\,u^\nu)}\,p^{(ijk)},$$

unde

$$g_{(ijk)\,(hlt)}=\begin{vmatrix} g_{ih} & g_{jh} & g_{kh} \\ g_{il} & g_{jl} & g_{kl} \\ g_{it} & g_{jt} & g_{kt} \end{vmatrix};\qquad \frac{\partial\,(x^h,\,x^l,\,x^t)}{\partial\,(u^\lambda,\,u^\mu,\,u^\nu)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^h}{\partial u^\lambda} & \dfrac{\partial x}{\partial u^\lambda} & \dfrac{\partial x^t}{\partial u^\lambda} \\ \dfrac{\partial x^h}{\partial u^\mu} & \dfrac{\partial x^l}{\partial u^\mu} & \dfrac{\partial x^t}{\partial u^\mu} \\ \dfrac{\partial x^h}{\partial u^\nu} & \dfrac{\partial u}{\partial u^\nu} & \dfrac{\partial x^t}{\partial u^\nu} \end{vmatrix} \qquad \text{(II,28)}$$

De asemenea, ultima expresie a aceluiași șir de egalități se poate scrie

$$\gamma_{(\alpha\beta\gamma)\,(\lambda\mu\nu)}\,\pi^{(\alpha\beta\gamma)}$$

unde

$$\gamma_{(\alpha\beta\gamma)\,(\lambda\mu\nu)}=\begin{vmatrix} \gamma_{\alpha\lambda} & \gamma_{\beta\lambda} & \gamma_{\gamma\lambda} \\ \gamma_{\alpha\mu} & \gamma_{\beta\mu} & \gamma_{\gamma\mu} \\ \gamma_{\alpha\nu} & \gamma_{\beta\nu} & \gamma_{\gamma\nu} \end{vmatrix}. \qquad \text{(II,29)}$$

Așa dar, avem

$$g_{(ijk)\,(hlt)}\,\frac{\partial\,(x^h,\,x^l,\,x^t)}{\partial\,(u^\lambda,\,u^\mu,\,u^\nu)}\,p^{(ijk)}=\gamma_{(\alpha\beta\gamma)\,(\lambda\mu\nu)}\,\pi^{(\alpha\beta\gamma)}, \qquad \text{(II,30)}$$

dacă notăm

$$g_{(ijk)\,(hlt)}\,p^{(ijk)}=p_{(hlt)}$$

$$\gamma_{(\alpha\beta\gamma)\,(\lambda\mu\nu)}\,\pi^{(\alpha\beta\gamma)}=\pi_{(\lambda\mu\nu)},$$

relație analoagă cu (II,19); această relație se mai poate scrie și

$$p_{(hlt)}\,\frac{\partial\,(x^h,\,x^l,\,x^t)}{\partial\,(u^\nu,\,u^\mu,\,u^\nu)}=\pi_{(\lambda\mu\nu)}, \qquad \text{(II,30')}$$

care este analoagă cu (II,19').

De aici se vede că, dacă p_{hkl} este nul, urmează că și $\pi_{\lambda\mu\nu}$ este nul; din anularea lui $\pi_{\lambda\mu\nu}$ o deducem pe cea a lui $\pi^{\alpha\beta\gamma}$, deoarece spațiul V_m considerat nu este singular.

Așa dar, prima parte a teoremelor IV și V a fost demonstrată pe baza trivectorilor.

---

[1]) In astfel de expresii, în care avem grupuri de indici între paranteze, sumarea se face după aceste grupuri luate ca un tot. In general, $p^{(ijk)} = p^{ijk}$ și paranteza nu apare decât la sumarea de acest fel.

§ 14. Discuția problemei înfășurării cu ajutorul bivectorilor asociați. In § 2 s'a arătat că, condiția necesară și suficientă pentru ca o serie de direcții date de vectorii θ^i să fie înfășurătoare în S_n este ca bivectorul

$$\bar{p}^{ij} = \begin{vmatrix} \bar{\Omega}_2^i & \Omega_3^i \\ \bar{\Omega}_2^j & \Omega_3^j \end{vmatrix}, \tag{I,45'}$$

unde

$$\bar{\Omega}_2^i = \frac{D_3\theta^i}{d\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0}\cdot\frac{du^i}{d\sigma_0} \tag{I,46}$$

să fie nul, (σ_0, parametru normal).

La fel, în V_m trebue să considerăm bivectorul

$$\bar{\pi}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \bar{H}_2^\alpha & H_3^\alpha \\ \bar{H}_2^\beta & H_3^\beta \end{vmatrix}$$

a cărui anulare este condiția necesară și suficientă a înfășurării direcțiilor date de vectorii η^α.

Să căutăm relația dintre $\bar{p}^{ij}$ și $\bar{\pi}^{\alpha\beta}$

Pentru aceasta ne bazăm pe formulele (II,19''), (II,22). Inmulțind cele două linii ale lui $\bar{p}^{ij}$ respectiv cu

$$g_{ih}\frac{\partial x^h}{\partial u^\lambda}\quad,\quad g_{jk}\frac{\partial x^k}{\partial u^\mu} \tag{II,26'}$$

și contractând după i, j, avem

$$g_{ih}\,g_{jk}\frac{\partial x^h}{\partial u^\lambda}\frac{\partial x^k}{\partial u^\mu}\bar{p}^{ij} = \begin{vmatrix} g_{ih}\dfrac{\partial x^h}{\partial u^\lambda}\bar{\Omega}_2^i & g_{ih}\dfrac{\partial x^h}{\partial u^\lambda}\Omega_3^i \\ g_{jk}\dfrac{\partial x^k}{\partial u^\mu}\bar{\Omega}_2^j & g_{jk}\dfrac{\partial x^k}{\partial u^\mu}\Omega_3^j \end{vmatrix} = \tag{II,27'}$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma_{\alpha\lambda}\bar{H}_2^\alpha & \gamma_{\alpha\lambda}H_3^\alpha \\ \gamma_{\beta\mu}\bar{H}_2^\beta & \gamma_{\beta\mu}H_3^\beta \end{vmatrix} = \gamma_{\alpha\lambda}\gamma_{\beta\mu}\begin{vmatrix} \bar{H}_2^\alpha & H_3^\alpha \\ H_2^\beta & H_3^\beta \end{vmatrix} = \gamma_{\alpha\lambda}\gamma_{\beta\mu}\bar{\pi}^{\alpha\beta}.$$

Să observăm că prima expresie din acest șir de egalități se poate scrie

$$g_{(ij)(hk)}\frac{\partial(x^h, x^k)}{\partial(u^\lambda, u^\mu)}\bar{p}^{(ij)},$$

unde

$$g_{(ij)(hk)} = \begin{vmatrix} g_{ih} & g_{jh} \\ g_{ik} & g_{jk} \end{vmatrix} \qquad \frac{\partial(x^h, x^k)}{\partial(u^\lambda, u^\mu)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^h}{\partial u^\lambda} & \dfrac{\partial x^k}{\partial u^\lambda} \\ \dfrac{\partial x^h}{\partial u^\mu} & \dfrac{\partial x^k}{\partial u^\mu} \end{vmatrix}. \tag{II,28'}$$

De asemenea, ultima expresie a aceluiași șir de egalități se poate scrie

$$\gamma_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}\overline{\pi}^{(\alpha\beta)},$$

unde

$$\gamma_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)} = \begin{vmatrix} \gamma_{\alpha\lambda} & \gamma_{\beta\lambda} \\ \gamma_{\alpha\mu} & \gamma_{\beta\mu} \end{vmatrix}. \tag{II,29'}$$

Așa dar, avem

$$g_{(ij)(hk)} \frac{\partial(x^h, x^k)}{\partial(u^\lambda, u^\mu)} \overline{p}^{(ij)} = \gamma_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)} \overline{\pi}^{(\alpha\beta)}, \tag{II,31}$$

dacă notăm :

$$g_{(ij)(hk)} \overline{p}^{(ij)} = \overline{p}_{(hk)} ; \quad \gamma_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)} \overline{\pi}^{(\alpha\beta)} = \overline{\pi}_{(\lambda\mu)},$$

relație analoagă cu (II,19). Această relație se mai poate scrie și

$$\overline{p}_{(hk)} \frac{\partial(x^h, x^k)}{\partial(u^\lambda, u^\mu)} = \overline{\pi}_{(\lambda\mu)}, \tag{II,31'}$$

care este analoagă cu (I,19').

De aici se vede că, dacă $\overline{p}_{hk}$ este nul, urmează că și $\overline{\pi}_{\lambda\mu}$ este nul; din anularea lui $\overline{\pi}_{\lambda\mu}$ o deducem pe cea a lui $\overline{\pi}^{\alpha\beta}$, deoarece spațiul V_m considerat nu este singular.

Așa dar teorema IV a fost demonstrată pe baza bivectorilor.

§ 15. Discuția problemei concurenței cu ajutorul bivectorilor asociați. In § 3 s'a arătat că condiția necesară și suficientă pentru ca o serie de direcții date de victorii θ^i să fie înfășurătoare în S_n, este ca bivectorul

$$p^{ij} = \begin{vmatrix} \Omega_2^i & \Omega_3^i \\ \Omega_2^j & \Omega_3^j \end{vmatrix} \tag{I,45'}$$

să fie nul.

In V_m este necesar să considerăm bivectorul

$$\overline{\pi}^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} H_2^\alpha & H_3^\alpha \\ H_2^\beta & H_3^\beta \end{vmatrix},$$

a cărui anulare este condiția necesară și suficientă a concurenței direcțiilor date de vectorii η^α.

Căutând relația dintre p^{ij} și $\overline{\pi}^{\alpha\beta}$, procedăm exact ca în paragraful precedent și găsim

$$g_{(ij)(hk)} \frac{\partial(x^h, x^k)}{\partial(u^\lambda, u^\mu)} p^{(ij)} = \gamma_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)} \pi^{(\alpha\beta)}, \tag{II,32}$$

care este analoagă cu (II,20).

Notând

$$g_{(ij)(hk)}\, p^{(ij)} = p_{(hk)} \qquad \gamma_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)}\, \pi^{(\alpha\beta)} = \pi_{(\lambda\mu)},$$

această relație se scrie

$$p_{(hk)} \frac{\partial (x^h, x^k)}{\partial (u^\lambda, u^\mu)} = \pi_{(\lambda,\mu)}, \qquad \text{(II, 32')}$$

care este analoagă cu (II, 20').

De aici se vede că, dacă p_{hk} este nul, atunci este nul și $\pi_{\lambda\mu}$, deci și $\pi^{\alpha\beta}$, deoarece V_m nu este singular.

Așa dar, prima parte a teoremei V a fost demonstrată pe baza bivectorilor.

Din cele de mai sus rezultă de asemenea că o serie înfășurătoare sau concurentă are același plan asociat relativ la S_n și la V_m.

B. DIRECȚII VECTORIALE ASOCIATE

§ 16. Direcții vectoriale asociate de înfășurare. Pentru a răspunde complet la întrebarea pusă la începutul § 12, să introducem o noțiune sugerată de formulele din § § 1 — 5.

Fie C o curbă oarecare din S_n, prin ale cărei puncte trece o serie de ∞^1 direcții g, tangente la S_n ; aceste direcții sunt date de vectorii θ^i. Dacă aceste direcții sunt înfășurătoare, se poate determina un $\rho(\sigma)$ și un $\lambda(\sigma)$, astfel ca expresiile

$$\Omega_1^i = \frac{D(\rho\theta^i)}{d\sigma} + \frac{dx^i}{d\sigma} - \lambda\theta^i \qquad \text{(II,33)}$$

să fie nule, ceea ce exprimă anularea lui r^{ijk} sau p^{ijk} din (I,19) și (I,20).

Dacă aceste direcții nu sunt înfășurătoare, nu putem determina funcțiile $\rho(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$, în așa fel încât Ω_1^i să fie nuli; dacă fixăm geometric pe ρ și pe λ, de pildă dacă luăm $\lambda = 1$ și determinăm pe ρ astfel ca vectorul $\rho\,\theta^i = \xi^i$ să fie unitar, sau altfel, ξ^i să fie vectorul care are originea în punctul M al curbei C și extremitatea în punctul care descrie linia de strictțiune a riglatei generate de dreptele g în spațiul hărții (în cazul înfășurării, riglata este desfășurabilă, iar linia de strictțiune este muchia cuspidală — adică curba Γ — asociată, vectorul respectiv fiind vectorul asociat al seriei), vectorul Ω_1^i corespunzător determină în fiecare punct al curbei C — pentru fiecare mod în care fixăm geometric pe λ și ρ — câte un vector unitar η_1^i colinear cu Ω_1^i,

$$\eta_1^i = R_1 \Omega_1^i \qquad \text{(II,34)}$$

R_1 pe care îl considerăm pozitiv va fi dat de

$$g_{ik}\, \eta_1^i\, \eta_1^k = R_1^2\, g_{ik}\, \Omega_1^i\, \Omega_1^k = 1,$$

deci

$$r_1 = \frac{1}{R_1} = \sqrt{g_{ik}\, \Omega_1^i\, \Omega_1^k} \qquad \text{(II,35)}$$

Deoarece Ω_1^i este un vector contravariant, urmează că R_1 este un invariant față de schimbarea coordonatelor din S_n; așa dar, un invariant metric relativ la curba C și la seria de ∞^1 vectori θ^i.

Dacă facem o schimbare,

$$\theta^i = h\,\theta^{*i}, \quad \rho^* = h\,\rho$$

ξ^i rămâne invariant și odată cu el Ω_1^i, Ω_2^i, Ω_3^i și r_1, R_1. La o schimbare a parametrului σ în σ^*, ξ^i este invariant, deci

$$\Omega_1^i = \frac{D\xi^i}{d\sigma} + \frac{du^i}{d\sigma} - \lambda\xi^i = \left(\frac{D\xi^i}{d\sigma^*} + \frac{du^i}{d\sigma^*} - \lambda^*\,\xi^i\right)\frac{d\sigma^*}{d\sigma},$$

deci

$$\Omega_1^i = \frac{d\sigma^*}{d\sigma}\,\Omega_1^{*i} \tag{II,36}$$

cu

$$\lambda = \lambda^*\,\frac{d\sigma^*}{d\sigma}. \tag{II,37}$$

Așa dar, Ω_1^i este covariant la schimbarea lui σ în σ^*; considerând expresia lui r_1, rezultă că

$$r_1 = \frac{d\sigma^*}{d\sigma}\,r_1^*, \quad R_1 = \frac{d\sigma}{d\sigma^*}\,R_1^*, \tag{II,38}$$

așa dar, r_1 este covariant, iar R_1, contravariant la schimbarea lui σ.

Vom numi direcția η_1^i (sau mai bine zis această serie de direcții), *direcție vectorială asociată de înfășurare a seriei de direcții g de-a-lungul curbei* C, *în raport cu fixarea geometrică a vectorilor* ξ^i, *iar* cantitatea

$$r_1 = \frac{1}{R_1}$$

curbura vectorială de înfășurare a seriei de direcții g de-a-lungul curbei C, *în raport cu fixarea geometrică a vectorilor* ξ^i; R_1 este *raza respectivă de curbură.*

Această noțiune măsoară oarecum viteza de abatere a vectorilor dela vectorii asociați de înfășurare ai unei serii înfășurătoare; dacă ξ^i sunt luați până la linia de strictiune a riglatei din hartă, putem considera că această noțiune măsoară viteza de abatere a direcțiilor g dela înfășurare. Dacă direcțiile sunt înfășurătoare, există un mod de a fixa geometric vectorii ξ^i, așa că

$$r_1 = \frac{1}{R_1} = 0$$

și ca direcția vectorială asociată de înfășurare, în cazul respectiv, să fie nedeterminată.

Așa dar, dacă prin fiecare punct al unei curbe C din S_n trece o direcție g și aceste direcții nu sunt înfășurătoare în S_n, fixând în mod geometric vectorii ξ^i pe direcțiile g, rezultă univoc determinată o a doua serie de direcții η_1^i, *direcțiile vectoriale asociate de înfășurare ale vectorilor* ξ^i.

Această noțiune poate fi introdusă și într'un spațiu cu conexiune afină, dar acolo nu o putem folosi în același mod ca în cazul riemannian.

Având noțiunea de direcții vectoriale asociate de înfășurare, suntem în stare să răspundem la problema propusă relativ la înfășurarea direcțiilor g în raport cu varietatea subordonată V_m. Din (II,19) deducem că acest lucru se întâmplă atunci și numai atunci când se poate găsi o determinare geometrică a lui ξ^i, astfel ca să se poată verifica următoarele m relații

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\cdot\Omega_1^i=0 \qquad (\alpha=1,\ldots,m), \qquad \text{(II,39)}$$

care exprimă că direcția vectorială asociată de înfășurare a lui ξ^i trebue să fie normală tuturor celor m direcții ale lui V_m, adică spațiului său euclidian tangent.

Așa dar am stabilit

Teorema VI: *Dacă prin punctele unei curbe* C *în varietatea subordonată* V_m *trec direcțiile* g, *condiția necesară și suficientă pentru înfășurarea direcțiilor* g *în* V_m *este ca să se poată determina geometric niște vectori* ξ^i *pe direcțiile* g, *astfel ca direcțiile vectoriale* η_1^i *asociate de înfășurare lui* ξ^i *în raport cu spațiul ambiant, să fie normale lui* V_m *de-a-lungul curbei* C.

In această teoremă este cuprinsă teorema IV, pentrucă atunci când direcțiile g sunt înfășurătoare în spațiul ambiant, direcțiile asociate de înfășurare ale vectorilor principali sunt nedeterminate și deci condițiile teoremei VI pot fi considerate ca satisfăcute.

Condițiile teoremei VI pot fi exprimate și prin

Teorema VII: *Dacă prin punctele unei curbe* C *în varietatea subordonată* V_m *trec direcțiile* g, *condiția necesară și suficientă pentru înfășurarea direcțiilor* g *în* V_m *este ca să se poată determina geometric niște vectori* ξ^i *pe direcțiile* g *astfel ca spațiul euclidian* T_3 *determinat de vectorii* $D\xi^i$, ξ^i, dx^i *să intersecteze spațiul euclidian* T_{n-m}, *normal la* V_m, *în cel puțin o dreaptă, adică* T_3 *să conțină cel puțin o normală la* V_m.

Condiția este evident satisfăcută de orice serie de direcții dintr'un V_2, după cum și trebuia.

Să arătăm că, dacă este îndeplinită condiția teoremei, seria de direcții este înfășurătoare.

Există deci niște funcții a, b, c, astfel încât

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\left(a\frac{D\xi^i}{dt}+b\frac{dx^i}{dt}+C\xi^i\right)=0, \qquad \text{(II,40)}$$

unde

$$\xi^i=\rho\theta^i \quad ; \quad \text{fie } \tau=\tau(t).$$

Avem

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\cdot\left[a\cdot\frac{D(\rho\theta^i)}{dt}+b\cdot\frac{dx^i}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}+c\rho\theta^i\right]=0, \qquad \text{(II,41)}$$

adică

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\left[\frac{D\theta^i}{d\tau}+\frac{b}{a\rho}\cdot\frac{dx^i}{d\tau}+\theta^i\cdot\frac{cdt+ad\log\rho}{a\,d\tau}\right]=0. \qquad \text{(II,42)}$$

Considerând

$$b = a\rho \quad , \quad cdt + ad\log\rho = -\,a\,d\tau \tag{II,43}$$

aceste relații determină pe ρ și $\tau(t)$, în așa fel încât obținem

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\Omega_1^i,$$

care arată că direcțiile sunt înfășurătoare și $\tau(t)$ astfel determinat este parametrul principal al seriei.

Reciproc, deoarece Ω_1^i este o combinație lineară de $D\xi^i$, ξ^i, dx^i, urmează că, dacă seria de direcții este înfășurătoare, citim din formula de mai sus că sunt îndeplinite condițiile teoremei,

Dacă S_n este euclidian, iar V_m riemannian, considerând punctul M_1

$$\overline{x}^i = x^i + \xi^i,$$

adjunct punctului M, avem

$$\Omega_1^i = \frac{D\xi^i}{d\tau} + \frac{dx^i}{d\tau} - \xi^i = \frac{d(\xi^i + x^i)}{d\tau} - \xi^i = \frac{d\overline{x}^i}{d\tau} - \xi^i. \tag{II,44}$$

Condiția de înfășurare dată de teorema IV, anume Ω_1^i normal la V_m dă

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\Omega_1^i = g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\left(\frac{d\overline{x}^i}{d\tau} - \xi^i\right) = 0, \tag{II,45}$$

deci

$$\frac{d\overline{x}^i}{d\tau} - \xi^i = c^p N^i_p \quad (p = 1, 2, \ldots, n-m) \tag{II,46}$$

unde N^i_p sunt $n-m$ vectori independenți normali la V_m și se face sumare în p.

Așa dar, $\frac{d\overline{x}^i}{dt}$, tangenta curbei adjuncte (locul punctelor adjuncte) $\overline{x}^i = \overline{x}^i(\tau)$ se află în spațiul euclidian S_{n-m+1} care unește dreapta MM_1 cu spațiul S_{n-m} normal la V_m în punctul M.

Reciproc, dacă această condiție este satisfăcută, adică pe tangenta dată de ξ^i există un punct

$$\overline{x}^i = x^i + a\,\xi^i, \tag{II,47}$$

cu proprietatea de mai sus, direcțiile considerate sunt înfășurătoare în V_m.

Intr'adevăr, în cazul în care condiția este îndeplinită, avem

$$\frac{d}{dt}(a\xi^i + x^i) = b\xi^i + c^p N^i_p \qquad (p = 1, \ldots, n-m) \tag{II,48}$$

Inmulțind ambii membri ai acestei relații cu $g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}$, deducem

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\left[\frac{d}{dt}(a\xi^i + x^i) - b\xi^i\right] = 0, \tag{II,49}$$

care este o relație de forma (II,40), care exprimă că direcțiile sunt înfășurătoare. Așa dar, condițiile de înfășurare pot fi exprimate în acest caz și prin

Teorema VIII: *Dacă prin punctele unei curbe* C *în varietatea* V_m *scufundată în spațiul euclidian* E_n, *trec direcțiile* g, *condiția necesară și suficientă pentru înfășurarea direcțiilor* g *în* V_m *este ca să se poată determina pe fiecare dreaptă* g *câte un punct adjunct* M_1 *în așa fel încât, orice tangentă* τ_1 *la curba* C_1 *locul punctelor* M_1, *să fie cuprinsă în spațiul euclidian cu* $n - m + 1$ *dimensiuni, care este uniunea spațiului euclidian cu* $n - m$ *dimensiuni, normal la* V_m *și a dreptei* g, *care nu aparține spațiului normal.*

§ 17. Direcții vectoriale asociate în mod normalizat, de înfășurare. În acest capitol introducem încă o noțiune sugerată de formulele din §§ 1—5.

Fie C o curbă oarecare din S_n, prin ale cărei puncte trece o serie de ∞^1 direcții g, tangente la S_n; fie date aceste direcții de vectorii 0^i.

Dacă aceste direcții sunt înfășurătoare, iar ξ^i sunt vectorii normalizați de înfășurare și σ parametrul normal de înfășurare, avem

$$\overline{\Omega}_2^i = \frac{D\xi^i}{d\sigma} + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{dx^i}{d\sigma} \tag{I,46}$$

nul. Dacă direcțiile nu sunt înfășurătoare, considerând că am fixat geometric pe ξ^i și pe σ, ca în § 16, vectorul $\overline{\Omega}_2^i$ corespunzător determină în fiecare punct al curbei C câte un vector unitar $\overline{\eta}_2^i$ colinear cu $\overline{\Omega}_2^i$, pentru fiecare mod în care fixăm geometric pe ξ^i și pe σ,

$$\overline{\eta}_2^i = \overline{R}_2 \, \overline{\Omega}_2^i. \tag{II,44'}$$

$\overline{R}_2$ pe care îl considerăm pozitiv va fi dat de

$$g_{ik} \, \overline{\eta}_2^i \, \overline{\eta}_2^k = \overline{R}_2^2 \, g_{ik} \, \overline{\Omega}_2^i \, \overline{\Omega}_2^k = 1,$$

deci

$$\overline{r}_2 = \frac{1}{\overline{R}_2} = \sqrt{g_{ik} \, \overline{\Omega}_2^i \, \overline{\Omega}_2^k}. \tag{II,45'}$$

Deoarece $\overline{\Omega}_2^i$ este un vector contravariant, urmează că $\overline{R}_2$ este un invariant relativ la o schimbare a coordonatelor din S_n, așa dar un invariant metric relativ la curba C și la seria de ∞^1 vectori ξ^i.

Vom numi direcția $\overline{\eta}_2^i$ (sau mai bine zis această serie de direcții), *direcție vectorială asociată în mod normalizat de înfășurare a seriei de direcții* g *de-a-lungul curbei* C, *în raport cu fixarea geometrică a vectorilor* ξ^i, *iar cantitatea*

$$\overline{r}_2 = \frac{1}{\overline{R}_2},$$

curbura vectorială de înfășurare, în mod normalizat, a seriei de direcții g *de-a-lungul curbei* C, *în raport cu fixarea geometrică a vectorilor* ξ^i *și a parametrului* σ; $\overline{R}_2$ este respectiva rază de curbură.

Această noțiune măsoară, oarecum, viteza de abatere a vectorilor ξ^i dela vectorii normalizați de înfășurare ai unei serii înfășurătoare; dacă ξ^i sunt

luați până la linia de strictiune a riglatei din hartă, putem considera că această noțiune măsoară oarecum viteza de abatere a direcțiilor g dela înfășurare. Dacă direcțiile sunt înfășurătoare, există un mod de a fixa geometric vectorii ξ^i și parametrul σ, astfel ca

$$\bar{r}_2 = \frac{1}{R_2} = 0$$

și ca direcția vectorială asociată normalizat de înfășurare, în cazul respectiv să fie nedeterminată.

Așa dar, dacă prin fiecare punct al unei curbe C din S_n trece o direcție g și aceste direcții nu sunt înfășurătoare în S_n, fixând în mod geometric vectorii ξ^i pe direcțiile g și parametrul σ, rezultă univoc determinată o a doua serie de direcții $\bar{\eta}_2^i$, *direcțiile vectoriale asociate în mod normalizat, de desfășurare, ale vectorilor* ξ^i *în raport cu parametrul* σ.

Această noțiune se poate introduce și într'un spațiu cu conexiune afină, dar acolo nu o putem folosi în același fel ca în cazul riemannian. Având noțiunea de direcții vectoriale asociate în mod normalizat de înfășurare, suntem în stare să răspundem la problema propusă relativ la înfășurarea direcțiilor g, în raport cu varietatea subordonată V_m, ξ^i, σ fiind vectorii, respectiv parametrul normal.

Din (II,19″) se vede că acest lucru se întâmplă atunci și numai atunci când se poate găsi o determinare a lui ξ^i și a lui σ, astfel ca să se verifice următoarele m relații

$$g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \bar{\Omega}_2^i = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m) \qquad \text{(II,46′)}$$

care exprimă că direcția vectorială asociată în mod normalizat de înfășurare lui ξ^i trebue să fie normală tuturor celor m direcții ale lui V_m, adică spațiului său euclidian tangent.

Așa dar, am stabilit

T e o r e m a IX: *Dacă prin punctele unei curbe* C *în varietatea subordonată* S_n *trec direcțiile* g, *condiția necesară și suficientă pentru înfășurarea direcțiilor* g *în* V_m *este ca să se poată determina geometric niște vectori* ξ^i *pe direcțiile* g *și un parametru* σ, *așa ca direcțiile vectoriale* $\bar{\eta}_2^i$ *asociate în mod normalizat de înfășurare lui* ξ^i *în raport cu spațiul ambiant să fie normale lui* V_m *de-a-lungul curbei* C. *In acest caz,* ξ^i *sunt vectorii normalizați, iar* σ *parametrul normal al seriei de direcții înfășurătoare.*

In această teoremă este cuprinsă teorema IV, pentrucă, atunci când g sunt înfășurătoare în spațiul ambiant, direcțiile asociate normalizat de înfășurare ale vectorilor sunt nedeterminate și deci condițiile teoremei IX pot fi considerate ca satisfăcute. Se ia în considerație demonstrația teoremei IV, bazată pe (II,19″).

Condițiile teoremei IX pot fi exprimate și prin

T e o r e m a X: *Dacă prin punctele unei curbe* C *în varietatea subordonată* V_m *trec direcțiile* g, *condiția necesară și suficientă pentru înfășurarea direcțiilor* g *în* V_m *este ca să se poată determina geometric niște vectori* ξ^i *pe direcțiile* g *și un parametru* σ, *așa ca planul* T_2, *determinat de vectorii* $D\xi^i$ *și* dx^i *să intersecteze spațiul euclidian* T_{n-m} *normal la* V_m *în cel puțin o dreaptă,*

care să aibă o direcție variabilă în planul T_2, *deci ca planul* T_2 *să conțină cel puțin o normală la* V_m, *care să aibă o direcție variabilă în* T_2. *In acest caz,* ξ^i *sunt vectorii normalizați, iar* σ *parametrul normal al seriei de direcții înfășurătoare.*

Să arătăm că, dacă este îndeplinită condiția teoremei, seria de direcții este înfășurătoare. Există deci niște funcții $a(\sigma)$, $b(\sigma)$, așa încât

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\left(a\frac{D\xi^i}{dt}+b\frac{dx^i}{dt}\right)=0 \qquad \text{(II,47')}$$

sau notând:

$$\frac{a}{b}=\sigma \qquad \text{(II,48')}$$

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\left(\frac{D\xi^i}{d\sigma}+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{dx^i}{d\sigma}\right)=0, \qquad \text{(II,50)}$$

adică

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\overline{\Omega}_2^i=0,$$

ceea ce arată că direcțiile sunt înfășurătoare, iar ξ^i și σ normalizați. Reciproc, deoarece $\overline{\Omega}_2^i$ este o combinație lineară de $\frac{D\xi^i}{d\sigma}$, $\frac{dx^i}{d\sigma}$ cu coeficienți variabili, urmează că, dacă direcțiile sunt înfășurătoare, citim din formula de mai sus că sunt îndeplinite condițiile.

§ 18. Direcții vectoriale asociate de concurență. Răspunsul complet la problema propusă la începutul § 12 presupune o cercetare relativă și la cazul când înfășurarea degenerează în concurență sau paralelism.

Ca și în cazul înfășurării, considerăm și în acest caz o curbă C oarecare din S_n, prin ale cărei puncte trece o serie de ∞^1 direcții g tangente la S_n; aceste direcții sunt date de vectorii θ^i. Dacă aceste direcții sunt concurente, se poate determina un $\rho(\sigma)$, astfel ca expresiile:

$$\Omega_2^i=\frac{D(\rho\theta^i)}{d\sigma}+\frac{du^i}{d\sigma} \qquad \text{(II,51)}$$

să fie nule, ceea ce exprimă anularea lui p^{ij} din § 3.

Dacă aceste direcții nu sunt concurente, nu putem determina funcția $\rho(\sigma)$ în așa fel încât Ω_2^i să fie nuli; dacă fixăm geometric pe $\rho(\sigma)$ într'un mod oarecare, de pildă așa cum s'a arătat în § 16, avem pentru vectorul $\rho\theta^i=\xi^i$, în fiecare punct al curbei C, câte un vector unitar η_2^i, colinear cu Ω_2^i pentru fiecare mod în care fixăm pe $\rho(\sigma)$,

$$\eta_2^i=R_2\,\Omega_2^i. \qquad \text{(II,52)}$$

In același fel ca în § 16, deducem:

$$r_2=\frac{1}{R_2}=\sqrt{g_{ik}\,\Omega_2^i\,\Omega_2^k}. \qquad \text{(II,53)}$$

Ca și în § 16, ținând seamă că Ω_2^i este un vector contravariant, urmează că R_2 este un invariant față de o schimbare a coordonatelor din S_n, așa dar, un invariant metric relativ la curba C, și la seria de ∞^1 vectori ξ^i.

Ca și în § 16, la o schimbare

$$\theta^i = h\theta^{*i} \ , \quad \rho^* = h\rho,$$

Ω_2^i este invariant și odată cu el și r_2, R_2. La o schimbare a lui σ în σ^*, avem ca și în § 16,

$$\Omega_2^i = \frac{d\sigma^*}{d\sigma}\,\Omega_2^{*i} \tag{II,54}$$

și deci

$$r_2 = \frac{d\sigma^*}{d\sigma}\cdot r_2^* \ , \qquad R_2 = \frac{d\sigma}{d\sigma^*}\cdot R_2^*. \tag{II,55}$$

Vom numi direcția η_2^i (sau mai bine zis această serie de direcții), *direcție vectorială asociată de concurență a seriei de direcții de-a-lungul curbei* C — *în raport cu fixarea geometrică a vectorilor* ξ^i — *iar cantitatea*

$$\frac{1}{R_2} = r_2$$

curbura vectorială de concurență a seriei de direcții g *de-a-lungul curbei* C — *în raport cu fixarea geometrică a vectorilor* ξ^i. R_2 *este respectiva rază de curbură.* Această noțiune măsoară oarecum viteza de abatere a vectorilor ξ^i dela vectorii asociați (identic cu normalizați) de concurență ai unei serii concurente; dacă sunt luați până la linia de strictiune a riglatei respective din hartă, putem considera că această noțiune măsoară oarecum viteza de abatere a direcțiilor g dela concurență.

Dacă direcțiile sunt concurente, există un mod de a fixa geometric vectorii ξ^i, astfel ca

$$r_2 = \frac{1}{R_2} = 0$$

și ca direcția vectorială asociată de concurență, în cazul respectiv să fie nedeterminată.

Ca și în cazul înfășurării, conchidem că, dacă prin fiecare punct al unei curbe C din S_n trece o direcție g și aceste direcții nu sunt concurente în S, fixând în mod geometric vectorii ξ^i pe direcțiile g, rezultă univoc determinată o a doua serie de direcții, η_2^i *direcțiile vectoriale asociate ale vectorilor* ξ^i. Ca și în cazul înfășurării, această noțiune se poate introduce și într'un spațiu cu conexiune afină, dar acolo nu i se poate da aceeași utilizare ca într'un spațiu riemannian.

Având noțiunea de direcții vectoriale asociate de concurență, suntem în stare să răspundem la problema propusă relativ la concurența direcțiilor g în raport cu varietatea subordonată V_m. Din (II,20) se vede că acest lucru

se întâmplă atunci, și numai atunci, când se poate găsi o determinare geometrică a lui ξ^i, în așa fel ca să se verifice următoarele m relații

$$g_{ij}\frac{dx^j}{du^\alpha}\Omega_2^i = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m) \tag{II,56}$$

care exprimă faptul că direcția vectorială asociată de concurență a lui ξ^i trebue să fie normală tuturor celor m direcții ale lui V_m, adică spațiului său euclidian tangent.

Așa dar, am stabilit

Teorema XI: *Dacă prin punctele unei curbe* C, *în varietatea subordonată* V_m, *trec direcțiile* g, *condiția necesară și suficientă pentru concurența direcțiilor* g *în* V_m *este ca să se poată determina geometric niște vectori* ξ^i *pe direcțiile* g, *astfel ca direcțiile vectoriale* η_2^i *asociate de concurență lui* ξ^i *în raport cu spațiul ambiant să fie normale lui* V_m *de-a-lungul curbei* C.

In această teoremă, este cuprinsă teorema V, din aceleași cauze pentru care IV, este cuprinsă în VI.

Condițiile teoremei XI pot fi exprimate și prin

Teorema XII: *Dacă prin punctele unei curbe* C *în varietatea subordonată* V_m *trec direcțiile* g, *condiția necesară și suficientă pentru concurența direcțiilor* g *în* V_m *este ca să se poată determina geometric niște vectori* ξ^i *pe direcțiile* g, *așa ca planul* T_2, *determinat de vectorii* $D\xi^i$ *și* dx^i, *să intersecteze spațiul euclidian* T_{n-m} *normal la* V_m *în cel puțin o dreaptă, care să aibă o direcție fixă în planul* T_2, *adică, ca planul* T_2 *să conțină cel puțin o normală la* V_m *care să aibă o direcție fixă în* σ_2.

Să arătăm că, dacă este îndeplinită condiția teoremei, seria de direcții este concurentă.

Există deci niște constante a, b, astfel încât

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\left(a\frac{D\xi^i}{dt} + b\frac{dx^i}{dt}\right) = 0 \tag{II,57}$$

sau, notând

$$\zeta^i = \frac{a}{b}\xi^i \tag{II,58}$$

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\left(\frac{D\zeta^i}{dt} + \frac{dx^i}{dt}\right) = 0 \tag{II,59}$$

adică

$$g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\Omega_2^i = 0,$$

ceea ce arată că direcțiile sunt concurente. Reciproc, deoarece Ω_2^i este o combinație lineară de $\frac{D\xi^i}{dt}$, $\frac{dx^i}{dt}$ cu coeficienți constanți, urmează că, dacă direcțiile sunt concurente, citim din formula de mai sus că sunt îndeplinite condițiile teoremei.

Dacă S_n este euclidian, iar V_m riemannian, considerând punctul M_1

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i$$

adjunct punctului M, avem

$$\Omega_2^i = \frac{d\xi^i}{dt} + \frac{dx^i}{dt} = \frac{d(\xi^i + x^i)}{dt} = \frac{d\bar{x}^i}{dt}. \qquad (II,60)$$

Condiția de concurență dată de teorema V, anume Ω_2^i normal la V_m, dă

$$g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \Omega_2^i = g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \frac{d\bar{x}^i}{dt} = 0, \qquad (II,61)$$

deci

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = c^p N_p^i \qquad (p = 1, \ldots, n-m); \qquad (II,62)$$

așa dar, $\frac{d\bar{x}^i}{dt}$, tangenta curbei adjuncte (locul punctelor adjuncte) $\bar{x}^i = \bar{x}^i(t)$ se află în spațiul euclidian S_{n-m} normal la V_m în punctul M.

Reciproc, dacă această condiție este satisfăcută, adică dacă pe tangenta dată de ξ^i există un punct

$$\bar{x}^i = x^i + \zeta^i \quad , \quad \zeta^i = a(t)\, \xi^i \qquad (II,63)$$

cu proprietatea de mai sus, direcțiile considerate sunt concurente în V_m. Într'adevăr, în cazul în care condiția este îndeplinită, avem

$$\frac{d}{dt}(x^i + \zeta^i) = c^p N_p^i \qquad (p = 1, \ldots, n-m) \qquad (II,64)$$

N_p^i fiind vectori normali independenți. Înmulțind ambii membri ai acestei relații cu $g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}$, deducem

$$g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \cdot \frac{d}{dt}(x^i + \zeta^i) = 0, \qquad (II,65)$$

adică

$$g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \cdot \Omega_2^i = 0,$$

care exprimă faptul că direcțiile sunt concurente.

Așa dar, condițiile de concurență pot fi exprimate în acest caz prin

Teorema XIII: *Dacă prin punctele unei curbe* C *în varietatea* V_m *scufundată în spațiul euclidian* E_n, *trec direcțiile* g, *condiția necesară și suficientă pentru înfășurarea direcțiilor* g *în* V_m *este ca să se poată determina pe fiecare dreaptă* g *câte un punct adjunct* M_1 *în așa fel încât orice tangentă* t_1 *la curba* C_1, *locul punctelor* M_1, *să fie cuprinsă în spațiul euclidian cu* m—n *dimensiuni, normal la* V_n.

Acest rezultat se datorește Acad Al. M y l l e r [3], [4], care s'a servit de el pentru a *defini* direcțiile concurente.

§ 19. Direcții vectoriale asociate de paralelism. In acest paragraf vom reaminti unele rezultate ale lui B i a n c h i [6], [7] în problema paralelismului.

Fie C o curbă oarecare din S_n, prin ale cărei puncte trec o serie de ∞^1 direcții g, date de vectorii δ^i. Dacă aceste direcții g nu sunt paralele în sens Levi-Civită, vectorul Ω_3^i nu este nul: așa dar, în fiecare punct M al curbei C, există un vector unitar η_3^i colinear cu Ω_3^i

$$\eta_3^i = R_3\, \Omega_3^i \tag{II,66}$$

cu

$$r_3 = \frac{1}{R_3} = \sqrt{g_{ik}\, \Omega_3^i\, \Omega_3^k} \tag{II,67}$$

invariant metric relativ la curba C și la seria de ∞^1 direcții g. La o schimbare a lui σ în σ^*, avem:

$$\Omega_3^i = \frac{d\sigma^*}{d\sigma}\, \Omega_3^{*i} \tag{II,68}$$

și deci

$$r_3 = \frac{d\sigma^*}{d\sigma}\, r_3^*\,, \quad R_3 = \frac{d\sigma}{d\sigma^*}\, R_3^*\,. \tag{II,69}$$

B i a n c h i a numit direcția η_3^i (sau mai bine zis această serie de direcții), direcție asociată de paralelism a lui ξ^i în sens Levi-Civită de-a-lungul curbei C, iar cantitatea

$$r_3 = \frac{1}{R_3}\,,$$

curbura de paralelism asociată lui C în raport cu seria ξ^i de direcții. Această noțiune măsoară oarecum viteza de abatere a direcțiilor ξ^i dela paralelism. Dacă ξ^i sunt paralele, avem

$$r_3 = \frac{1}{R_3} = 0$$

și direcția asociată de paralelism este *nedeterminată*.

In plus, din

$$g_{ik}\, \xi^i\, \xi^k = 1$$

prin diferențiere absolută, deducem

$$g_{ik}\, \xi^i\, \eta_3^k = 0$$

care arată că direcțiile asociate de paralelism sunt perpendiculare pe direcțiile date.

In baza acestei noțiuni de direcții asociate de paralelism, considerând relația

$$g_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\, \Omega_3^i = 0$$

B i a n c h i a demonstrat

T e o r e m a : *Dacă prin punctele unei curbe* C *în varietatea subordonată* V_m, *trec direcțiile* ξ^i, *condiția necesară și suficientă pentru paralelismul lor în* V_m *este ca direcțiile* η^i_3, *asociate de paralelism lui* ξ^i *în raport cu spațiul ambiant, să fie normale lui* V_m *de-a-lungul lui* C.

Se vede din §§ 16, 17 și 18 că metodele și rezultatele lui B i a n c h i (§ 19) se pot extinde în cazuri mult mai largi, adică la concurența și înfășurarea într'un spațiu riemannian.

C. DIRECȚII BIVECTORIALE ȘI TRIVECTORIALE ASOCIATE

§ 20. Direcții trivectoriale asociate. Putem răspunde complet la întrebarea pusă la începutul § 12, introducând o noțiune sugerată de formulele din §§ 1—5.

Fie C o curbă oarecare din S_n, prin ale cărei puncte trece o serie de ∞^1 direcții g tangente la S_n, date de vectorii θ^i.

Dacă aceste direcții sunt înfășurătoare, trivectorul

$$p^{ijk} = \begin{vmatrix} \Omega_1^i & \Omega_2^i & \Omega_3^i \\ \Omega_1^j & \Omega_2^j & \Omega_3^j \\ \Omega_1^k & \Omega_2^k & \Omega_3^k \end{vmatrix}$$

unde Ω_1^i, Ω_2^i, Ω_3^i au expresiile din (I,20), este nul.

Dacă direcțiile nu sunt înfășurătoare, trivectorul p^{ijk} nu este nul; dacă vectorii θ^i sunt fixați geometric într'un mod oarecare, trivectorul p^{ijk} corespunzător determină în fiecare punct al curbei câte un trivector unitar ω^{ijk}, având aceeași direcție trivectorială cu p^{ijk}, ω^{ijk} este același, oricare ar fi modul de fixare geometrică a lui θ^i

$$\omega^{ijk} = T_1 \cdot p^{ijk}. \tag{II,70}$$

T_1, pe care îl considerăm pozitiv, va fi dat de

$$g_{(ijk)(hlt)}\, \omega^{(ijk)}\, \omega^{(hlt)} = T_1^2\, g_{(ijk)(hlt)}\, p^{(ijk)}\, p^{(hlt)} = 1$$

deci,

$$t_1 = \frac{1}{T_1} = \sqrt{g_{(ijk)(hlt)}\, p^{(ijk)}\, p^{(hlt)}}. \tag{II,71}$$

Deoarece ω^{ijk} este un trivector contravariant, urmează că T_1 este un invariant relativ la o schimbare a coordonatelor pe S_n, așa dar un invariant metric relativ la curba C și la seria de ∞^1 vectori θ^i.

La o schimbare a lui σ, ținând seama de (I, 23), avem

$$t_1^* = \left(\frac{d\sigma}{d\sigma^*}\right)^3 t_1, \quad T_1 = \left(\frac{d\sigma^*}{d\sigma}\right)^3 T_1^*, \tag{II,72}$$

ceea ce arată caracterul covariant al lui t_1 și contravariant al lui T_1. Vom numi direcția ω^{ijk} (sau mai bine zis această serie de direcții), *direcție trivec-*

torială asociată de înfășurare a seriei de direcții g — de-a-lungul curbei C, iar cantitatea

$$t_1 = \frac{1}{T_1},$$

curbura trivectorială de înfășurare a seriei de direcții g de-a-lungul curbei C. T_1 *este raza respectivă de curbură.* Această noțiune măsoară oarecum viteza de abatere a direcțiilor g dela o serie de direcții înfășurătoare.

Dacă direcțiile sunt înfășurătoare, avem

$$t_1 = \frac{1}{T_1} = 0$$

și direcția trivectorială de înfășurare este nedeterminată.

Așa dar, dacă prin fiecare punct al unei curbe C din S_n trece o direcție g și aceste direcții nu sunt înfășurătoare în S_n, rezultă univoc determinată o serie de direcții trivectoriale ω^{ijk}, direcțiile trivectoriale ascociate de înfășurare ale direcțiilor g. Această noțiune se poate introduce și într'un spațiu cu conexiune afină, dar nu poate fi utilizată în același mod ca într'un spațiu riemannian.

Având noțiunea de direcții trivectoriale asociate de înfășurare, suntem în stare să regăsim răspunsul relativ la problema propusă la începutul § 12 referitor la înfășurarea direcțiilor g în raport cu varietatea subordonată V_m. Acest lucru se întâmplă atunci, și numai atunci, când sunt verificate condițiile:

$$g_{(ijk)(hlt)} \frac{\partial (x^h, x^l, x^t)}{\partial (u^\lambda, u^\mu, u^\nu)} p^{(ijk)} = 0 \qquad (\lambda, \mu, \nu = 1, \ldots m) \qquad (II,73)$$

deduse din (II,30), în care $\pi^{\alpha\beta\gamma}$ este nul; aceste relații exprimă faptul că direcția trivectorială asociată de înfășurare a seriei g trebue să fie normală tuturor direcțiilor trivectoriale tangente lui V_m, ceea ce este echivalent cu a spune că direcția trivectorială asociată de înfășurare a seriei g trebue să conțină cel puțin o direcție vectorială normală spațiului euclidian m-dimensional, tangent lui V_m în punctul considerat al curbei C, adică tocmai teorema VI.

Așa dar, am stabilit

Teorema XIV: *Dacă prin punctele unei curbe* C, *în varietatea subordonată* V_m, *trec direcțiile* g, *condiția necesară și suficientă pentru înfășurarea direcțiilor* g *în* V_m *este ca direcțiile trivectoriale* ω^{ijk} *asociate de înfășurarea direcțiilor* g *în raport cu spațiul ambiant, să fie normale tuturor direcțiilor trivectoriale tangente lui* V_m, *de-a-lungul curbei* C.

In această teoremă este cuprinsă teorema exprimată de formula (II,24), deoarece atunci când direcțiile g sunt înfășurătoare în spațiul ambiant, direcțiile trivectoriale asociate de înfășurare ale seriei sunt nedeterminate și deci condițiile teoremei XIV pot fi considerate ca satisfăcute.

§ 21. Direcții bivectoriale asociate de înfășurare. Tot pentru a răspunde complet la întrebarea pusă la începutul § 12, introducem încă o noțiune sugerată de formulele din §§ 1 — 5.

Fie C o curbă oarecare din S_n, prin ale cărei puncte trece o serie de ∞^1 direcții g tangente la S_n, date de vectorii θ^i. Dacă aceste direcții sunt înfășurătoare, iar ξ^i vectorii normalizați, σ parametrul normal, bivectorul

$$\overline{p}^{ij} = \begin{vmatrix} \overline{\Omega}_2^i & \Omega_3^i \\ \overline{\Omega}_2^j & \Omega_3^j \end{vmatrix}$$

unde $\overline{\Omega}_2^i$, Ω_3^i au expresiile cunoscute, este nul.

Dacă una din aceste condiții nu este îndeplinită, adică, fie că seria nu este înfășurătoare, fie că fiind înfășurătoare, vectorii ξ^i nu sunt vectorii normalizați, fie că σ nu este parametrul normal, bivectorul $\overline{p}^{ij}$ determină în fiecare punct al curbei C câte un bivector unitar ω^{ij}, având aceeași direcție bivectorială cu $\overline{p}^{ij}$

$$\overline{\omega}^{ij} = \overline{T}_2 \overline{p}^{ij}. \tag{II,74}$$

$\overline{T}_2$ pe care îl considerăm pozitiv va fi dat de

$$g_{(ij)(hk)} \overline{\omega}^{(ij)} \overline{\omega}^{(hk)} = \overline{T}_2^2 g_{(ij)(hk)} \overline{p}^{(ij)} \overline{p}^{(hk)} = 1$$

deci

$$\overline{t}_2 = \frac{1}{\overline{T}_2} = \sqrt{g_{(ij)(hk)} \overline{p}^{(ij)} \overline{p}^{(hk)}}, \tag{II,75}$$

Deoarece $\overline{p}^{ij}$ este un bivector contravariant, urmează că $\overline{T}_2$, este invariant față de o schimbare a coordonatelor pe S_n, așa dar un invariant metric relativ la curba C, la seria de ∞^1 vectori ξ^i și la parametrul σ.

Vom numi direcția bivectorială $\overline{\omega}^{ij}$ (sau mai bine zis această serie de direcții) *directie bivectorială asociată în mod normalizat seriei de vectori* ξ^i, *de-a-lungul curbei* C, *iar cantitatea*

$$\overline{t}_2 = \frac{1}{\overline{T}_2}$$

curbura bivectorială a seriei de vectori ξ^i *de-a-lungul curbei* C, *în raport cu parametrul* σ. $\overline{T}_2$ *este raza de curbură respectivă.* Această noțiune măsoară oarecum viteza de abatere a vectorilor ξ^i dela o serie de vectori normalizați de înfășurare.

In cazul în care ξ^i sunt vectori normalizați de înfășurare, iar σ este parametrul normal respectiv, avem

$$\overline{t}_2 = \frac{1}{\overline{T}_2} = 0$$

și direcția bivectorială asociată este *nedeterminată.*

Așa dar, dacă prin fiecare punct al unei curbe C din S_n, trece o direcție g dată de un vector ξ^i, în condițiile de mai sus rezultă univoc determinată o serie de direcții bivectoriale $\overline{\omega}^{ij}$, direcțiile bivectoriale asociate normalizat seriei de vectori ξ^i. Această noțiune se poate introduce și într'un spațiu cu conexiune afină, dar nu poate fi utilizată în același scop ca în cazul riemannian.

Având noțiunea de direcție bivectorială asociată în mod normalizat unei serii de vectori, putem să ne punem iar problema înfășurării direcțiilor g în raport cu varietatea subordonată V_m.

Știindu-se că vectorii normalizați de înfășurare în S_n sunt astfel și în V_m, urmează că dacă ξ^i sunt astfel de vectori, avem din (II,31)

$$g_{(ij)(hk)} \frac{\partial (x^h, x^k)}{\partial (u^\lambda, u^\mu)} \overline{p}^{(ij)} = 0, \tag{II,76}$$

deoarece $\overline{\pi}^{\alpha\beta}$ este nul.

Aceste relații exprimă faptul că direcția bivectorială asociată în mod normalizat seriei de vectori ξ^i trebue să fie normală tuturor direcțiilor bivectoriale tangente lui V_m, ceea ce este echivalent cu a spune că direcția bivectorială trebue să conțină cel puțin o direcție vectorială normală spațiului euclidian cu m dimensiuni, tangent lui V_m în punctul considerat, de-a-lungul curbei C.

Am stabilit deci

Teorema XV: *Dacă prin punctele unei curbe* C *în varietatea subordonată* V_m *trec direcțiile* g, *condiția necesară și suficientă pentru înfășurarea acestor direcții este ca să se poată determina niște vectori* ξ^i *pe direcțiile* g *și un parametru* σ *în așa fel încât direcțiile bivectoriale asociate în mod normalizat* $\overline{\omega}^{ij}$ *vectorilor* ξ^i *în raport cu spațiul ambiant, să fie normale tuturor direcțiilor bivectoriale tangente lui* V_m, *de-a-lungul curbei* C.

In această teoremă este cuprinsă teorema exprimată de $\overline{p}^{ij} = 0$, deoarece atunci când vectorii ξ^i sunt normalizați, iar σ parametrul normal al seriei g înfășurătoare în spațiul ambiant, direcțiile bivectoriale asociate normalizat de înfășurare sunt nedeterminate și deci condițiile teoremei XV pot fi considerate ca satisfăcute.

§ 22. Direcții bivectoriale asociate de concurență. Tot în scopul de a răspunde în mod complet la întrebarea pusă în § 12, mai introducem încă o noțiune, sugerată tot de formulele din §§ 1—5.

Fie C o curbă oarecare din S_n, prin ale cărei puncte trece o serie de ∞^1 direcții g tangente la S_n, date de vectorii θ^i. Dacă aceste direcții sunt concurente, iar ξ^i vectorii principali (normalizați), bivectorul

$$p^{ij} = \begin{vmatrix} \Omega_2^i & \Omega_3^i \\ \Omega_2^j & \Omega_3^j \end{vmatrix}$$

este nul.

Dacă una din aceste condiții nu este îndeplinită, fie pentrucă seria nu este concurentă, fie pentrucă fiind concurentă, vectorii ξ^i nu sunt vectorii asociați, bivectorul p^{ij} determină în fiecare punct al curbei C câte un bivector unitar ω^{ij} având aceeași direcție bivectorială cu p^{ij}

$$\omega^{ij} = T_2 \, p^{ij}. \tag{II,77}$$

T_2 pe care îl considerăm pozitiv va fi dat de

$$g_{(ij)(hk)} \, \omega^{(ij)} \omega^{(hk)} = T_2^2 \, g_{(ij)(hk)} \, p^{(ij)} p^{(hk)} = 1$$

deci

$$t_2 = \frac{1}{T_2} = \sqrt{g_{(ij)(hk)} p^{(ij)} p^{(hk)}}. \qquad \text{(II,78)}$$

Deoarece p^{ij} este un bivector contravariant, urmează că T_2 este un invariant față de o schimbare a coordonatelor pe S_n, așa dar, un invariant metric relativ la curba C și la seria de ∞^1 vectori ξ^i.

Vom numi direcția bivectorială ω^{ij} (sau mai bine zis această serie de direcții) *direcție bivectorială asociată seriei de vectori* ξ^i *de-a-lungul curbei* C, iar cantitatea

$$t_2 = \frac{1}{T_2},$$

curbura bivectorială a seriei de vectori ξ^i *de-a-lungul curbei* C. T_2 *este raza de curbură respectivă.*

Această noțiune măsoară oarecum viteza de abatere a vectorului dela o serie de vectori asociați de concurență.

In cazul în care ξ^i sunt vectori asociați de concurență, avem:

$$t_2 = \frac{1}{T_2} = 0$$

și direcția bivectorială asociată este nedeterminată.

Așa dar, dacă prin fiecare punct al unei curbe C din S_n trece o direcție g dată de un vector ξ^i, în condițiile de mai sus rezultă univoc determinată o serie de direcții bivectoriale ω^{ij}, direcțiile bivectoriale asociate seriei de vectori ξ^i.

Această noțiune se poate introduce și într'un spațiu cu conexiune afină, dar nu o putem utiliza în același scop ca în cazul riemannian.

Având noțiunea de direcție bivectorială asociată concurenței unei serii de vectori, putem să ne punem iar problema concurenței direcțiilor g în raport cu varietatea subordonată V_m.

Știindu-se că vectorii principali de concurență în S_n sunt astfel și în V_m, urmează că dacă ξ^i sunt astfel de vectori, avem din (II, 32)

$$g_{(ij)(hk)} \frac{\partial (x^h, x^k)}{\partial (u^\lambda, u^\mu)} p^{(ij)} = 0 \qquad (\lambda, \mu = 1, \ldots, m). \qquad \text{(II,79)}$$

deorece $\pi^{\alpha\beta}$ este nul.

Aceste relații exprimă faptul că direcția bivectorială asociată seriei de vectori ξ^i trebue să fie normală tuturor direcțiilor bivectoriale tangente lui V_m, ceea ce este echivalent cu a spune că direcția bivectorială trebue să conțină cel puțin o direcție vectorială normală spațiului euclidian cu m dimensiuni, tangent lui V_m în punctul considerat de-a-lungul curbei C.

Am stabilit deci

Teorema XVI: *Dacă prin punctele unei curbe* C, *în varietatea subordonată* V_m, *trec direcțiile* g, *condiția necesară și suficientă pentru concurența acestor direcții este ca să se poată determina niște vectori* ξ^i *pe direcțiile* g, *în așa fel încât direcțiile bivectoriale* ω^{ij} *asociate vectorilor* ξ^i *în raport cu spațiul*

ambiant, să fie normale tuturor direcțiilor bivectoriale tangente lui V_m, *de-a-lungul curbei* C.

In această teoremă este cuprinsă teorema exprimată de $p^{ij} = 0$, deoarece, atunci când vectorii ξ^i sunt asociați de concurență în spațiul ambiant, direcțiile bivectoriale asociate de concurență sunt nedeterminate și deci condițiile teoremei XVI pot fi considerate ca satisfăcut.

§ 23. Infășurarea în varietăți tangente

a. *Studiul problemei cu ajutorul ecuațiilor liniare*

Fie două varietăți V_m, $V^*_{m^*}$ de dimensiuni respectiv m și m^* tangente de-a-lungul unei curbe C; considerăm cele două varietăți scufundate într'un același spațiu riemannian S_n.

Cu notațiile obișnuite, avem pentru V_m

$$g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \Omega_1^i = \gamma_{\alpha\beta} H_1^\alpha \qquad (\beta = 1, \ldots, m) \tag{II,80}$$

și analog pentru $V^*_{m^*}$,

$$g_{ij} \frac{\partial x^{*j}}{\partial u^{*\beta^*}} \Omega_1^{*i} = \gamma^*_{\alpha^*\beta^*} H_1^{*\alpha^*} \qquad (\beta^* = 1, \ldots m^*). \tag{II,80'}$$

Ținând seama că de-a-lungul curbei C, $x^i = x^{*i}$, $\Omega_1^i = \Omega_1^{*i}$

$$u^\gamma = u^\gamma(u^{*1}, \ldots, u^{*m^*})$$

deducem din (II,80') prin înmulțire cu $\dfrac{\partial u^{*\beta^*}}{\partial u^\beta}$ și contractare după β^*

$$g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \Omega_1^i = \gamma^*_{\alpha^*\beta^*} \cdot \frac{\partial u^{*\beta^*}}{\partial u^\beta} \cdot H_1^{*\alpha^*},$$

care, comparat cu (II, 80), dă:

$$\gamma^*_{\alpha^*\beta^*} \frac{\partial u^{*\beta^*}}{\partial u^\beta} H_1^{*\alpha^*} = \gamma_{\alpha\beta} H_1^\alpha, \tag{II,81}$$

care arată că, dacă $H_1^{*\alpha^*} = 0$ atunci și $H_1^\alpha = 0$, adică, dacă de-a-lungul curbei C o serie de direcții sunt înfășurătoare în $V^*_{m^*}$, sunt la fel și în V_m; inversând rolul lui m și m^*, deducem că înfășurarea are loc concomitent în cele două varietăți; în plus, parametrul principal este același; așa dar, și parametrul normal și vectorul principal și cel normalizat sunt aceiași; afară de aceasta, și vectorul asociat de înfășurare este același.

In mod analog, din

$$\gamma^*_{\alpha^*\beta^*} \frac{\partial u^{*\beta^*}}{\partial u^\beta} \cdot H_2^{*\alpha^*} = \gamma_{\alpha\beta} H_2^\alpha, \tag{II,81'}$$

deducem același rezultat pentru concurență și din

$$\gamma^*_{\alpha^*\beta^*}\frac{\partial u^{*\beta^*}}{\partial u^\beta}\;H_3^{*\alpha^*}=\gamma_{\alpha\beta}\,H_3^\alpha, \tag{II,81''}$$

reiese rezultatul datorat lui B i a n c h i pentru paralelism.

In locul lui (II,81) putem întrebuința

$$\gamma^*_{\alpha^*\beta^*}\frac{\partial u^{*\beta^*}}{\partial u^\beta}\overline{H}_2^{*\alpha^*}=\gamma_{\alpha\beta}\,\overline{H}_2^\alpha$$

și deducem rezultatul referitor la înfășurare.

b. *Studiul problemei cu ajutorul trivectorilor*

In același mod în care, din (II,80) și (II,80') s'a dedus (II,81), la fel din

$$g_{(ijk)(lmn)}\frac{\partial(x^l,\,x^m,\,x^n)}{\partial(u^\alpha,\,u^\beta,\,u^\gamma)}\,p^{(ijk)}=\gamma_{(\alpha\beta\gamma)(\lambda\mu\nu)}\,\pi^{(\lambda\mu\nu)}, \tag{II,82}$$

și

$$g^*_{(i^*j^*k^*)(l^*m^*n^*)}\frac{\partial(x^{*l^*},\,x^{*m^*},\,x^{*n^*})}{\partial(u^{*\alpha^*},\,u^{*\beta^*},\,u^{*\gamma^*})}\,p^{*(i^*j^*k^*)}=\gamma^*_{(\alpha^*\beta^*\gamma^*)(\lambda^*\mu^*\nu^*)}\,\pi^{*(\lambda^*\mu^*\nu^*)} \tag{II,82'}$$

ținând seama că de-a-lungul curbei C

$$x^i=x^{*i},\;p^{ijk}=p^{*i^*j^*k^*}$$

deducem din (II,82') prin înmulțire cu

$$\frac{\partial(u^{*\alpha^*},\,u^{*\beta^*},\,u^{*\gamma^*})}{\partial(u^\alpha,\,u^\beta,\,u^\gamma)}$$

și contractând după α^*, β^*, γ^*

$$g_{(ijk)(lmn)}\frac{\partial(x^l,\,x^m,\,x^n)}{\partial(u^\alpha,\,u^\beta,\,u^\gamma)}\,p^{(ijk)}=\gamma^*_{(\alpha^*\beta^*\gamma^*)(\lambda^*\mu^*\nu^*)}\frac{\partial(u^{*\alpha^*},\,u^{*\alpha^*},\,u^{*\gamma^*})}{\partial(u^\alpha,\,u^\beta,\,u^\gamma)}\,\pi^{*(\lambda^*\mu^*\nu^*)}$$

care comparat cu (II, 82), dă:

$$\gamma^*_{(\alpha^*\beta^*\gamma^*)(\lambda^*\mu^*\nu^*)}\frac{\partial(u^{*\alpha^*},\,u^{*\beta^*},\,u^{*\gamma^*})}{\partial(u^\alpha,\,u^\beta,\,u^\gamma)}\,\pi^{*(\lambda^*\mu^*\nu^*)}=\gamma_{(\alpha\beta\gamma)(\lambda\mu\nu)}\,\pi^{(\lambda\mu\nu)} \tag{II,83}$$

care arată că, dacă $\pi^{*(\lambda^*\mu^*\nu^*)}$ este nul, atunci și $\pi^{\lambda\mu\nu}$ este nul; schimbând rolul lui m cu al lui m^*, deducem că trivectorii considerați sunt nuli concomitent în V_m și în $V^*_{m^*}$, adică avem o nouă demonstrație a faptului că înfășurarea are loc concomitent în V_m și în $V^*_{m^*}$.

c. *Studiul problemei cu ajutorul bivectorilor*

In același fel ca la punctele *a)* și *b)*, considerând

$$g_{(ij)(lm)} \frac{\partial (x^l, x^m)}{\partial (u^\alpha, u^\beta)} \overline{p}^{(ij)} = \gamma_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)} \overline{\pi}^{(\lambda\mu)}, \tag{II,84}$$

$$g_{(i^*j^*)(l^*m^*)} \frac{\partial (x^{*i^*}, x^{*m^*})}{\partial (u^{*\alpha^*}, u^{*\beta^*})} \overline{p}^{*(i^*j^*)} = \gamma^*_{(\alpha^*\beta^*)(\lambda^*\mu^*)} \overline{\pi}^{*(\lambda^*\mu^*)} \tag{II,84'}$$

și ținând seama că de-a-lungul curbei C, $x^i = x^{*i}$, $\overline{p}^{ij} = \overline{p}^{*i^*j^*}$, deducem din (II, 84') prin înmulțire cu

$$\frac{\partial (u^{*\alpha^*}, u^{*\beta^*})}{\partial (u^\alpha, u^\beta)}$$

și contractând după α^*, β^*,

$$g_{(ij)(lm)} \frac{\partial (x^l, x^m)}{\partial (u^\alpha, u^\beta)} \overline{p}^{(ij)} = \gamma^*_{(\alpha^*\beta^*)(\lambda^*\mu^*)} \overline{\pi}^{*(\lambda^*, \mu^*)},$$

care, comparat cu (II, 84) dă

$$\gamma^*_{(\alpha^*\beta^*)(\lambda^*\mu^*)} \frac{\partial (u^{*\alpha^*}, u^{*\beta^*})}{\partial (u^\alpha, u^\beta)} \overline{\pi}^{*(\lambda^*\mu^*)} = \gamma_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)} \overline{\pi}^{(\lambda\mu)} \tag{II,85}$$

care arată că, dacă $\overline{\pi}^{*(\lambda^*, \mu^*)}$ este nul, atunci și $\overline{\pi}^{\lambda\mu}$ este nul; schimbând rolul lui m cu al lui m^*, deducem că bivectorii considerați sunt nuli concomitent în V_m și în $V^*_{m^*}$, adică avem o nouă demonstrație a faptului că înfășurarea are loc concomitent în V_m și $V^*_{m^*}$, cu același parametru principal. Dacă în loc de a considera $\overline{p}^{ij}$, considerăm p^{ij}, avem după calcule identice același rezultat referitor la concurență.

d. *Studiul problemei pe baza teoremelor înfășurării în subspații*

In cazul în care $m = m^*$, adică în cazul în care în punctele curbei C, V_m și $V^*_{m^*}$ au aceleași spații euclidiene m-dimensionale tangente, rezultă din teoremele IV, V, și din rezultatul datorat lui B i a n c h i, că înfășurarea, concurența și paralelismul sunt aceleași de-a-lungul curbei C.

Dacă $m^* > m$, urmează că spațiul euclidian m-dimensional tangent lui V_m este conținut în spațiul euclidian m^*-dimensional tangent lui $V^*_{m^*}$, așa dar avem același rezultat ca în cazul $m = m^*$.

Deoarece curburile asociate sunt măsurile diverșilor vectori, bivectori, trivectori asociați, urmează că deoarece aceștia sunt identici pentru V_m și $V^*_{m^*}$, același lucru se întâmplă și pentru curburi.

Așa dar, s'a demonstrat

T e o r e m a XVII: *Pentru două varietăți* V_m, $V^*_{m^*}$ *tangente de-a-lungul unei curbe* C, *înfășurarea este aceeași de-a-lungul acestei curbe*; *vectorii principali, parametrii principali, parametrii normali, vectorii normalizați, vectorii și trivectorii asociați de înfășurare, vectorii și bivectorii asociați în mod normalizat de înfășurare, precum și curburile respective, sunt și ei identici.*

Teorema XVIII: *Pentru două varietăți* V_m, V_{m*}^* *tangente de-a-lungul unei curbe* C, *concurența este aceeași de-a-lungul acestei curbe*; *vectorii principali, parametrii normalizați, bivectorii asociați de concurență precum și curburile respective sunt și ei identici.*

Bianchi a demonstrat următoarea teoremă: Pentru două varietăți V_m, V_{m*}^* *tangente* de-a-lungul unei curbe C, paralelismul este același de-a-lungul acestei curbe, vectorii asociați, precum și curburile respective fiind identice.

e. *Aplicație*

Să ne punem următoarea întrebare:

Dându-se o curbă C *în* S_n *și o serie* ∞^1 *de direcții* g *date de vectorii* ξ^i, *există oare varietăți conținând pe* C *și direcțiile* g *astfel ca acestea să fie înfășurătoare, concurente sau paralele în acea varietate?*

Pentru *înfășurare*, problema se rezolvă imediat afirmativ, deoarece orice serie de direcții este înfășurătoare într'un V_2; așa dar, este suficient să facem să treacă prin C o varietate V_2 care să conțină aceste direcții.

In cazul *concurenței* și *paralelismului*, dacă direcțiile g sunt tangente la C, problema se rezolvă și în acest caz afirmativ, făcând să treacă prin C o varietate (de ex. un V_2) care are C drept geodezică.

Dacă direcțiile g nu sunt tangente la C, se construește varietatea V_2, loc al geodezicelor lui S_n, care pleacă din punctele lui C în direcțiile g. Pentru a putea da un răspuns afirmativ problemei noastre, este suficient ca direcțiile g să fie concurente sau paralele în raport cu V_2. Din teorema XI și din rezultatul analog al lui Bianchi, știm că pentru acest lucru este necesar și suficient ca direcțiile asociate de concurență, respectiv de paralelism, în raport cu S_n, să fie ortogonale lui V_2; or, pentru aceasta trebue ca direcțiile asociate respective să fie ortogonale vectorilor ξ^i și curbei C.

Dar, luând în considerație rezultatele din § 27, urmează că pentru concurență trebue ca

$$\frac{dr}{ds} = -\cos\alpha$$

ceea ce exprimă faptul că lungimea r a vectorului ξ^i variază ca un vector dintr'o serie concurentă, și astfel avem îndeplinită condiția ca direcțiile asociate de concurență lui ξ^i să fie ortogonale lui ξ^i; din a doua condiție deducem

$$g_{ij}\frac{du^i}{d\tau}\Omega_2^j = g_{ij}\frac{du^i}{d\tau}\left(\frac{D_3\xi^j}{d\tau}+\frac{du^j}{d\tau}\right) = \frac{ds}{d\tau}\left(r_3\cos\gamma+\frac{ds}{d\tau}\right) = 0$$

așa dar,

$$r_3\cos\gamma+\frac{ds}{d\tau}=0 \qquad \text{(II,86)}$$

unde γ este unghiul dintre tangenta la curba C și $\frac{D_3\xi^i}{d\tau}$.

In cazul $\tau = s$, avem

$$r_3\cos\gamma = -1 \qquad \text{(II,86')}$$

adică *proiecția vectorului asociat de paralelism, pe tangenta la curba* C *este* -1.

In cazul paralelismului

$$g_{ij} \frac{du^i}{ds} \cdot \frac{D_3 \xi^j}{ds} = 0 \qquad (II,86'')$$

dacă r este constant; așa dar, în acest caz $\gamma = \frac{\pi}{2}$, rezultat datorat lui B i a n c h i [9],[10].

Dacă lungimile vectorilor ξ^i sunt în așa fel alese, încât să varieze ca la o serie de vectori înfășurători, concurenți, respectiv paraleli (§ 27) urmează că, pentru acești vectori direcțiile asociate respective sunt ortogonale pe ξ^i; așa dar, unicele condiții ce rămân sunt (II, 86') și (II, 86'').

D. CONSIDERAREA EXTRINSECĂ A PROBLEMEI DIRECȚIILOR ÎNFĂȘURĂTOARE ÎN CAZUL SPAȚIILOR RIEMANNIENE

§ 24. Definiția extrinsecă a înfășurării într'un spațiu riemannian. Să considerăm problema direcțiilor înfășurătoare pe o varietate riemanniană cu m dimensiuni V_m; presupunem că această varietate V_m este scufundată într'un spațiu euclidian E_n cu n dimensiuni, fapt care este întotdeauna posibil dacă n este suficient de mare [26], [27], [28].

Fie C o curbă în V_m; să considerăm că, din fiecare punct M al curbei C, pornește o direcție în V_m. O astfel de direcție poate fi definită cu ajutorul unei drepte g tangente în M varietății curbe V_m și situate în spațiul euclidian E_n.

Pe fiecare dreaptă g, să considerăm un punct M_1 (punct adjunct al lui Voss [16] și fie C_1 curba adjunctă, loc al acestor puncte. Curba asociată Γ este rezultatul desfășurării curbei C_1, căci M' provine din M_1 desfășurat.

Fie τ_1, tangenta în M_1 la curba C_1 și fie E_m^M, spațiul euclidian cu m dimensiuni, tangent în M la varietatea V_m.

In paragaraful 16, teorema VIII. s'a arătat că, condiția necesară și suficientă pentru ca direcțiile g să fie înfășurătoare în raport cu V_m, este ca să se poată determina aceste puncte M_1 în așa fel, încât τ_1 să fie cuprinsă în spațiul euclidian cu $n - m + 1$ dimensiuni, care este uniunea spațiului euclidian cu $n - m$ dimensiuni, normal la V_m și a dreptei g care nu aparține spațiului normal.

In acest paragraf, pornim dela această proprietate și definim extrinsec direcțiile înfășurătoare cu ajutorul ei.

Pentru a justifica denumirea de direcții înfășurătoare, se poate arăta că, prin desfășurarea pe un spațiu euclidian, ele înfășură într'adevăr o curbă.

Cum cazul $m = 2$, $n = 3$ este cel mai simplu, vom lua acest caz drept *imagine intuitivă*, considerațiile având însă caracter general; în acest caz, V_m este V_2, adică o suprafață ordinară și E_n este E_3, adică spațiul ordinar. E_m sunt planele E_2 tangente suprafeței de-a-lungul lui C, și care generează desfășurabila D, circumscrisă lui V_2 de-a-lungul lui C. Să fixăm direcțiile g pe D și să aplicăm această desfășurabilă pe un plan. In această aplicare, un plan

oarecare $E_2^{M^*}$ tangent în M^* va veni să se rabată pe planul tangent infinit vecin E_2, rotindu-se în jurul dreptei de intersecție a celor două plane $E_2^{M^*}$ și E_2^M adică în jurul dreptei conjugate lui MM^*.

Fie M_1^* pentru punctul M^* ceea ce este M_1 pentru M. Vectorul $M_1M_1^*$ are o componentă pe normala la V_2 deci la E_2^M; dacă vectorul $M_1M_1^*$ s'ar reduce la această componentă, punctul M_1^* al dreptei g^*, care se află în $E_2^{M^*}$, prin rotația planului acestuia ar veni să se suprapună punctului M_1 al dreptei g; acest fapt având loc pentru toate direcțiile g, urmează că, prin desfășurare, direcțiile g ar deveni concurente, așa dar, direcțiile g ar fi *concurente în sens Myller*.

Existând însă și o componentă a lui $M_1M_1^*$, dirijată pe direcția lui g, urmează că punctul M_1^* nu va veni să se suprapună peste M_1, ci va ocupa o poziție pe direcția lui g, deoarece componenta care era pe g înainte de desfășurare, va fi tot pe g și după desfășurare, menținându-și și mărimea; așa dar, distanța $M_1M_1^*$ este tocmai lungimea componentei lui τ_1 pe direcția lui g.

Fie Γ locul geometric al punctelor M', după desfășurare; dreapta g, după desfășurare, conținând două puncte infinit vecine M' și $M^{*\prime}$ ale lui Γ, urmează că este tangentă la Γ. Așa dar, după desfășurare, dreptele g înfășură curba Γ.

Inlocuind peste tot în cele de mai sus planul normal cu spațiul euclidian normal cu $n - m + 1$ dimensiuni, avem același rezultat în general.

In cazul în care $M_1M_1^*$ este colinear cu g, atunci dreptele g înfășură curba Γ, chiar înainte de desfășurare, deci, cu atât mai mult după aceea. In cazul în care condițiile expuse mai sus pentru înfășurare, concurență, paralelism sunt îndeplinite, dar nu în orice punct M, ci doar în unele, avem pentru seria de direcții, *puncte de înfășurare, de concurență, de paralelism.*

Trebue remarcat că, în cazul $m=2, n=3$, toate seriile de direcții care se pot lua de-a-lungul unei curbe C, sunt înfășurătoare. Aceasta revine la faptul că, pe suprafața riglată generată de dreptele g, există o curbă C ale cărei tangențe sunt în plane normale la suprafața V_2. Curbele C și C_1 sunt conjugate în involuția lui Chasles.

§ 25. Deducerea extrinsecă a ecuațiilor înfășurării într'un spațiu riemannian. Pentru a stabili ecuațiile diferențiale ale înfășurării în cazul general, pornind dela definiția din paragraful precedent, fie x^i $(i = 1,\ldots,n)$ coordonatele unui punct oarecare al spațiului euclidian E_n.

Fie

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m), \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{II,1}$$

ecuațiile spațiului curb pe care l-am presupus scufundat în E_n și

$$x^i = x^i(\sigma) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{II,88}$$

ecuațiile curbei C, în care σ reprezintă un parametru pe C.

Fie

$$\alpha^i = \alpha^i(\sigma) \tag{II,89}$$

un vector al dreptei g ieșite din M și ρ, un parametru pe g.

Coordonatele lui M_1 vor fi

$$x^i(\sigma) + \rho(\sigma)\alpha^i(\sigma), \tag{II,90}$$

iar un vector de pe tangenta τ_1 în acest punct la curba C_1 va fi

$$d(x^i + \rho\alpha^i). \tag{II,91}$$

Condițiile problemei cer ca acest vector să fie în spațiul euclidian cu $n-m+1$ dimensiuni care sunt uniunea spațiului euclidian cu $n-m$ dimensiuni normal la V_m în M și a dreptei g; fie $N_p^i (p = 1, \ldots, n-m)$, $n-m$ direcții independente normale la V_m în M.

Așa dar, condițiile problemei cer ca

$$d(x^i + \rho\alpha^i) = (\lambda\alpha^i + \mu^p N_p^i)\, d\sigma \tag{II,92}$$

cu λ, μ^p, funcții de σ (se sumează după p).

Deoarece curba C se află în V_m, avem

$$\frac{dx^i}{d\sigma} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \dot{u}^\alpha, \tag{II,93}$$

unde $\dot{u}^\alpha$ sunt parametrii în V_m ai tangentei la curba C.

De asemenea, pentrucă dreptele g sunt tangente la V_m, avem

$$\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\theta^\alpha, \tag{II,94}$$

unde θ^α sunt parametrii dreptei g în V_m.

Să scriem condiția ca proiecția lui $M_1M_1^*$ pe o direcție oarecare, δx^i din E_m^M să se reducă la proiecția componentei sale de pe g pe direcția considerată; aceasta revine la a înmulți ambii membri din (II,92) cu δx^i; deci

$$\frac{d}{d\sigma}(x^i + \rho\alpha^i)\,\delta x^i = \lambda\alpha^i\,\delta x^i, \tag{II,95}$$

unde

$$\delta x^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\delta u^\alpha \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ \alpha = 1, \ldots, m \end{pmatrix}. \tag{II,96}$$

Ecuația (II,84) devine

$$\left(\frac{dx^i}{d\sigma}+\frac{d\rho}{d\sigma}\alpha^i+\rho\frac{d\alpha^i}{d\sigma}\right)\delta x^i=\lambda\alpha^i\,\delta x^i,$$

sau

$$\left(\frac{dx^i}{d\sigma}+\frac{d\rho}{d\sigma}\alpha^i+\rho\frac{d\alpha^i}{d\sigma}\right)\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\delta u^\alpha=\lambda\alpha^i\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\delta u^\alpha. \tag{II,97}$$

Inlocuind pe

$$\frac{dx^i}{d\sigma},\ \alpha^i$$

prin valorile lor, obținem

$$\left[\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\dot{u}^\alpha+\dot{\rho}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\theta^\alpha+\rho\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{d\theta^\alpha}{d\sigma}+\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}\theta^\alpha\dot{u}^\beta\right)\right]\frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma}\delta u^\gamma= \tag{II,98}$$

$$=\lambda\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma}\theta^\alpha\delta u^\gamma,$$

care trebue satisfăcute oricare ar fi δu^γ.

Dacă scriem că coeficienții lui δu^γ din cei doi membri sunt egali și îi transformăm cu ajutorul formulelor cunoscute

$$\begin{aligned}&\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma}=g_{\alpha\gamma}\\&\frac{\partial x^i}{\partial u^\gamma}\cdot\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}=\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}\end{aligned}\qquad\begin{pmatrix}i=1,\ldots\ldots n\\ \alpha,\beta,\gamma=1,\ldots m\end{pmatrix} \tag{II,99}$$

obținem

$$g_{\alpha\gamma}\dot{u}^\alpha+\dot{\rho}\,g_{\alpha\gamma}\theta^\gamma+\rho\,g_{\alpha\gamma}\cdot\frac{d\theta^\alpha}{d\sigma}+\rho\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}\theta^\alpha\dot{u}^\beta=\lambda g_{\alpha\gamma}\theta^\alpha. \tag{II,100}$$

Inmulțind cu $g^{\mu\gamma}$ și contractând după γ *deducem ecuațiile* (I,6). După cum era de așteptat, aceste ecuații sunt intrinsece, depinzând doar de elementele lui V_m și nu de cele ale lui E_n. Reciproc, dela ecuațiile (I,6) putem reface toate aceste calcule în ordine inversă și *ajungem la* (II, 92).

Problema analoagă pentru cazul direcțiilor concurente pornește dela teorema XXII și avem rezultatele, date în [3] și [4], considerând în cele de mai sus $\lambda=o$.

CAPITOLUL III

RELAȚII METRICE

A. RELAȚII METRICE RELATIVE LA DIRECȚIILE ÎNFĂȘURĂTOARE

§ 26. Studiul vectorilor normalizați și al vectorilor principali. Să considerăm într'un V_n metric, două serii de direcții, g, γ, înfășurătoare de-a-lungul aceleiași curbe C. Fie σ_0, σ_0^*, respectiv parametrii lor normali,

$$\overline{u}^i = \overline{u}^i(\sigma_0), \quad \overline{v}^i = \overline{v}^i(\sigma_0^*) \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad \text{(III,1)}$$

ecuațiile curbelor asociate celor două serii, $\dot{\overline{u}}^i$, $\overline{v}'^i$, vectorii lor normalizați, μ, μ^* lungimile acestora, α, α^* unghiurile făcute de ei cu tangenta la curba C, (dată de $\dot{u}^i$ sau v'^i), θ unghiul lor. Notăm cu puncte derivarea în σ_0 și cu accente, derivarea în σ_0^*. Curba C este dată de

$$u^i = u^i(\sigma_0) = v^i(\sigma_0^*). \qquad \text{(III,2)}$$

Avem deci

$$v'^i = \frac{du^i}{d\sigma_0^*} = \dot{u}^i \frac{d\sigma_0}{d\sigma_0^*}; \quad \overline{v}'^i = \frac{d\overline{v}^i}{d\sigma_0^*} = \dot{\overline{v}}^i \cdot \frac{d\sigma_0}{d\sigma_0^*}. \qquad \text{(III,3)}$$

Așa dar, lungimea lui $\dot{u}^i$ este

$$l = \frac{ds}{d\sigma_0}$$

și a lui v'^i este

$$l \frac{d\sigma}{d\sigma_0^*} = \frac{ds}{d\sigma_0^*}.$$

In cele ce urmează, vom studia variația lungimii vectorilor normalizați, a unghiului pe care-l face o direcție transportată cu curba de transport, precum și variația unghiului vectorilor $\dot{u}^i$, $\overline{v}'^i$.

Deoarece fiecare din cele două direcții poate fi înfășurătoare, (M_1), concurentă, (M_2) sau paralelă, (T), putem distinge 6 cazuri, pe care le notăm

$$M_1 - M_1, \; M_2 - M_2, \; T - T, \; M_1 - M_2, \; M_1 - T, \; M_2 - T.$$

a. *Cazul* $M_1 - M_1$

In acest caz, ecuațiile transportului sunt:

$$\begin{aligned} D\dot{\overline{u}}^i + \dot{u}^i d\log\sigma_0 = 0 \qquad & D\overline{v}'^i + v'^i d\log\sigma_0^* = 0 \\ D\dot{\overline{u}}_i + \dot{u}_i d\log\sigma_0 = 0 \qquad & D\overline{v}'_i + v'_i d\log\sigma_0^* = 0, \end{aligned} \qquad \text{(III,4)}$$

unde s'a notat

$$\dot{\bar{u}}_i = g_{ij}\dot{\bar{u}}^j \qquad \dot{u}_i = g_{ij}\dot{u}^j$$
$$\bar{\varphi}'_i = g_{ij}\bar{\varphi}'^j \qquad \varphi'_i = g_{ij}\varphi'^j.$$

Așa dar

$$d(l\,\mu\cos\alpha) = D(\dot{\bar{u}}_i\,\dot{u}^i) = \dot{\bar{u}}_i\,D\dot{u}^i + \dot{u}^i\,D\dot{\bar{u}}_i = -\dot{u}^i\,\dot{u}_i\,d\log\sigma_0 + \dot{\bar{u}}_i\,D\dot{u}^i = \tag{III,5}$$
$$= -l^2\,d\log\sigma_0 + \dot{\bar{u}}_i\,D\dot{u}^i.$$

Fie p^i vectorul unitar pe tangenta la curba C; așa dar

$$p^i = \frac{\dot{u}^i}{l}. \tag{III,6}$$

Deci

$$D\dot{u}^i = D(lp^i) = l\,Dp^i + p^i\,dl.$$

Dacă notăm prima curbură (curbura geodezică în cazul unei curbe pe o hipersuprafață a unui spațiu euclidian) a curbei C cu $\frac{1}{\rho_g}$ și cu s, arcul curbei, avem:

$$Dp^i = \frac{ds}{\rho_g}\cdot\eta_g^i, \tag{III,7}$$

unde η_g^i este versorul primei normale principale a curbei C.

Așa dar

$$D\dot{u}^i = \frac{l\,ds}{\rho_g}\cdot\eta_g^i + p^i\,dl = \frac{l\,ds}{\rho_g}\cdot\eta_g^i + \frac{dl}{l}\,\dot{u}^i, \tag{III,8}$$

deci

$$d(l\,\mu\cos\alpha) = -l^2\,d\log\sigma_0 + \frac{l\,ds}{\rho_g}\,\eta_g^i\,\dot{\bar{u}}_i + \dot{u}^i\,\dot{\bar{u}}_i + \dot{u}^i\,\dot{\bar{u}}_i\,\frac{dl}{l} =$$
$$= -l^2\,d\log\sigma_0 + \mu\cos\alpha\,dl + \frac{l\,ds}{\rho_g}\cdot\eta_g^i\,\dot{\bar{u}}_i = -l^2\,d\log\sigma_0 + \tag{III,9}$$
$$+ \mu\cos\alpha\,dl + \frac{\mu\,l\cos\varphi\,ds}{\rho_g},$$

unde φ este unghiul dintre η_g^i și curba C.

Apoi,

$$d(\mu\mu^*\cos\theta) = D(\dot{\bar{u}}^i\,\bar{\varphi}'_i) = \dot{\bar{u}}^i\,D\bar{\varphi}'_i + \bar{\varphi}'_i\,D\dot{\bar{u}}^i = -\dot{\bar{u}}^i\,\varphi'_i\,d\log\sigma_0^* -$$
$$-\dot{u}^i\,\bar{\varphi}'_i\,d\log\sigma_0 = -\frac{ds}{\sigma_0\,\sigma_0^*}(\sigma_0\,\mu\cos\alpha + \sigma_0^*\,\mu^*\cos\alpha^*). \tag{III,10}$$

Deoarece

$$\xi^i = \frac{d\bar{u}^i}{d\tau} = \frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0} \cdot \frac{d\sigma_0}{d\tau},$$

deducem

$$r = \mu \frac{d\sigma_0}{d\tau} = \mu e^\tau = \mu\sigma_0, \quad r^* = \mu^* \sigma_0^*. \tag{III,11}$$

Aşa dar, în cazul în care produsul scalar $\bar{u}^i \bar{v}_i$ este constant, avem

$$r \cos\alpha + r^* \cos\alpha^* = 0, \tag{III,12}$$

adică proiecţiile vectorilor principali pe tangenta în M la curba C sunt egale şi de semne opuse.

Dacă cele două direcţii coincid, avem în (III,10)

$$\theta = 0, \quad \mu = \mu^*, \quad \sigma_0 = \sigma_0^*, \quad \alpha = \alpha^*,$$

deci

$$d\mu = -\frac{\cos\alpha}{\sigma_0} \cdot ds. \tag{III,13}$$

Ţinând seama de această valoare a lui $d\mu$ şi de valoarea lui l, deducem din (III, 9), după ce facem diferenţierea din primul membru şi apoi toate reducerile posibile,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin\alpha}{\mu\sigma_0} - \frac{\cos\varphi}{\rho_g \sin\alpha}. \tag{III,14}$$

Din (III, 10), făcând diferenţierea din primul membru şi ţinând seama că $d\mu$ este dat de (III, 13), iar

$$d\mu^* = -\frac{\cos\alpha^*}{\sigma_0^*} \cdot ds,$$

deducem

$$\left(\frac{\cos\alpha}{\sigma_0\mu} + \frac{\cos\alpha^*}{\sigma_0\mu^*}\right)\cos\theta + \sin\theta\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\sigma_0\mu \cdot \sigma_0^*\mu^*}(\sigma_0\mu\cos\alpha + \sigma_0^*\mu^*\cos\alpha^*). \tag{III,15}$$

Dacă în (III, 13) înlocuim pe μ cu valoarea sa din (III, 11) deducem, după ce se fac toate calculele,

$$\frac{dr}{ds} - r\frac{d\tau}{ds} + \cos\alpha = 0. \tag{III,16}$$

Făcând același lucru în (III,14) și (III,15), căpătăm

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin\alpha}{r} - \frac{\cos\varphi}{\rho_g \sin\alpha} \tag{III,17}$$

$$\left(\frac{\cos\alpha}{r} + \frac{\cos\alpha^*}{r^*}\right)\cos\theta + \sin\theta\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r r^*}(r\cos\alpha + r^*\cos\alpha^*). \tag{III,18}$$

Aceste trei ultime formule le putem deduce și în alt mod, studiind direct vectorii principali. Pentru aceasta, să considerăm o serie de vectori ξ^i, oarecare, de-a-lungul curbei C și fie τ un parametru fixat geometric; atașăm seriei considerate, vectorii dați de

$$\Omega_1^i = \frac{d\xi^i}{d\tau} + \frac{du^i}{d\tau} - \xi^i, \tag{III,19}$$

a căror anulare arată că direcțiile considerate sunt înfășuratoare, ξ^i vectorii principali respectivi și τ parametrul principal respectiv.

Inmulțind (III,19) cu ξ_i, deducem

$$\Omega_1^i \xi_i = \xi_i \frac{D\xi^i}{d\tau} + \xi_i \frac{du^i}{d\tau} - \xi^i \xi_i = r\frac{dr}{d\tau} + r\frac{ds}{d\tau}\cos\alpha - r^2$$

deci

$$\Omega_1^i \frac{\xi_i}{r} = \frac{dr}{d\tau} + \frac{ds}{d\tau}\cos\alpha - r. \tag{III,20}$$

Dacă îl înmulțim pe (III,19) cu

$$g_{ij}\frac{du^j}{ds},$$

avem

$$g_{ij}\Omega_1^i \frac{du^j}{ds} = g_{ij}\frac{D\xi^i}{ds}\cdot\frac{du^j}{ds}\cdot\frac{ds}{d\tau} + \frac{ds}{d\tau} - r\cos\alpha. \tag{III,21}$$

Din

$$g_{ij}\xi^i\frac{du^j}{ds} = r\cos\alpha,$$

derivând în s avem

$$g_{ij}\frac{D\xi^i}{ds}\cdot\frac{du^j}{ds} + \xi_i\frac{D^2u^i}{ds^2} = \frac{dr}{ds}\cos\alpha - r\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds},$$

deci

$$g_{ij}\frac{D\xi^i}{ds}\cdot\frac{du^j}{ds} = \frac{dr}{ds}\cos\alpha - r\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} - \frac{1}{\rho_g}g_{ij}\xi^i\eta_g^j = \tag{III,22}$$

$$= \frac{dr}{ds}\cos\alpha - r\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} - \frac{r}{\rho_g}\cos\varphi.$$

Așa dar, (III,21) devine, ținând seamă de (III,22),

$$g_{ij}\,\Omega_1^i \frac{du^j}{ds} = \frac{ds}{d\tau} + \left(\frac{dr}{d\tau} - r\right)\cos\alpha - r\frac{d\alpha}{d\tau}\sin\alpha - \frac{1}{\rho_g} r\frac{ds}{d\tau}\cos\varphi$$

și ținând seamă de valoarea lui

$$\frac{dr}{d\tau} - r$$

din (III,20), obținem

$$g_{ij}\,\Omega_1^i\left(\frac{du^j}{ds} - \frac{\cos\alpha}{r}\cdot\xi^j\right) = \sin^2\alpha\frac{ds}{d\tau} - r\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\tau} - \frac{1}{\rho_g} r\frac{ds}{d\tau}\cos\varphi. \quad \text{(III,23)}$$

Dacă $\Omega_1^i = 0$, adică dacă seria ξ^i este înfășurătoare, deducem din (III,20) tocmai (III, 16), iar din (III,23) pe (III,17). De asemenea, ținând seamă că

$$\frac{D\xi^i}{d\tau} + \frac{du^i}{d\tau} - \xi^i = 0, \qquad \frac{D\xi^{*i}}{d\tau^*} + \frac{du^i}{d\tau^*} - \xi^{*i} = 0$$

și

$$\frac{dr}{ds} - r\frac{d\tau}{ds} + \cos\alpha = 0, \qquad \frac{dr^*}{ds} - r^*\frac{d\tau^*}{ds} + \cos\alpha^* = 0.$$

Deducem (III,18) din

$$d(\xi_i\,\xi^{*i}) = d(rr^*\cos\theta) = \xi_i D\xi^{*i} + \xi_i^* D\xi^i = \xi_i(\xi^{*i}\,d\tau^* - du^i) +$$

$$+ \xi_i^*(\xi^i\,d\tau - du^i) = \xi_i\xi^{*i}(d\tau + d\tau^*) - du^i(\xi_i + \xi_i^*) =$$

$$= rr^*\cos\theta(d\tau + d\tau^*) - ds(r\cos\alpha + r^*\cos\alpha^*),$$

efectuând diferențierea din primul membru și făcând înlocuirile necesare.

Formulele (III,13), (III,14), (III,15), (III,16), (III,17) și (III,18) permit studiul variației lui α, μ, r, θ de-a-lungul curbei C.

Din (III,13) se observă că, dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, μ este constant și reciproc. In acest caz, din (III, 11) deducem

$$r = c\sigma_0 = ce^{\tau}, \quad \text{(III,24)}$$

unde c este o constantă; invers, din (III,24), cu ajutorul lui (III,16), deducem $\alpha = \frac{\pi}{2}$. De altfel, din (III,16) cu $\alpha = \frac{\pi}{2}$, deducem direct (III,24). Așa dar, *condiția necesară și suficientă pentru ca seria* ξ^i *să fie evolută, este dată de* (III,24) *sau de condiția* $d\mu = 0$.

In acest caz, din (III,17) deducem

$$r\cos\varphi = \rho_g, \quad \text{(III,25)}$$

adică *proiecția vectorului principal pe prima normală principală a curbei* C, *este tocmai raza de curbură geodezică, iar proiecția lui* M_1 *adjunct lui* M *este tocmai centrul de curbură geodezică al curbei* C.

Dacă $\frac{1}{\rho_g} = 0$, adică C *este geodezică*, avem din (III,17)

$$r = \frac{ds}{d\alpha} \sin \alpha$$

care, dus în (III,16), dă

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha'}\right) = \sin \alpha \cdot \frac{\tau'}{\alpha'} - \cos \alpha \qquad \left(\tau' = \frac{d\tau}{ds},\ \alpha' = \frac{d\alpha}{ds}\right),$$

care se scrie

$$\frac{\alpha''}{\alpha'} + \tau' - 2\alpha' \operatorname{cotg} \alpha = 0, \tag{III,26}$$

de unde

$$\alpha' e^{\tau} = c \sin^2 \alpha$$

și

$$-\operatorname{cotg} \alpha + c_1 = c \int e^{-\tau}\, ds, \tag{III,27}$$

cu c, c_1 constante.

In cazul $c = 1$, avem

$$e^{\tau} = \frac{1}{\alpha'} \sin^2 \alpha = \frac{\sin \alpha}{\alpha'} \cdot \sin \alpha = r \sin \alpha, \tag{III,28}$$

ceea ce arată că *proiecția vectorului principal pe acea normală la curba* C, *care se află în planul determinat de* ξ^i *și de tangenta la* C, *este tocmai parametrul normal* σ_0.

Remarcăm că, din (III,20) se vede că (III,16) este verificat nu numai în cazul $\Omega_1^i = 0$ ci și în cazul în care Ω_1^i este ortogonal pe ξ^i — și invers, dacă o serie de vectori ξ^i verifică (III,16), Ω_1^i este ortogonal pe ξ^i sau $\Omega_1^i = 0$.

b. *Cazul* $M_2 - M_2$

In acest caz, ecuațiile transportului sunt:

$$\begin{aligned} D\dot{\bar{u}}^i + \dot{u}^i\, d\sigma_0 &= 0 \qquad & D\bar{v}'^i + v'^i\, d\sigma_0^* &= 0 \\ D\dot{\bar{u}}_i + \dot{u}_i\, d\sigma_0 &= 0 \qquad & D\bar{v}'_i + v'_i\, d\sigma_0^* &= 0 \end{aligned} \tag{III,29}$$

deci

$$d(l\mu \cos \alpha) = D(\dot{\bar{u}}_i \dot{u}^i) = \dot{\bar{u}}_i\, D\dot{u}^i + \dot{u}^i\, D\dot{\bar{u}}_i = -u^i \dot{u}_i\, d\sigma_0 + \dot{\bar{u}}_i\, D\dot{u}^i = \tag{III,30}$$

$$= -l^2\, d\sigma_0 + \dot{\bar{u}}_i\, D\dot{u}^i = -l^2\, d\sigma_0 + \mu \cos \alpha\, dl + \frac{\mu l \cos \varphi}{\rho_g}\, ds,$$

conform calculelor dela punctul a) de mai sus.

Apoi

$$d(\mu\mu^* \cos\theta) = D(\dot{\bar{u}}^i \bar{v}_i') = \dot{\bar{u}}^i D\bar{v}_i' + \bar{v}_i' D\dot{\bar{u}}^i = \\ = -\dot{\bar{u}}^i \bar{v}_i' d\sigma_0^* - \dot{u}^i \bar{v}_i' d\sigma_0 = -(\mu \cos\alpha + \mu^* \cos\alpha^*)\, ds. \tag{III,31}$$

Dacă cele două direcții coincid, deducem

$$\frac{d\mu}{ds} = -\cos\alpha. \tag{III,32}$$

Ținând seama de (III,32) și de valoarea lui l, deducem din (III,30), după ce facem diferențierea din primul membru și toate calculele,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin\alpha}{\mu} - \frac{\cos\varphi}{\rho_g \sin\alpha}. \tag{III,33}$$

Din (III,31), făcând diferențierea din primul membru și ținând seama că $d\mu$ este dat de (III,32) iar

$$\frac{d\mu^*}{ds} = -\cos\alpha^*,$$

deducem

$$\cos\theta\left(\frac{\cos\alpha}{\mu} + \frac{\cos\alpha^*}{\mu^*}\right) + \sin\theta \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\mu\mu^*}(\mu\cos\alpha + \mu^*\cos\alpha^*). \tag{III,34}$$

Se știe însă că, în cazul acesta, putem lua

$$r = \mu,$$

deci (III,33) și (III,34) pot fi scrise sub forma (III,17) și (III,18). Din (III,32) deducem că, dacă α este constant,

$$\mu = -s\cos\alpha + c. \tag{III,35}$$

Și în acest caz ca și în cazul a), se vede din (III,32) că, dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, μ este constant și reciproc.

In cazul în care produsul scalar $\dot{\bar{u}}^i \bar{v}_i'$ este constant, avem și aici (III,12).

Formulele (III, 32), (III,33) și (III,34) le putem deduce și în alt mod, studiind direct vectorii principali. Pentru aceasta să considerăm aceeași serie de vectori ca și la punctul precedent; atașăm acestei serii vectorii

$$\Omega_2^i = \frac{D\xi^i}{ds} + \frac{du^i}{ds}, \tag{III,19'}$$

a căror anulare arată că direcțiile vectorilor ξ_i^i sunt concurente, iar vectorii ξ^i sunt vectorii principali respectivi.

Procedăm ca și în cazul precedent; înmulțim (III, 19') cu ξ_i și deducem

$$\Omega_2^i \xi_i = \xi_i \frac{D\xi^i}{ds} + \xi_i \frac{du^i}{ds} = \xi\left(\frac{dr}{ds} + \cos\alpha\right)$$

deci

$$\Omega_2^i \frac{\xi_i}{\xi} = \frac{dr}{ds} + \cos\alpha. \qquad \text{(III,20')}$$

Dacă îl înmulțim pe (III, 19') cu

$$g_{ij}\frac{du^j}{ds},$$

avem

$$g_{ij}\,\Omega_2^i \frac{du^j}{ds} = g_{ij}\frac{D\xi^i}{ds}\cdot\frac{du^j}{ds} + 1. \qquad \text{(III,21')}$$

Ținând seama de (III, 22) care este valabilă și aici, (III,21') devine

$$g_{ij}\Omega_2^i\frac{du^j}{ds} = 1 + \frac{dr}{ds}\cos\alpha - r\frac{d\alpha}{ds}\sin\alpha - \frac{1}{\rho_g}r\cos\varphi$$

și, ținând seama de valoarea lui $\frac{dr}{ds}$ din (III,20') obținem

$$g_{ij}\Omega_2^i\left(\frac{du^j}{ds} - \frac{\cos\alpha}{r}\cdot\xi^j\right) = \sin^2\alpha - r\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} - \frac{1}{\rho_g}r\cos\varphi. \qquad \text{(III,23')}$$

Dacă $\Omega_2^i = 0$, obținem din (III,20') și (III,23') tocmai (III,32) și (III,33), adică aceeași formulă ca în cazul direcțiilor înfășurătoare.

De asemenea, ținând seamă că

$$D\xi^i + du^i = 0, \qquad D\xi^{*i} + du^i = 0$$

$$\frac{d\mu}{ds} = -\cos\alpha, \qquad \frac{d\mu^*}{ds} = -\cos\alpha^*,$$

deducem (III,34) din

$$d(\xi_i\,\xi^{*i}) = d(\mu\mu^*\cos\theta) = \xi_i\,D\xi^{*i} + \xi^{*i}\,D\xi_i = -\xi_i\,du^i - \xi_i^*\,du^i =$$

$$= -(\mu\cos\alpha + \mu^*\cos\alpha^*)\,ds,$$

efectuând diferențierea din primul membru și făcând înlocuirile necesare. Formulele (III,32) (III,33) și (III,34) permit studiul variației lui α,μ,r,θ de-a-lungul curbei C.

Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, deducem din (III,32) că μ, deci r, este constant și reciproc. Aceasta este deci condiția necesară și suficientă pentru ca seria să fie evolută. Din (III,33) deducem (III,25), adică, și în cazul acesta, *proiecția vectorului principal pe prima normală principală a curbei* C *este tocmai raza de curbură geodezică iar proiecția lui* M_1, *adjunct lui* M, *este tocmai centrul de curbură geodezică al curbei* C.

Dacă $\frac{1}{\rho_g} = 0$ adică C *este geodezică*, avem din (III, 33)

$$\mu = \frac{ds}{d\alpha} \sin \alpha,$$

care, dus în (III, 32), dă

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha'}\right) = -\cos \alpha,$$

care se scrie

$$\frac{\alpha''}{\alpha'} - 2\alpha' \operatorname{cotg} \alpha = 0, \qquad \text{(III,26')}$$

de unde

$$\alpha' = c \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = cs + c_1 \qquad \text{(III,27')}$$

Avem

$$\frac{1}{c} = \frac{\sin \alpha}{\alpha'} \cdot \sin \alpha = \mu \sin \alpha, \qquad \text{(III,28')}$$

ceea ce arată că *proiecția vectorului principal, pe acea normală la curba* C, *care se află în planul determinat de* ξ^i *și de tangenta la* C, *este constantă.*

Trebue remarcat că, din (III,20') se vede că (III,32) este verificat nu numai în cazul $\Omega_2^i = 0$, ci și în cazul în care Ω_2^i este ortogonal pe ξ^i și invers, dacă o serie de vectori verifică (III,20), Ω_2^i este ortogonal pe ξ^i sau $\Omega_2^i = 0$.

Ținând seama că

$$\frac{D\xi^i}{ds} = -\frac{du^i}{ds} = \frac{D\xi^{*i}}{ds} \qquad \text{(III,36)}$$

$$\frac{dr}{ds} = -\cos \alpha, \qquad \frac{dr^*}{ds} = -\cos \alpha^*,$$

deducem

$$\frac{D(\xi^i - \xi^{*i})}{ds} = 0; \qquad \frac{d(r - r^*)}{ds} = \cos \alpha^* - \cos \alpha, \qquad \text{(III,37)}$$

adică, vectorul $\xi^i - \xi^{*i}$ se deplasează paralel.

Dacă $\alpha = \alpha^*$, adică ξ^i, ξ^{*i} sunt pe același con cu axul tangenta în M la curba C, atunci $r - r^*$, diferența lungimilor acestor vectori, este constantă.

c. *Cazul* $M_1 - M_2$

In acest caz, ecuațiile transportului sunt:

$$D\dot{u}^i + \dot{u}^i \, d\log \sigma_0 = 0 \qquad D\bar{v}'^i + v'^i \, d\sigma_0^* = 0$$

$$D\dot{u}_i + \dot{u}_i \, d\log \sigma_0 = 0 \qquad D\bar{v}_i' + v_i' \, d\sigma_0^* = 0; \qquad \text{(III,38)}$$

deci

$$d(\mu\mu^* \cos\theta) = D(\dot{\bar{u}}^i \bar{v}_i') = \dot{\bar{u}}^i D\bar{v}_i' + \bar{v}_i' D\dot{\bar{u}}^i = -\dot{\bar{u}}^i v_i' d\sigma_0^* -$$

$$-\bar{v}_i' \cdot \dot{u}^i \frac{d\sigma_0}{\sigma_0} = -\dot{\bar{u}}^i dv_i - \bar{v}_i' du^i \cdot \frac{1}{\sigma_0} = -\left(\mu \cos\alpha + \mu^* \frac{\cos\alpha^*}{\sigma_0}\right) ds. \quad \text{(III,39)}$$

După ce facem diferențele din primul membru și toate calculele, ținând seama că $d\mu$, $d\mu^*$ sunt dați de (III,13) și (III,32), deducem

$$\cos\theta \left(\frac{\cos\alpha}{\mu\sigma_0} + \frac{\cos\alpha^*}{\mu^*}\right) + \sin\theta \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\mu\sigma_0 \cdot \mu^*} \cdot (\mu\sigma_0 \cos\alpha + \mu^* \cos\alpha^*). \quad \text{(III,40)}$$

Deoarece avem însă

$$r = \mu\sigma_0$$
$$r^* = \mu^*,$$

deducem și în acest caz (III, 18).

Și în acest caz, putem deduce (III,18) direct, considerând

$$rr^* \cos\theta = g_{ij} \xi^i \xi^{*j}$$

care, diferențiat, ținându-se seama că

$$\frac{D\xi^i}{d\tau} + \frac{du^i}{d\tau} - \xi^i = 0, \quad \frac{D\xi^{*i}}{d\tau} + \frac{du^i}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{dr}{d\tau} - r + \cos\alpha \frac{ds}{d\tau} = 0, \quad \frac{dr^*}{ds} = -\cos\alpha^*,$$

unde τ este parametrul principal al seriei înfășurătoare, dă

$$\frac{d}{d\tau}(rr^* \cos\theta) = g_{ij} \xi^i \frac{D\xi^{*j}}{d\tau} + g_{ij} \xi^{*i} \frac{D\xi^j}{d\tau} = g_{ij} \xi^i \left(-\frac{du^j}{d\tau}\right) + g_{ij} \xi^{*i} \left(\xi^j - \frac{du^j}{d\tau}\right)$$

$$\frac{d}{d\tau}(rr^* \cos\theta) = -r \cos\alpha \frac{ds}{d\tau} + rr^* \cos\theta - r^* \frac{ds}{d\tau} \cos\alpha^*.$$

Făcând diferențierea din primul membru și toate calculele, deducem (III,18) In cazul în care $\dot{\bar{u}}^i \bar{v}_i'$ este constant, sau în cazul particular $\theta = \frac{\pi}{2}$, deducem deci, și în acest caz, (III,12).

d. *Cazul* $M_1 - T$

In acest caz, ecuațiile transportului sunt

$$\begin{aligned} D\dot{\bar{u}}^i + \dot{u}^i d\log\sigma_0 = 0 \qquad & D\bar{v}'^i = 0 \\ D\dot{\bar{u}}_i + \dot{u}_i d\log\sigma_0 = 0 \qquad & D\bar{v}_i' = 0, \end{aligned} \quad \text{(III,41)}$$

unde $\bar{\nu}'^i$ este unitar, $\mu^* = 1$. Așa dar,

$$\frac{d}{d\sigma_0}(\mu \cos\theta) = \frac{D}{d\sigma_0}\left(\dot{\bar{u}}^i \bar{\nu}_i\right) = -\dot{u}^i \bar{\nu}'_i \cdot \frac{1}{\sigma_0},$$

deci

$$d(\mu \cos\theta) = -\frac{ds}{d\sigma_0} \cdot \frac{d\sigma_0}{\sigma_0} \cos\alpha^* = -\frac{ds}{\sigma_0} \cos\alpha^*.$$

Diferențiind și primul membru și ținând seama că $d\mu$ este dat de (III,13) deducem:

$$\sin\theta \frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos\alpha \cos\theta - \cos\alpha^*}{\mu\sigma_0} = \frac{\cos\alpha \cos\theta - \cos\alpha^*}{r}. \qquad \text{(III,42)}$$

Se observă că, în cazul în care $\dot{\bar{u}}^i \bar{\nu}'_i$, este constant, sau $\theta = \frac{\pi}{2}$, avem $\alpha^* = \frac{\pi}{2}$.

Așa dar, în cazul $M_1 - T$, dacă θ este constant, deducem

$$\cos\alpha \cos\theta - \cos\alpha^* = 0 \qquad \text{(III,43)}$$

și, reciproc, din (III,43) deducem prin intermediul lui (III,42) că θ este constant.

Dacă de-a-lungul curbei C, considerăm două serii de direcții, dintre care una este înfășurătoare, θ este constant și relația (III,42) este verificată, să cercetăm ce fel de serie de direcții este cealaltă.

Din

$$\mu \cos\theta = g_{ij} \dot{\bar{u}}^i \bar{\nu}'^j \qquad (\mu^* = 1), \qquad \text{(III,44)}$$

deducem

$$\cos\theta d\mu - \mu \sin\theta d\theta = g_{ij} D\dot{\bar{u}}^i \bar{\nu}'^j + g_{ij} \dot{\bar{u}}^i D\bar{\nu}'^j = -g_{ij} \dot{u}^i \bar{\nu}'^j \cdot \frac{d\sigma_0}{\sigma_0} + g_{ij} \dot{\bar{u}}^i D\bar{\nu}'^j,$$

dar θ fiind constant,

$$\cos\theta d\mu = -\cos\alpha^* ds + g_{ij} \dot{\bar{u}}^i D\bar{\nu}'^j$$

și, ținând seama de (III,13),

$$-\frac{ds}{\sigma_0}(\cos\alpha \cos\theta - \cos\alpha^*) = g_{ij} \dot{\bar{u}}^i D\bar{\nu}'^j. \qquad \text{(III,45)}$$

Ținând seama de (III,43), deducem

$$g_{ij} \dot{\bar{u}}^i D\bar{\nu}'^j = 0,$$

adică avem

$$D\bar{\nu}'^i = 0,$$

deci seria $\bar{\nu}'^i$ este paralelă (T), sau $D\bar{\nu}'^i$ este perpendicular pe $\dot{\bar{u}}^i$.

Dacă, de-a-lungul curbei C, considerăm două serii de direcții, dintre care una este paralelă, θ este constant și relația (III,43) este verificată, să cercetăm ce fel de serie de direcții este cealaltă.

Din

$$\mu \cos\theta = g_{ij} \dot{\bar{u}}^i \bar{\nu}'^j \qquad (\mu^* = 1) \qquad \text{(III,46)}$$

deducem, cu $d\theta = 0$

$$\cos\theta \cdot d\mu = g_{ij} D\dot{\bar{u}}^i \bar{\nu}'^j$$

$$\cos\theta \cdot d\mu = g_{ij}(D\dot{\bar{u}}^i + \dot{u}^i d\log\sigma_0)\bar{\nu}'^j - g_{ij}\dot{u}^i \bar{\nu}'^j d\log\sigma_0,$$

sau

$$\cos\theta\left(d\mu + \frac{\cos\alpha}{\sigma_0} ds\right) = g_{ij}(D\dot{\bar{u}}^i + \dot{u}\, d\log\sigma_0)\bar{\nu}'^j. \qquad \text{(III,47)}$$

Dacă îl alegem pe μ în așa mod încât (III,13) să fie verificat, deducem că sau direcțiile $\dot{\bar{u}}^i$ sunt înfășurătoare, sau vectorii $D\dot{\bar{u}}^i + \dot{u}^i d\log\sigma_0$ sunt perpendiculari pe $\bar{\nu}'^i$.

Dacă notăm cu ω, ω^* unghiurile făcute de cele două direcții $\dot{\bar{u}}^i$, $\bar{\nu}'^i$ cu normalele la curba C, situate în planele definite de tangenta la C în punctul M și de direcțiile $\dot{\bar{u}}^i$, $\bar{\nu}'^i$ respectiv, relația (III,43) devine

$$\sin\omega^* = \cos\theta \cdot \sin\omega. \qquad \text{(III,43')}$$

Așa dar, avem o formulă asemănătoare cu cea a lui Descartes din teoria refracției.

Dacă A este unghiul planelor determinate de tangenta în M la curba C și de cele două direcții considerate, avem, întrebuințând o formulă de trigonometrie sferică

$$\cos\theta = \sin\omega \sin\omega^* + \cos\omega \cos\omega^* \cos A, \qquad \text{(III,48)}$$

din care, ținând seama de (III,43), deducem

$$\cos A = \frac{\cos\omega}{\cos\omega^*} \cdot \cos\theta, \qquad \text{(III,49)}$$

Se observă că, în general, dacă θ este constant, A nu este constant; dacă $\theta = \frac{\pi}{2}$ și $A = \frac{\pi}{2}$.

e. *Cazul* $M_2 - T$

In acest caz, transportul este dat de

$$\begin{aligned} D\dot{\bar{u}}^i + \dot{u}^i d\sigma_0 &= 0 \qquad & D\bar{\nu}'^i &= 0 \\ D\dot{\bar{u}}_i + \dot{u}_i d\sigma_0 &= 0 \qquad & D\bar{\nu}'_i &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(III,50)}$$

cu $\mu^* = 1$, deci

$$d(\mu\cos\theta) = D(\dot{\bar{u}}^i \bar{\nu}'_i) = -\dot{u}^i \bar{\nu}'_i d\sigma_0 = -\cos\alpha^* ds.$$

Ținând seama că $d\mu$ este dat de (III,32), deducem:

$$\sin\theta \frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos\alpha^* - \cos\alpha\cos\theta}{\mu} \cdot ds = \frac{(\cos\alpha^* - \cos\alpha\cos\theta)\, ds}{r} \qquad \text{(III,42')}$$

Observăm că, dacă $\dot{\bar{u}}^i \bar{v}'_i$ este constant sau $\theta = \frac{\pi}{2}$, avem $\alpha^* = \frac{\pi}{2}$.

Așa dar, în cazul $M_2 - T$, dacă θ este constant, deducem (III,43) și, reciproc, din (III, 43) deducem prin intermediul lui (III,42′) că θ este constant.

Dacă, de-a-lungul curbei C, considerăm două serii de direcții dintre care una este concurentă, θ este constant iar relația (III,43) este verificată, să cercetăm ce fel de serie de direcție este cealaltă.

Din (III,44) deducem:

$$\cos\theta\, d\mu - \mu \sin\theta\, d\theta = g_{ij} D\dot{\bar{u}}^i \bar{v}'^j + g_{ij} \dot{\bar{u}}^\ell D\bar{v}'^j.$$

Deoarece θ este constant, iar $\dot{\bar{u}}^i$ concurente, deducem

$$-\cos\theta\cos\alpha\, ds = -g_{ij} du^i \bar{v}'^j + g_{ij} \dot{\bar{u}}^i D\bar{v}'^j = -\cos\alpha^*\, ds + g_{ij} \dot{\bar{u}}^i D\bar{v}'^j,$$

deci

$$(\cos\alpha^* - \cos\alpha\cos\theta)\, ds = g_{ij} \dot{\bar{u}}^i D\bar{v}'^j \qquad \text{(III,51)}$$

și din cauza lui (III, 43), deducem că

$$g_{ij} \dot{\bar{u}}^i D\bar{v}'^j = 0$$

deci, fie că direcțiile $\bar{v}'^i$ sunt paralele, fie că vectorii $D\bar{v}'^i$ sunt perpendiculari pe vectorii $\dot{\bar{u}}^i$.

Dacă de-a-lungul curbei C, considerăm două serii de direcții dintre care una este paralelă, θ este constant și relația (III,43), este verificată să cercetăm ce fel de serie de direcții este cealaltă.

Din (III,46), deducem

$$\cos\theta\, d\mu - \mu \sin\theta\, d\theta = g_{ij} D\dot{\bar{u}}^i \bar{v}'^j + g_{ij} \bar{u}^i D\bar{v}'^j,$$

dar $d\theta = 0$, deci

$$\cos\theta\, d\mu = g_{ij} (D\dot{\bar{u}}^i + du^i) \bar{v}'^j - g_{ij} du^i \bar{v}'^j$$

$$\cos\theta\, d\mu + \cos\alpha^*\, ds = g_{ij} (D\dot{\bar{u}}^i + du^i) \bar{v}'^j.$$

Prin intermediul lui (III,43) avem

$$\cos\theta\, (d\mu + \cos\alpha)\, ds = g_{ij} (D\dot{\bar{u}}^i + du^i) \bar{v}'^j \qquad \text{(III,51′)}$$

deci, dacă μ verifică (III,32), avem

$$g_{ij} (D\dot{\bar{u}}^i + du^i) \bar{v}'^j = 0;$$

deci, fie că direcțiile $\dot{\bar{u}}^i$ sunt concurente, fie că vectorii $D\dot{\bar{u}}^i + du^i$ sunt perpendiculari pe $\bar{v}'^i$.

Și în aceste cazuri, avem (III,43′) și (III,49).

§ 27. Cazul unui V_n scufundat într'un E_m. Dacă V_n este scufundat într'un spațiu euclidian $E_m (m > n)$, ceea ce este totdeauna posibil, putem considera și unghiurile ϖ și α, pe care o serie oarecare de vectori ξ^i, care trec

prin punctele unei curbe C și se află în V_n, le fac cu direcțiile asociate lor de înfășurare, respectiv cu curba Γ, loc al extremităților acestor vectori.

In aceste condiții, avem din (I,44)

$$\frac{d\bar{x}^i}{d\tau} = \Omega_1^i + \xi^i \tag{III,52}$$

și, notând cu $\bar{s}$ arcul curbei Γ

$$\left(\frac{d\bar{s}}{d\tau}\right)^2 = g_{ij}(\Omega_1^i + \xi^i)(\Omega_1^j + \xi^j) = r_1^2 + 2rr_1 \cos \bar{\omega} + r^2, \tag{III,53}$$

unde r_1 este lungimea lui Ω_1^i.

Dacă $\bar{\omega} = \frac{\pi}{2}$, avem

$$\frac{d\bar{s}}{d\tau} = \sqrt{r_1^2 + r^2}. \tag{III,54}$$

Din (III,52), prin înmulțire cu $g_{ij}\xi^j$, avem

$$g_{ij}\xi^j \frac{d\bar{x}^j}{d\tau} = g_{ij}\xi^j(\Omega_1^i + \xi^i) \tag{III,55}$$

deci

$$r_1 \cos \bar{\omega} = \frac{d\bar{s}}{d\tau} \cos \bar{\alpha} - r. \tag{III,56}$$

Dacă $\bar{\alpha} = 0$, $r_1 = 0$, adică direcțiile sunt înfășurătoare chiar înainte de desfășurare,

$$d\tau = \frac{d\bar{s}}{r}. \tag{III,57}$$

Dacă $\bar{\omega} = \frac{\pi}{2}$, din (III,56), deducem

$$\frac{d\bar{s}}{d\tau} \cos \bar{\alpha} = r,$$

care, cu ajutorul lui (III,54), dă

$$\cos \bar{\alpha} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r_1^2}},$$

deci,

$$\operatorname{tg} \bar{\alpha} = \pm \frac{r_1}{r}. \tag{III,58}$$

In general, eliminând pe $\frac{d\bar{s}}{d\tau}$ între (III,53) și (III,56) deducem, după efectuarea tuturor calculelor

$$r_1^2(\cos^2\bar{\omega} - \cos^2\bar{\alpha}) + 2r_1 r\cos\bar{\omega}\sin^2\bar{\alpha} + r^2\sin^2\bar{\alpha} = 0,$$

deci, rezolvând ecuația de gradul doi,

$$r_1\sin(\bar{\alpha} \mp \bar{\omega}) = -r. \tag{III,59}$$

Așa dar, avem

$$r_1 = r, \tag{III,60}$$

numai dacă

$$\bar{\alpha} \mp \bar{\omega} = (4k+3)\frac{\pi}{2}, \tag{III,61}$$

cu k întreg, pozitiv, negativ, sau nul.

Dacă, în loc să considerăm direcțiile Ω_1^i asociate de înfășurare, considerăm direcțiile Ω_2^i, asociate de concurență, avem din (II,60)

$$\left(\frac{d\bar{s}}{d\tau}\right)^2 = g_{ij}\frac{d\bar{u}^i}{d\tau}\cdot\frac{d\bar{u}^j}{d\tau} = g_{ij}\Omega_2^i\Omega_2^j = r_2^2, \tag{III,53'}$$

deci

$$\frac{d\bar{s}}{d\tau} = r_2. \tag{III,54'}$$

Din (II,60), prin înmulțire cu $g_{ij}\xi^j$, deducem

$$g_{ij}\xi^j\frac{d\bar{u}^i}{d\tau} = g_{ij}\xi^j\Omega_2^i, \tag{III,55'}$$

sau

$$\frac{d\bar{s}}{d\tau}\cos\alpha = r_2\cos\bar{\omega}. \tag{III,56'}$$

Din (III,54'), (III,56') deducem

$$\cos\bar{\alpha} = \cos\bar{\omega},$$

deci

$$\bar{\omega} \pm \bar{\alpha} = 2k\pi. \tag{III,61'}$$

B. STUDIUL RELAȚIILOR DINTRE DIVERSELE CURBURI

§ 28. Diverse expresii ale curburilor

a. *Curbura de înfășurare*

Considerând o serie g de vectori ξ^i, de-a-lungul unei curbe C din S_n, deducem din

$$g_{ij}\xi^i\xi^j = r^2,$$

prin diferențiere

$$g_{ij}\xi^i D_3\xi^j = r\,dr. \tag{III,62}$$

Ținând seama că

$$D_3\xi^i = D_1\xi^i - du^i + \xi^i d\tau$$

$$D_1\xi^i = \frac{d\tau}{R_1}\eta_1^i,$$

deducem din (III,62)

$$\frac{\cos\theta_1}{R_1}\cdot\frac{d\tau}{ds} = \frac{dr}{ds} - r\frac{d\tau}{ds} + \cos\alpha, \tag{III,63}$$

unde θ_1 este unghiul lui ξ^i cu η_1^i, iar α unghiul lui ξ^i cu curba C. Considerând problema și în raport cu o varietate V_m subordonată lui S_n, deoarece r,α,τ,s sunt aceiași, deducem

$$\frac{\cos\theta_1}{R_1} = \frac{\cos\theta_1^*}{R_1^*}, \tag{III,64}$$

unde θ_1^*, R_1^* sunt analogul lui θ_1, R_1, pentru V_m.

Din (III, 64) citim: dacă direcțiile vectorilor ξ^i sunt înfășurătoare în V_m $\left(\frac{1}{R_1^*}=0\right)$ atunci, ele sau sunt înfășurătoare și în $S_n\left(\frac{1}{R_1}=0\right)$, sau direcțiile asociate lor de înfășurare în raport cu S_n sunt ortogonale direcțiilor ξ^i însăși $\left(\theta_1=\frac{\pi}{2}\right)$, fapte cunoscute din teorema VI.

Invers, dacă seria este înfășurătoare în S_n, $\left(\frac{1}{R_1}=0\right)$, atunci se știe din teorema IV că seria este înfășurătoare și în $V_m\left(\frac{1}{R_1^*}=0\right)$; dacă direcțiile asociate de înfășurare ale seriei ξ^i în raport cu S_n sunt ortogonale direcțiilor $\xi^i\left(\theta_1=\frac{\pi}{2}\right)$, deducem că același lucru se întâmplă și în raport cu V_m $\left(\theta_1^*=\frac{\pi}{2}\right)$.

Așa dar, avem

Teorema XIX. *Considerând de-a-lungul unei curbe* C *din varietatea* V_m *subordonată spațiului riemannian* S_n, *o serie de vectori* ξ^i, *dacă direcțiile asociate de înfășurare ale acestora în raport cu* V_m *sunt ortogonale vectorilor* ξ^i *înșiși, același lucru se întâmplă și cu direcțiile asociate de înfășurare ale vectorilor* ξ^i, *în raport cu* S_n *și reciproc.*

Așa dar, diversele direcții asociate de înfășurare ale seriei ξ^i în raport cu diversele varietăți în care se află curba C și dreptele g și care sunt subordonate sau supraordonate spațiului considerat inițial, se află în plane normale direcțiilor vectorilor ξ^i. Se observă că, din (III,63) se poate deduce (III,16).

b. *Curbura de concurență*

In același chip ca în punctul *a.*, deducem din (III,62) și din

$$D_3\xi^i = D_2\xi^i - du^i$$

$$D_2\xi^i = \frac{d\tau}{R_2} \cdot \eta_2^i$$

$$\frac{\cos\theta_2}{R_2} \cdot \frac{d\tau}{ds} = \frac{dr}{ds} + \cos\alpha, \qquad \text{(III,63')}$$

unde θ_2 este unghiul lui ξ^i cu η_2^i. Ca și în cazul din punctul *a*, deducem, considerând problema și pentru o varietate V_m, subordonată lui S_n,

$$\frac{\cos\theta_2}{R_2} = \frac{\cos\theta_2^*}{R_2^*}, \qquad \text{(III,64')}$$

din care deducem aceleași concluzii ca și în cazul înfășurării.

Așa dar, avem

Teorema XX: *Considerând de-a-lungul unei curbe* C *din varietatea* V_m, *subordonată spațiului riemannian* S_n, *o serie de vectori* ξ^i, *dacă direcțiile asociate de concurență ale acestora în raport cu* V_m *sunt ortogonale vectorilor* ξ^i *înșiși, același lucru se va întâmpla și cu direcțiile asociate de concurență ale vectorilor* ξ^i *în raport cu* S_n *și reciproc.*

Din această teoremă tragem aceleași concluzii ca și în cazul precedent. Se observă că, din (III, 63') se poate deduce (III,32).

c. *Curbura de paralelism*

In același mod ca la înfășurare și concurență, avem din (III,62)

$$\frac{\cos\theta_3}{R_3} = \frac{dr}{ds}, \qquad \text{(III,63'')}$$

unde θ_3 este unghiul lui ξ^i cu η_3^i. Deducem și în acest caz

$$\frac{\cos\theta_3}{R_3} = \frac{\cos\theta_3^*}{R_3^*}, \qquad \text{(III,64'')}$$

din care deducem aceleași concluzii ca în cazul înfășurării sau al concurenței.

Așa dar, avem

Teorema XXI: *Considerând de-a-lungul unei curbe* C *din varietatea* V_m *subordonată spațiului riemannian* S_n, *o serie de vectori* ξ^i, *dacă direcțiile asociate de paralelism ale acestora, în raport cu* V_m, *sunt ortogonale vectorilor* ξ^i *însiși, același lucru se întâmplă și cu direcțiile asociate de paralelism ale vectorilor* ξ^i *în raport cu* S_n *și reciproc.*

Din această teoremă, tragem aceleași concluzii ca și din teoremele analoage dela punctele a. și b.

Se observă că, din (III,63″) se poate deduce că dacă r este constant

$$\theta_3 = \frac{\pi}{2}.$$

d. *Relațiile dintre diversele curburi ale unei serii arbitrare de vectori*

In această cercetare, considerăm că direcțiile seriei date de vectorul ξ^i de lungime r, se exprimă sub forma

$$\xi^i = \frac{d\bar{u}^i}{d\tau}, \tag{III,65}$$

cu ajutorul unor funcții $\bar{u}^i(\tau)$ și a unui parametru τ, fixat geometric.

Avem

$$\begin{aligned} \Omega_1^i &= \Omega_2^i - \xi^i \\ \Omega_2^i &= \Omega_3^i + \dot{u}^i \\ \Omega_1^i &= \Omega_3^i + \dot{u}^i - \xi^i. \end{aligned} \tag{III,66}$$

Așa dar

$$r_1^2 = g_{ij}\,\Omega_1^i\,\Omega_1^j = g_{ij}\,(\Omega_2^i - \xi^i)\,(\Omega_2^j - \xi^j) \tag{III,67}$$

și, efectuând calculele

$$r_1^2 = r_2^2 - 2r_2 r\cos\theta_2 + r^2. \tag{III,67′}$$

Deci, *considerând o serie arbitrară de vectori* ξ^i *de-a-lungul unei curbe* C *din varietatea* V_m, *dacă luăm din punctul* M *al curbei* C, *pe direcția lui* η_2^i *distanța* r_2 *până în punctul* P *și pe direcția lui* ξ^i *distanța* r *până în punctul* Q, *latura* PQ *a triunghiului* MPQ *are tocmai lungimea* r_1.

Dacă notăm

$$d\bar{s}^2 = g_{ij}\,d\bar{u}^i\,d\bar{u}^j, \tag{III,68}$$

avem

$$r = \frac{d\bar{s}}{d\tau} \tag{III,69}$$

deci, notând

$$ds^{*2} = r_2^2 d\tau^2 - 2r_2\,d\tau\,d\bar{s}\cos\theta_2 + d\bar{s}^2, \tag{III,70}$$

avem

$$r_1 = \frac{ds^*}{d\tau}. \tag{III,71}$$

Apoi

$$r_2^2 = g_{ij}\,\Omega_2^i\,\Omega_2^j = g_{ij}\,(\Omega_3^i + \dot{u}^i)\,(\Omega_3^j + \dot{u}^j), \tag{III,72}$$

de unde, efectuând toate calculele și notând cu ψ unghiul lui η_3^i, direcția asociată de paralelism a vectorului ξ^i cu curba C, avem

$$r_2^2 = r_3^2 + 2r_2\frac{ds}{d\tau}\cos\psi + \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2, \tag{III,73}$$

Deci, *considerând o serie arbitrară de vectori* ξ^i *de-a-lungul unei curbe* C *din varietatea* V_m, *dacă luăm din punctul* M *al curbei* C, *pe direcția lui* η_3^i *în sens negativ distanța* r_3 *până în punctul* Q *și pe direcția tangentei la curba* C *în* M, *distanța* $\frac{ds}{d\tau}$ *până în punctul* P, *latura* PQ *a triunghiului* MPQ *are tocmai lungimea* r_2.

Dacă notăm:

$$ds^{**2} = r_3^2\, d\tau^2 + 2r_2\, ds\, d\tau \cos\psi + ds^2, \tag{III,74}$$

avem

$$r_2 = \frac{ds^{**}}{d\tau}. \tag{III,75}$$

Eliminând pe r_2^2 între (III,67') și (III,73), deducem

$$r_1^2 = r_3^2 + 2r_2 \frac{ds}{d\tau}\cos\psi + \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 - 2r_2\, r\cos\theta_2 + r^2, \tag{III,76}$$

Calculând direct pe r_1^2, avem

$$r_1^2 = g_{ij}\,\Omega_1^i\,\Omega_1^j = g_{ij}\,(\Omega_3^i + \dot{u}^i - \xi^i)\,(\Omega_3^j + \dot{u}^j - \xi^j) \tag{III,77}$$

și făcând toate calculele avem

$$r_1^2 = r_3^2 + 2r_3 \frac{ds}{d\tau}\cos\psi - 2\frac{ds}{d\tau} r\cos\alpha + r^2 + \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2, \tag{III,78}$$

care, comparat cu (III,77), dă

$$r_2 = \frac{\cos\alpha}{\cos\theta_2}\cdot\frac{d\tau}{ds}. \tag{III,79}$$

e. *Cazul direcțiilor înfășurătoare*

Fie τ parametrul principal al seriei înfășurătoare.

In acest caz

$$\begin{aligned} &\Omega_1^i = 0, \qquad r_1 = 0 \\ &\Omega_2^i = \xi^i \\ &\Omega_3^i = \xi^i - \dot{u}^i. \end{aligned} \tag{III,80}$$

Așa dar

$$r_2 = r = \frac{d\bar{s}}{d\tau}, \tag{III,81}$$

unde $\bar{s}$ este arcul curbei asociate Γ.

De asemenea

$$r_3^2 = g_{ij}\,\Omega_3^i\,\Omega_3^j = g_{ij}\,(\xi^i - \dot{u}^i)\,(\xi^j - \dot{u}^j). \tag{III,82}$$

Făcând toate calculele, avem

$$r_3^2 = r^2 - 2r\frac{ds}{d\tau}\cos\alpha + \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2. \qquad \text{(III,83)}$$

Deci, *considerând o serie înfășurătoare de vectori* ξ^i *de-a lungul unei curbe* C *din varietatea* V_m, *dacă luăm din punctul* M *al curbei* C, *pe direcția lui* $\dot{u}^i$ *distanța* $\frac{ds}{d\tau}$ *până în punctul* P *și pe direcția lui* ξ^i *distanța* r *până în punctul* M', *latura* PM' *a triunghiului* MPM' *are tocmai lungimea* r_3.

Dacă notăm

$$d\bar{s}^2 = r^2\,d\tau^2 - 2r\,ds\,d\tau\cos\alpha + ds^2, \qquad \text{(III,84)}$$

avem

$$r_3 = \frac{d\bar{s}}{d\tau}. \qquad \text{(III,85)}$$

f. Cazul direcțiilor concurente

In acest caz,

$$\Omega_2^i = 0, \qquad r_2 = 0$$
$$\Omega_1^i = -\xi^i \qquad \text{(III,80')}$$
$$\Omega_3^i = -\dot{u}^i$$

$$r_1 = r = \frac{d\bar{s}}{d\tau}, \qquad \text{(III,81')}$$

unde $\bar{s}$ este arcul curbei asociate virtuale Δ.

De asemenea

$$r_3 = \frac{ds}{d\tau}. \qquad \text{(III,86)}$$

g. *Cazul direcțiilor paralele*

In acest caz, avem

$$\Omega_3^i = 0, \qquad r_3 = 0$$
$$\Omega_1^i = \dot{u}^i - \xi^i \qquad \text{(III,80'')}$$
$$\Omega_2^i = \dot{u}^i$$

și

$$r_1^2 = g_{ij}(\dot{u}^i - \xi^i)(\dot{u}^j - \xi^j), \qquad \text{(III,81'')}$$

de unde deducem

$$r_1^2 = r^2 - 2r\frac{ds}{d\tau}\cos\alpha + \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2. \qquad \text{(III,82')}$$

Deci, *considerând o serie paralelă de vectori* ξ^i *de-a-lungul unei curbe* C *din varietatea* V_m, *dacă luăm din punctul* M *al curbei* C, *pe direcţia lui* ξ^i *distanţa* r *până în punctul* P *şi pe direcţia tangentei la* C, *distanţa* $\frac{ds}{d\tau}$ *până în punctul* Q, *latura* PQ *a triunghiului* MPQ *are tocmai lungimea* r_1.

Dacă introducem notaţia (III, 84), avem

$$r_1 = \frac{d\bar{s}}{d\tau} \tag{III,82''}$$

$$r_2 = \frac{ds}{d\tau}. \tag{III,87}$$

Se observă că:

Curbura de înfăşurare a unei serii de direcţii concurente are aceeaşi expresie ca şi curbura de concurenţă a unei serii înfăşurătoare.

Curbura de concurenţă a unei serii de direcţii paralele are aceeaşi expresie ca şi curbura de paralelism a unei serii de direcţii concurente.

Curbura de paralelism a unei serii de direcţii înfăşurătoare are aceeaşi expresie ca şi curbura de înfăşurare a unei serii de direcţii paralele.

Se observă că, toate curburile au putut fi date ca raportul a două diferenţiale, asemănător curburii ordinare a unei curbe, într'un spaţiu euclidian.

h. *Curbura trivectorială* a unei serii arbitrare de vectori este dată de

$$t_1^2 = \begin{vmatrix} \Omega_1^i & \Omega_2^i & \Omega_3^i \\ \Omega_1^j & \Omega_2^j & \Omega_3^j \\ \Omega_1^k & \Omega_2^k & \Omega_3^k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Omega_{1,i} & \Omega_{2,i} & \Omega_{3,i} \\ \Omega_{1,j} & \Omega_{2,j} & \Omega_{3,j} \\ \Omega_{1,k} & \Omega_{2,k} & \Omega_{3,k} \end{vmatrix}, \tag{III,88}$$

ceea ce dă, făcând toate calculele

$$t_1 = 3\sqrt{3}\, r_1 r_2 r_3 \sqrt{P}. \tag{III,89}$$

cu

$$P = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_{12} & \cos\omega_{13} \\ \cos\omega_{12} & 1 & \cos\omega_{23} \\ \cos\omega_{13} & \cos\omega_{13} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2\omega_{12} - \cos^2\omega_{23} - \tag{III,90}$$

$$- \cos^2\omega_{31} - 2\cos\omega_{12}\cos\omega_{23}\cos\omega_{31},$$

unde ω_{12}, ω_{23}, ω_{31} sunt respectiv unghiurile direcţiilor η_1^i, η_2^i, η_3^i, luate două câte două.

Dacă seria de direcţii este înfăşurătoare, concurentă sau paralelă,

$$t_1 = 0$$

Luând în considerație că putem scrie și

$$t_1^2 = \begin{vmatrix} \xi^i & \dot{u}^i & \Omega_3^i \\ \xi^j & \dot{u}^j & \Omega_3^j \\ \xi^k & \dot{u}^k & \Omega_3^k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_i & \dot{u}_i & \Omega_{3,i} \\ \xi_j & \dot{u}_j & \Omega_{3,j} \\ \xi_k & \dot{u}_k & \Omega_{3,k} \end{vmatrix}, \qquad \text{(III,91)}$$

avem, după efectuarea calculelor:

$$t_1 = 3\sqrt{3}\, r\, r_3 \frac{ds}{d\tau}\sqrt{Q}, \qquad \text{(III,89')}$$

cu

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\theta_3 \\ \cos\alpha & 1 & \cos\psi \\ \cos\theta_3 & \cos\psi & 1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(III,90')}$$

i. *Curbura bivectorială normalizată de înfășurare* a unei serii arbitrare de vectori este dată de

$$\bar{t}_2^2 = \begin{vmatrix} \overline{\Omega}_2^i & \Omega_3^i \\ \overline{\Omega}_2^j & \Omega_3^j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \overline{\Omega}_{2,i} & \Omega_{3,i} \\ \overline{\Omega}_{2,j} & \Omega_{3,j} \end{vmatrix}, \qquad \text{(III,88')}$$

ceea ce dă, făcând toate calculele

$$\bar{t}_2 = 2\bar{r}_2\, r_3 \sin\bar{\omega}_{23}; \qquad \text{(III,89'')}$$

iar $\bar{\omega}_{23}$ este unghiul lui η_3^i cu $\bar{\eta}_2^i$. Se observă că $\bar{t}_2 = 0$ dacă

$$r_3 = 0 \quad \text{sau} \quad \bar{r}_2 = 0 \quad \text{sau} \quad \bar{\omega}_{23} = 0.$$

Luând în considerație că putem scrie și

$$\bar{t}_2^2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\tau}\dot{u}^i & \Omega_3^i \\ \frac{1}{\tau}\dot{u}^j & \Omega_3^j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{\tau}\dot{u}_i & \Omega_{3,i} \\ \frac{1}{\tau}\dot{u}_j & \Omega_{3,j} \end{vmatrix} = \frac{1}{\tau^2} \cdot t_2^2, \qquad \text{(III,92)}$$

avem

$$\bar{t}_2 = \frac{1}{\tau} t_2. \qquad \text{(III,92')}$$

j. *Curbura bivectorială de concurență* a unei serii arbitrare de vectori este dată de

$$t_2^2 = \begin{vmatrix} \Omega_2^i & \Omega_3^i \\ \Omega_2^j & \Omega_3^j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Omega_{2,i} & \Omega_{3,i} \\ \Omega_{2,j} & \Omega_{3,j} \end{vmatrix}, \qquad \text{(III,88'')}$$

ceea ce dă

$$t_2 = 2r_2 r_3 \sin \omega_{23} \tag{III,89'''}$$

așa dar: dacă $r_2 = 0$ sau $r_3 = 0$, sau $\omega_{23} = 0$, atunci și $t_2 = 0$.

Luând în considerație că putem scrie și

$$t_2^2 = \begin{vmatrix} \dot{u}^i & \Omega_3^i \\ \dot{u}^j & \Omega_3^j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{u}_i & \Omega_{3,i} \\ \dot{u}_j & \Omega_{3,j} \end{vmatrix}, \tag{III,93}$$

avem

$$t_2 = 2r_3 \frac{ds}{d\tau} \sin \theta_3 . \tag{III,93'}$$

Dacă seria considerată este înfășurătoare, avem, ținând seama de (III, 89'''), (III,81) și (III,85)

$$t_2 = 2r \frac{ds}{d\tau} \sin \omega_{23} . \tag{III,93''}$$

Deoarece în acest caz avem (III,80), deducem direct

$$p^{ij} = \begin{vmatrix} \dot{u}^i & \xi^i \\ \dot{u}^j & \xi^j \end{vmatrix} \tag{III,94}$$

așa dar

$$t_2^2 = \begin{vmatrix} \dot{u}^i & \xi^i \\ \dot{u}^j & \xi^j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{u}_i & \xi_i \\ \dot{u}_j & \xi \end{vmatrix}, \tag{III,95}$$

deci

$$t_2 = 2 \frac{ds}{d\tau} r \sin \alpha . \tag{III, 95'}$$

Comparând (III,93'') cu (III,95') deducem, ținând seamă de (III,81)

$$\frac{d\bar{s}}{\sin \omega_{23}} = \frac{d\bar{\bar{s}}}{\sin \alpha} . \tag{III,96}$$

§ 29. Expresia parametrului principal de înfășurare în funcție de arcul curbei C, în S_2. In paragraful 2 s'a arătat că în A_2, oricărei serii de direcții de-a-lungul unei curbe C i se poate ataşa, în mod invariant, un parametru principal τ, deci şi unul normal, σ_0; expresia lui τ este dată de (I,43). In cele ce urmează, considerăm că avem un S_2 riemannian. Fie θ^i vectorii unitari ai seriei date şi

$$\xi^i = r\theta^i,$$

vectorii principali de înfăşurare.

Fie

$$\theta_1^i = \frac{du^i}{ds} \tag{III,97}$$

și θ_2^i un vector pe S_2, perpendicular în M pe curba C; fie α unghiul lui 0 cu θ_1^i.

Avem

$$\theta^i = \theta_1^i \cos\alpha + \theta_2^i \sin\alpha \tag{III,98}$$

$$D\theta^i = \cos\alpha \cdot D\theta_1^i + \sin\alpha \cdot D\theta_2^i - \theta_1^i \sin\alpha\, d\alpha + \theta_2^i \cos\alpha\, d\alpha. \tag{III,99}$$

Dar

$$D\theta_1^i = k\theta_2^i\, ds, \qquad D\theta_2^i = -k\theta_1^i\, ds; \tag{III,100}$$

așa dar

$$D\theta^i = k(\theta_2^i \cos\alpha - \theta_1^i \sin\alpha)\, ds + (-\theta_1^i \sin\alpha + \theta_2^i \cos\alpha)\, d\alpha. \tag{III,101}$$

Ținând seamă de (III,97), și (III,98)

$$\theta^1\, du^2 - \theta^2\, du^1 = -(\theta_1^1\theta_2^2 - \theta_2^1\theta_1^2) \sin\alpha\, ds \tag{III,102}$$

și notând

$$\begin{vmatrix} \theta_1^1 & \theta_2^1 \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}, \tag{III,103}$$

γ fiind discriminantul tensorului metric al lui S, avem

$$\theta^1\, du^2 - \theta^2\, du^1 = -\frac{\sin\alpha\, ds}{\sqrt{\gamma}}. \tag{III,104}$$

Apoi, ținând seamă de (III,97) și (III,101)

$$D\theta^1 \cdot du^2 - D\theta^2 \cdot du^1 = -(\theta_1^1\theta_2^2 - \theta_2^1\theta_1^2) \cos\alpha\, ds\, (k\, ds + d\alpha)$$

și ținând seamă de (III,103)

$$D\theta^1 \cdot du^2 - D\theta^2 \cdot du^1 = -\frac{\cos\alpha\, ds}{\sqrt{\gamma}} \cdot (k\, ds + d\alpha). \tag{III,105}$$

Apoi, ținând seamă de aceleași formule ca mai sus

$$\theta^2 D\theta^1 - \theta^1 D\theta^2 = -(\theta_1^1\theta_2^2 - \theta_2^1\theta_1^2)(k\, ds + d\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(k\, ds + d\alpha). \tag{III,106}$$

Aşa dar, din (I, 30) deducem, ţinând seamă de formulele deduse mai sus

$$\mu d\sigma = (k\,ds + d\alpha)\operatorname{cotg}\alpha, \quad \nu = -\left(k + \frac{d\alpha}{ds}\right)\cdot\frac{1}{\sin\alpha}; \qquad \text{(III,107)}$$

deci

$$d\log\nu = d\log\left(k + \frac{d\alpha}{ds}\right) - \operatorname{cotg}\alpha\, d\alpha \qquad \text{(III,108)}$$

şi deci, după (I, 43)

$$d\tau = \mu\, d\sigma - d\log\nu = (k\,ds + 2\,d\alpha)\operatorname{cotg}\alpha - d\log\left(k + \frac{d\alpha}{ds}\right) \qquad \text{(III,109)}$$

$$r = -\frac{1}{\nu} = \frac{\sin\alpha}{k + \frac{d\alpha}{ds}}, \qquad \xi^i = \frac{\sin\alpha}{k + \frac{d\alpha}{ds}}\cdot\theta^i \qquad \text{(III,110)}$$

Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, avem

$$\xi^i = \frac{1}{k}\theta^i, \ \mu = 0, \qquad \nu = -\frac{1}{k}, \frac{1}{k} = c\,e^{\tau}, \qquad \text{(III,111)}$$

ceea ce s'a mai dedus în paragraful 26.

Dacă $d\alpha = 0$, avem din (III, 109)

$$d\tau = k\operatorname{cotg}\alpha\, ds - d\log k, \qquad \text{(III,112)}$$

adică

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\cdot\frac{d\tau}{ds} = \operatorname{cotg}\alpha, \qquad \text{(III,113)}$$

care dă

$$\frac{1}{k} = e^{\tau}\left(c - \operatorname{cotg}\alpha\int e^{-\tau}\,ds\right). \qquad \text{(III,114)}$$

Dacă $k = 1, \alpha = s$, avem

$$d\tau = 3\operatorname{cotg} s\, ds, \qquad \text{(III,115)}$$

care dă, dacă determinăm constanta de integrare aşa că, dacă $s = \frac{\pi}{2}$, $\tau = 0$:

$$\sin s = e^{\frac{\tau}{3}} \qquad \text{(III,116)}$$

CAPITOLUL IV

REȚELE INFĂȘURĂTOARE

A. REȚELE ÎNFĂȘURĂTOARE ÎNTR'UN A_2 CU CONEXIUNE AFINĂ

§ 30. Definiția rețelelor înfășurătoare într'un A_2 cu conexiune afină simetrică. Într'un A_2 cu conexiune afină, considerăm rețeaua de coordonate u^1, u^2; seria de direcții $du^1 = 0$ de-a-lungul curbelor $du^2 = 0$ fie dată de vectorii θ_1^i, iar seria de direcții $du^2 = 0$ de-a-lungul curbelor $du^1 = 0$ fie dată de vectorii θ_2^i.

Deoarece, după cum s'a arătat în paragraful 2, într'un A_2 oricărei serii de direcții îi putem atașa invariant un parametru τ, fie τ_1, τ_2 parametrii atașați celor două serii de direcții.

Prima serie va fi dată de

$$\theta_1^1 = 0, \qquad \theta_1^2 = 1, \quad du^2 = 0, \tag{IV,1}$$

iar a doua de

$$\theta_2^1 = 1, \qquad \theta_2^2 = 0, \quad du^1 = 0; \tag{IV,2}$$

așa dar

$$\begin{aligned} D\theta_1^\alpha &= d\theta_1^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha\, \theta_1^\beta\, du^\gamma = \Gamma_{21}^\alpha\, du^1 \\ D\theta_2^\alpha &= d\theta_2^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha\, \theta_2^\beta\, du^\gamma = \Gamma_{12}^\alpha\, du^2. \end{aligned} \tag{IV,3}$$

Ținând seama de aceste valori, avem din (I, 43), păstrând notațiile de acolo și excluzând cazul seriilor paralele ($\Gamma_{21}^1 \neq 0, \quad \Gamma_{21}^2 \neq 0$),

$$\xi_1^i = -\frac{1}{\Gamma_{21}^1}\cdot \theta_1^i. \qquad \xi_2^i = -\frac{1}{\Gamma_{12}^2}\cdot \theta_2^i; \tag{IV,4}$$

așa dar

$$\begin{aligned} &\xi_1^1 = 0, \quad \xi_1^2 = -\frac{1}{\Gamma_{21}^1}; \quad \rho_1 = -\frac{1}{\Gamma_2^1}, \quad \nu_1 = \Gamma_{21}^1 \\ &\xi_2^1 = -\frac{1}{\Gamma_{12}^2}, \quad \xi_2^2 = 0; \quad \rho_2 = -\frac{1}{\Gamma_{12}^2}, \quad \nu_2 = \Gamma_{12}^2 \end{aligned} \tag{IV,5}$$

și

$$\begin{aligned} \mu_1\, d\sigma &= \Gamma_{21}^2\, du^1 \\ \mu_2\, d\sigma &= \Gamma_{12}^1\, du^2. \end{aligned} \tag{IV,6}$$

Așa dar, tot din (I, 43) deducem

$$\begin{aligned} d\tau_1 &= \mu_1\, d\sigma - d\log \nu_1 = \Gamma_{21}^2\, du^1 - d\log \Gamma_{21}^1 \\ d\tau_2 &= \mu_2\, d\sigma - d\log \nu_2 = \Gamma_{12}^1\, du^2 - d\log \Gamma_{12}^2. \end{aligned} \tag{IV,7}$$

Vom numi *rețea înfășurătoare Myller*, sau pe scurt *rețea înfășurătoare* $M_1 - M_1$ o rețea pentru care τ_1 și τ_2 sunt funcții numai de u^1, u^2, respectiv, adică, pentru care τ_1, τ_2 pot fi luați ca parametri u^1, u^2, ai rețelei.

Din (IV, 7), avem

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial u_1} = \Gamma^2_{21} - \frac{\partial \log \Gamma^1_{21}}{\partial u^1} = 1 \cdot$$
$$\frac{\partial \tau_2}{\partial u^2} = \Gamma^1_{21} - \frac{\partial \log \Gamma^2_{12}}{\partial u^2} = 1. \qquad \text{(IV,8)}$$

Aceste ecuații se mai scriu

$$\frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial u^1} + \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{21}\,\Gamma^2_{21} = \frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial u^2} + \Gamma^2_{21}, \qquad \text{(IV,9)}$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\left(e^{u^1+u^2}\,\Gamma^1_{21}\right) = e^{u^1+u^2}\,\Gamma^1_{21}\,\Gamma^2_{21} = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(e^{u^1+u^2}\,\Gamma^2_{21}\right). \qquad \text{(IV,10)}$$

Introducând o funcție potențială $\Phi(u^1, u^2)$, așa ca

$$\Gamma^1_{21}\,e^{u^1+u^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}, \quad \Gamma^2_{21}\,e^{u^1+u^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial u^1} \qquad \text{(IV,11)}$$

ceea ce este posibil, cum se vede din (IV,10) — deducem din membrul prim și secund din (IV, 10), că Φ verifică ecuația

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^1\,\partial u^2} = e^{-u^1-u^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u^2} \cdot \qquad \text{(IV,12)}$$

Făcând schimbarea de variabilă

$$\varphi^1 = e^{-u^1}, \quad \varphi^2 = e^{-u^2}, \qquad \text{(IV,13)}$$

ecuația (IV,12) devine

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^1\,\partial \varphi^2} = \varphi^1\,\varphi^2\,\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^1}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^2}, \qquad \text{(IV,14)}$$

care este ecuația ce-l determină pe Φ; dacă îl avem pe Φ, deducem din (IV,11) pe Γ^1_{21}, Γ^2_{21}.

§ 31. Cazuri particulare de rețele înfășurătoare $M_1 - M_1$ într'un S_2 riemannian.

a. *Rețele ortogonale*

Avem

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2, \tag{IV,15}$$

deci

$$\Gamma^1_{21} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \log g_{11}}{\partial u^2}, \quad \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \log g_{22}}{\partial u^1}, \tag{IV,16}$$

care, duse în (IV, 11) dau

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \log g_{11}}{\partial u^2} &= e^{-u^1-u^2}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial u^2}, \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial \log g_{22}}{\partial u^1} &= e^{-u^1-u^2}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial u^1}. \end{aligned} \tag{IV,17}$$

și integrând prin părți, deducem

$$\begin{aligned} \log\frac{\sqrt{g_{11}}}{U^1} &= \Phi e^{-u^1-u^2} + \int \Phi e^{-u^1-u^2}\,du^2 \\ \log\frac{\sqrt{g_{22}}}{U^2} &= \Phi e^{-u^1-u^2} + \int \Phi e^{-u^1-u^2}\,du^1, \end{aligned} \tag{IV,18}$$

de unde se determină g_{11}, g_{22} (U^1, U^2 sunt funcții arbitrare de u^1, u^2 respectiv).

b. *Rețele isoterme*

Avem în acest caz în (IV,15), condiția

$$\frac{\partial^2}{\partial u^1\,\partial u^2}\left(\log\frac{g_{11}}{g_{22}}\right) = 0, \tag{VI,19}$$

adică

$$\frac{\partial^2 \log g_{11}}{\partial u^1\,\partial u^2} = \frac{\partial^2 \log g_{22}}{\partial u^1\,\partial u^2}. \tag{IV,20}$$

Din (VI,17), deducem

$$\frac{\partial}{\partial u^2}\left(e^{-u^1-u^2}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial u^1}\right) = \frac{\partial}{\partial u^1}\left(e^{-u^1-u^2}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial u^2}\right), \tag{IV,21}$$

adică

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u^1} = \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}, \tag{VI,22}$$

care, integrată, dă

$$\Phi = f(u^1 + u^2); \tag{IV,23}$$

așa dar, urmează să luăm în considerare acele soluții particulare ale ecuației (IV,12), care au forma (IV,23).

Notând

$$w = u^1 + u^2, \tag{IV,24}$$

avem, din (IV, 12):

$$f'' = e^{-w} f'^2, \tag{IV,25}$$

unde f', f'' sunt derivatele lui f în raport cu w.

Din (IV,25), deducem

$$\Phi = f(w) = \frac{1}{\alpha} \log c (1 + a e^{\alpha w}), \tag{IV,26}$$

(a, c constante); așa dar, din (IV,11)

$$\Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{1 + a e^{u^1+u^2}} \cdot \tag{IV,27}$$

Ținând seama de (IV,26), deducem din (IV,17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} &= \frac{1}{1 + a e^{u^1+u^2}} \\ \frac{\partial \log \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} &= \frac{1}{1 + a e^{u^1+u^2}} ; \end{aligned} \tag{IV,28}$$

deci

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{11}} &= U^1 \cdot \frac{1}{a + e^{-u^1-u^2}} \\ \sqrt{g_{22}} &= U^2 \cdot \frac{1}{a + e^{-u^1-u^2}} , \end{aligned} \tag{IV,29}$$

cu U^1, U^2 funcții arbitrare de u^1, respectiv u^2.

Așa dar,

$$ds^2 = g_{11} (du^1)^2 + g_{22} (du^2)^2 = \frac{1}{(a + e^{-u^1-u^2})^2} \left[(U^1)^2 (du^1)^2 + (U^2)^2 (du^2)^2 \right], \tag{IV,30}$$

care, după cum se vede cu ușurință, se poate reduce printr'o schimbare de variabilă, la forma

$$ds^2 = \frac{(du^1)^2 + (du^2)^2}{(1 + U^1 U^2)^2} \cdot \tag{IV,31}$$

In particular, parametrii τ_1, τ_2 sunt isometrici, dacă în (IV, 30) luăm $U^1 = U^2 = c$ și deci

$$ds^2 = \left[\frac{c}{a + e^{-u^1-u^2}} \right]^2 [(du^1)^2 + (du^2)^2]. \tag{IV,32}$$

c. *Rețele formate din autoparalele*

Din (III,109) avem pentru cele două serii de direcții

$$d\tau_1 = (k_1\, ds_1 + 2\, d\alpha_1)\operatorname{cotg}\alpha_1 - d\log\left(k_1 + \frac{d\alpha_1}{ds_1}\right)$$
$$d\tau_2 = (k_2\, ds_2 + 2\, d\alpha_2)\operatorname{cotg}\alpha_2 - d\log\left(k_2 + \frac{d\alpha_2}{ds_2}\right), \qquad \text{(IV,33)}$$

Deoarece cele două serii de curbe sunt autoparalele, avem $k_1 = k_2 = 0$; deci

$$e^{\tau_1}\frac{d\alpha_1}{ds_1} = c_1 \sin^2\alpha_1;\quad e^{\tau_2}\frac{d\alpha_2}{ds_2} = c_2\sin^2\alpha_2. \qquad \text{(IV,34)}$$

Așa dar

$$\operatorname{cotg}\alpha_1 = c_1\int e^{-\tau_1}\, ds_1 + d_1;\ \operatorname{cotg}\alpha_2 = c_2\int e^{-\tau_2}\, ds_2 + d_2 \qquad \text{(IV,35)}$$

cu c_1, c_2, d_1, d_2 constante arbitrare.

Deoarece

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \qquad \text{(IV,36)}$$

deducem din (IV,34)

$$\frac{c_1\, ds_1}{e^{\tau_1}} + \frac{c_2\, ds_2}{e^{\tau_2}} = 0. \qquad \text{(IV,37)}$$

Notând

$$ds_1 = \frac{e^{\tau_1}}{c_1}d\varpi,\ ds_2 = \frac{e^{\tau_2}}{c_2}d\varpi \qquad \text{(IV,38)}$$

ceea ce este posibil din cauza lui (IV,37), și ținând seama că, în acest caz, din (IV,34) deducem

$$\operatorname{cotg}\alpha = \varpi \qquad \text{(IV,39)}$$

și considerând $c_1 = c_2 = 1$

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 - 2\, ds_1\, ds_2\cos\alpha = \left[e^{2\tau_1} - \frac{2\,\varpi}{\sqrt{1+\varpi^2}}e^{\tau_1+\tau_2} + e^{2\tau_2}\right](d\varpi)^2. \qquad \text{(IV,40)}$$

d. *Rețelele cu* $d\tau_1 + d\tau_2$ *diferențială totală exactă*

Pentru o rețea oarecare, expresia $d\tau_1 + d\tau_2$ este un pfaffian invariant; din (III,109), avem

$$d\tau_1 + d\tau_2 = k_1\operatorname{cotg}\alpha_1\, ds_1 + k_2\operatorname{cotg}\alpha_2\, ds_2 +$$
$$+ 2\,(\operatorname{cotg}\alpha_1\, d\alpha_1 + \operatorname{cotg}\alpha_2\, d\alpha_2) - d\log\frac{k_1 + \dfrac{d\alpha_1}{ds_1}}{k_2 + \dfrac{d\alpha_2}{ds_2}}. \qquad \text{(IV,41)}$$

Pentru ca acest pfaffian să fie o diferențială totală exactă, este necesar și suficient ca pfaffianul

$$k_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 \, ds_1 + k_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 \, ds_2 , \tag{IV,42}$$

să fie o diferențială totală exactă, așa dar, ca

$$\frac{\partial (k_1 \operatorname{cotg} \alpha_1)}{\partial s_2} = \frac{\partial (k_2 \operatorname{cotg} \alpha_2)}{\partial s_1} , \tag{IV,43}$$

așa dar, ca să existe o funcție $\psi (s_1, s_2)$, așa ca

$$k_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{\partial \psi}{\partial s_1} , \quad k_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 = \frac{\partial \psi}{\partial s_2} . \tag{IV,44}$$

Se mai pot cerceta acele rețele pentru care

$$d\tau_1 = ds_1 , \quad d\tau_2 = ds_2 , \tag{IV,45}$$

sau forma invariantă $d\tau_1 \, d\tau_2$ care atașează unei rețele o metrică având liniile rețelei ca linii nule.

§ 32. Definiția rețelelor concurente dintr'un A_2 cu conexiune afină simetrică. Considerând un spațiu A_2 cu conexiune afină simetrică, să căutăm condiția ca, de-a-lungul curbelor $du^2 = 0$, direcțiile curbelor $du^1 = 0$ să fie concurente.

Avem deci

$$\sigma = u^1, \; \dot{u}^1 = 1, \; \dot{u}^2 = 0, \; \theta^1 = 0, \; \theta^2 = 1, \tag{IV,46}$$

așa că ecuațiile diferențiale ale concurenței, care scrise desvoltat sunt

$$\rho \frac{d\theta^1}{d\sigma} + \dot{u}^1 + \dot{\rho}\theta^1 + \rho [\Gamma^1_{11} \theta^1 \dot{u}^1 + \Gamma^1_{12} (\theta^1 \dot{u}^2 + \theta^2 \dot{u}^1) + \Gamma^1_{22} \theta^2 \dot{u}^2] = 0$$

$$\rho \frac{d\theta^2}{d\sigma} + \dot{u}^2 + \dot{\rho}\theta^2 + \rho [\Gamma^2_{11} \theta^1 \dot{u}^1 + \Gamma^2_{12} (\theta^1 \dot{u}^2 + \theta^2 \dot{u}^1) + \Gamma^2_{22} \theta^2 \dot{u}^2] = 0, \tag{IV,47}$$

devin

$$1 + \rho \Gamma^1_{12} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial u^1} + \rho \Gamma^2_{12} = 0 \tag{IV,48}$$

și eliminând pe ρ între aceste două relații, avem

$$\frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u^1} = \Gamma^1_{12} \Gamma^2_{12} . \tag{IV,49}$$

De asemenea, condiția ca de-a-lungul curbelor $du^1 = 0$, direcțiile curbelor $du^2 = 0$ să fie concurente, este

$$\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u^2} = \Gamma^1_{12} \Gamma^2_{12} . \tag{IV,50}$$

Dacă varietatea A_2 este raportată la o rețea de coordonate care se bucură de dubla proprietate exprimată de (IV,49), (IV,50) numim aceste curbe coordonate, *rețea concurentă* $M_2 - M_2$ într'un spațiu cu conexiune afină simetrică, sau pe scurt, *rețea concurentă* $M_2 - M_2$.

Din (IV,49) și (IV,50), deducem

$$\frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u^1} = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^2}. \tag{IV,51}$$

Introducând funcția potențială $\Phi(u^1, u^2)$, avem

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial \Phi}{\partial u^1} \tag{IV,52}$$

— ceea ce este posibil din cauza lui (IV,51) — deducem, introducând aceste valori în (IV,51)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}, \tag{IV,53}$$

a cărei soluție este

$$\Phi = -\log(U^1 + U^2) \tag{IV,54}$$

cu $U^1(u^1)$, $U^2(u^2)$ arbitrare, deci

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{U^{2\prime}}{U^1 + U^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = -\frac{U^{1\prime}}{U^1 + U^2},$$

luând drept noi parametri U^1, U^2, pe care îi notăm tot cu u^1, u^2, avem

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{u^1 + u^2} \tag{IV,55}$$

§ 33. Rețele $M_1 - M_2$. In acest caz de-a-lungul curbelor $du^2 = 0$ pentru curbele $du^1 = 0$ poate fi luat τ_2 drept parametru u^2, iar de-a-lungul curbelor $du^1 = 0$ curbele $du^2 = 0$ sunt concurente.

Avem deci, din (IV,9) și (IV,50)

$$\frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial u^1} + \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^2 = \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial u^2}, \tag{IV,56}$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial u^1}(e^{u^1} \Gamma_{21}^1) = e^{u^1} \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^2 = \frac{\partial}{\partial u^2}(e^{u^1} \Gamma_{21}^2). \tag{IV,57}$$

Introducând o funcție potențială $\Phi(u^1, u^2)$ așa ca

$$\Gamma_{21}^1 e^{u^1} = \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{21}^2 e^{u^1} = \frac{\partial \Phi}{\partial u^1} \tag{IV,58}$$

— ceea ce este posibil după cum se vede din (IV,57)—deducem, din membrul prim și secund din (IV,57)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^1 \partial u^2} = e^{-u^1} \frac{\partial \Phi}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}. \tag{IV,59}$$

Făcând schimbarea de variabilă

$$\varphi^1 = e^{-u^1},\ \varphi^2 = u^2,$$

ecuaţia (IV,59) devine

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^1 \partial \varphi^2} = \varphi^1 \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^2}, \tag{IV,60}$$

care este ecuaţia ce-l determină pe Φ; dacă îl avem pe Φ, deducem din (IV, 58) pe Γ^1_{21}, Γ^2_{21}.

§ 34. Cazuri particulare de reţele $M_1 - M_1$ într'un S_2 riemannian.

a. *Reţele ortogonale*

Avem din (IV,15) şi (IV,16) cu ajutorul lui (IV,58)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} &= e^{-u^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial \log \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} &= e^{-u^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u^1}. \end{aligned} \tag{IV,61}$$

Integrând prin părţi, deducem

$$\begin{aligned} \log \frac{\sqrt{g_{11}}}{U^1} &= \Phi e^{-u^1} \\ \log \frac{\sqrt{g_{22}}}{U^2} &= \Phi e^{-u^1} + \int \Phi e^{-u^1} du^1, \end{aligned} \tag{IV,62}$$

de unde se determină g_{11}, g_{22} (U^1, U^2 sunt funcţii arbitrare de u^1, u^2 respectiv).

b. *Reţele isoterme*

In acest caz, din (IV,20) şi (IV,61) deducem

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\left(e^{-u^1} \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(e^{-u^1} \frac{\partial \Phi}{\partial u^1}\right), \tag{VI,63}$$

adică

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u^2} = 0. \tag{IV,64}$$

Aşa dar putem scrie

$$\Phi = \varphi'(u^1)\, e^{u^1} \tag{IV,65}$$

cu $\varphi(u^1)$ arbitrar şi (IV, 59) va fi satisfăcută. Avem deci din (IV, 62)

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{11}} &= U^1 e^{\varphi'} \\ \sqrt{g_{22}} &= U^2 e^{\varphi + \varphi'}. \end{aligned}$$

Considerând $U^1 e^{\varphi}$ în loc de U^1, dacă notăm $\varphi + \varphi' = \theta$, deducem

$$\sqrt{g_{11}} = U^1 e^{\varphi+\varphi'} = U^1 e^{\theta}$$
$$\sqrt{g_{22}} = U^2 e^{\varphi+\varphi'} = U^2 e^{\theta}; \tag{IV,66}$$

deci

$$ds^2 = e^{2\theta}[(U^1)^2 (du^1)^2 + (U^2)^2 (du^2)^2].$$

Se vede imediat că printr'o schimbare de variabile, deducem

$$ds^2 = e^{2\theta}[(du^1)^2 + (du^2)^2], \tag{IV,67}$$

cu $\theta = \theta(u^1)$ arbitrară, sau încă

$$ds^2 = (du^1)^2 + G(u^1)(du^2)^2. \tag{IV,68}$$

care este de forma geodezic polară a elementului de arc, cu $du^2 = 0$ geodezică și $du^1 = 0$, traiectorie ortogonală a geodezicei.

Așa dar am găsit cu ajutorul înfășurării și concurenței, o caracterizare a rețelelor geodezic polare: *rețelele* $M_1 - M_1$ *isoterme sunt rețele geodezic polare și reciproc.*

§ 35. Rețele $M_1 - T$. In acest caz de-a-lungul curbelor $du^2 = 0$, pentru curbele $du^1 = 0$ poate fi luat τ_2 drept parametru u^2, iar de-a-lungul curbelor $du^1 = 0$ curbele $du^2 = 0$ sunt concurente.

Avem deci

$$\frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial u^1} + \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{21}, \quad \Gamma^2_{21} = 0, \tag{IV,69}$$

sau

$$\frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial u^1} + \Gamma^1_{21} = 0, \tag{IV,69'}$$

de unde

$$\Gamma^1_{21} = U^2 e^{-u^1};$$

sau, făcând o schimbare de variabile

$$\Gamma^1_{21} = u^2 e^{-u^1}$$
$$\Gamma^2_{21} = 0. \tag{IV,70}$$

a. *Cazurile particulare de rețele* $M_1 - T$ *într'un* S_2 *riemannian*

a_1. *Rețele ortogonale*

Avem din (IV, 15) și (IV, 16), cu ajutorul lui (IV, 70)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \log g_{11}}{\partial u^2} = u^2 e^{-u^1}$$
$$\frac{\partial \log g_{22}}{\partial u^1} = 0, \tag{IV,71}$$

sau

$$\log \frac{g_{11}}{U_1} = (u^2)^2 e^{-u^1}; \qquad (IV,72)$$

$$g_{22} = U^2$$

deci

$$ds^2 = U^1 e^{(u^2)^2} e^{-u^1} (du^1)^2 + U^2 (du^2)^2,$$

care, printr'o schimbare de variabilă, se aduce la forma

$$ds^2 = (du^1)^2 + e^{U^1 U^2} (du^2)^2. \qquad (IV,73)$$

a_2. *Rețele isoterme*
In acest caz, avem

$$\log \frac{g_{11}}{g_{22}} = U^1 U^2$$

deci (IV, 19) revine la

$$(U^1)'(U^2)' = 0. \qquad (IV,74)$$

In cazul

$$U^1 = c$$

$$ds^2 = (du^1)^2 + e^{cU^2} (du^2)^2$$

şi printr'o schimbare de variabi ă, se aduce la forma

$$ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2. \qquad (IV,75)$$

In cazul

$$U^2 = c$$

$$ds^2 = (du^1)^2 + e^{cU^1} (du^2)^2$$

şi printr'o schimbare de variabilă, se aduce la forma

$$ds^2 = u^2 [(du^1)^2 + (du^2)^2]. \qquad (IV,76)$$

§ 36. Rețele $M_2 - T$. In acest caz, de-a-lungul curbelor $du^2 = 0$, curbele $du^1 = 0$, sunt concurente, iar de-a-lungul liniilor $du^1 = 0$, curbele $du^2 = 0$ sunt paralele.
Avem deci

$$\frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u^1} = \Gamma^1_{12} \Gamma^2_{12} \qquad (IV,77)$$

$$\Gamma^2_{12} = 0$$

adică, făcând o schimbare de variabilă

$$\Gamma^1_{12} = u^2 \qquad (IV,78)$$

$$\Gamma^2_{12} = 0.$$

In cazul $T - T$, studiat de B i a n c h i pentru un spațiu riemannian, avem

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0, \tag{IV,79}$$

§ 37. Căutarea rețelelor de diverse tipuri ($M_1 - M_1$, $M_2 - M_2$, $T - T$, $M_1 - M_2$, $M_1 - T$, $M_2 - T$) pe un A_2, depinde de un sistem de ecuații diferențiale, cu derivate parțiale de ordinul al doilea, analog celui al lui Servant pentru rețelele Cebîș v ale unei suprafețe.

Varietatea fiind raportată la o rețea (u^1, u^2) oarecare, să căutăm o transformare

$$u^1 = u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), \quad u^2 = u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2), \tag{IV,80}$$

care conduce la o rețea de tipul căutat.

Fie Γ_{jk}^i, $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ respectiv coeficienții de conexiune în sistemul (u^1, u^2) $(\bar{u}^1\ \bar{u}^2)$ respectiv.

a. *Cazul* M_1

Dacă cerem ca de-a-lungul lui $d\bar{u}^2 = 0$, direcțiile $d\bar{u}^1 = 0$ să admită $\tau_2 = \bar{u}^2$, dacă considerăm acele ecuații ale lui Christoffel, [30], [10] care îl conțin pe $\bar{\Gamma}_{12}^1$, $\bar{\Gamma}_{12}^2$, avem

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}_{12}^1}{\partial \bar{u}^1} + \bar{\Gamma}_{12}^1 = \bar{\Gamma}_{12}^1 \bar{\Gamma}_{12}^2 \tag{IV,81}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u^1}{\partial \bar{u}^1\, \partial \bar{u}^2} + \Gamma_{11}^1 \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + \Gamma_{12}^1 \left(\frac{\partial u^1}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \bar{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \right) + \Gamma_{22}^1 \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} = \\
&= \bar{\Gamma}_{12}^1 \cdot \frac{\partial u^1}{\partial u^1} + \left(1 + \frac{\partial \lg \Gamma_{12}^1}{\partial u^1} \right) \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \\
&\frac{\partial^2 u^1}{\partial \bar{u}^1\, \partial \bar{u}^2} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + \Gamma_{12}^2 \left(\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \right) + \\
&+ \Gamma_{12}^2 \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} = \bar{\Gamma}_{12}^1 \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} + \left(1 + \frac{\partial \lg \Gamma_{12}^1}{\partial \bar{u}^1} \right) \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \cdot
\end{aligned} \tag{IV,82}$$

Aceste ecuații sunt suficiente pentru a determina funcțiile căutate căci, scăzându-le din ecuațiile lui Christoffel, în care am considerat în membrul al doilea coeficienții oarecare Γ_{12}^{*1}, Γ_{12}^{*2}, obținem

$$\begin{aligned}
&(\Gamma_{12}^{*1} - \bar{\Gamma}_{12}^1) \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} + \left(\Gamma_{12}^{*2} - 1 - \frac{\partial \lg \bar{\Gamma}_{12}^1}{\partial \bar{u}^1} \right) \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} = 0 \\
&(\Gamma_{12}^{*1} - \bar{\Gamma}_{12}^1) \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} + \left(\Gamma_{12}^{*2} - 1 - \frac{\partial \lg \bar{\Gamma}_{12}^1}{\partial \bar{u}^1} \right) \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} = 0.
\end{aligned} \tag{IV,83}$$

Deoarece funcțiile u^1, u^2 din (IV, 80) sunt independente, urmează că sistemul (IV, 83) are determinantul

$$\frac{\partial (u^1, u^2)}{\partial (\bar{u}^1, \bar{u}^2)}$$

nenul, deci nu admite decât soluțiile nule pentru necunoscutele sale.

Deci

$$\Gamma_{12}^{*1} = \overline{\Gamma}_{12}^{1}, \quad \Gamma_{12}^{*2} = 1 + \frac{\partial \log \overline{\Gamma}_{12}^{1}}{\partial \overline{u}^1} = \overline{\Gamma}_{12}^{2}. \tag{IV,84}$$

Aşa dar, suntem conduşi iar la (IV, 81). In (IV, 82), $\overline{\Gamma}_{12}^{1}$ este o funcţie arbitrară de $\overline{u}^1, \overline{u}^2$.

b. *Cazul* M_2

Dacă cerem ca de-a-lungul lui $d\overline{u}^1 = 0$, direcţiile $d\overline{u}^2 = 0$ să fie concurente, obţinem în acelaşi mod ca mai sus

$$\frac{\partial \overline{\Gamma}_{12}^{1}}{\partial \overline{u}^1} = \overline{\Gamma}_{12}^{1}\overline{\Gamma}_{12}^{2} \tag{IV,85}$$

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}} + \Gamma_{11}^{1}\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1}\cdot\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \Gamma_{12}^{1}\left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1}\right) + \Gamma_{22}^{1}\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} =$$

$$= \overline{\Gamma}_{12}^{1}\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} + \frac{\partial \log \overline{\Gamma}_{12}^{1}}{\partial \overline{u}^1}\cdot\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2}. \tag{IV,86}$$

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} + \Gamma_{11}^{2}\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1}\cdot\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \Gamma_{11}^{2}\left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1}\right) + \Gamma_{22}^{2}\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} =$$

$$= \overline{\Gamma}_{12}^{1}\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} + \frac{\partial \log \overline{\Gamma}_{12}^{1}}{\partial \overline{u}^1}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2}.$$

Suficienţa acestui sistem se arată ca şi în cazul precedent; $\overline{\Gamma}_{12}^{1}$ e o funcţie arbitrară de $\overline{u}^1, \overline{u}^2$.

c. *Cazul* T

Dacă cerem ca de-a-lungul lui $d\overline{u}^2 = 0$, direcţiile $d\overline{u}^1 = 0$ să fie paralele, avem

$$\overline{\Gamma}_{12}^{1} = 0 \tag{IV,87}$$

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} + \Gamma_{11}^{1}\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1}\cdot\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \Gamma_{12}^{1}\left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1}\right) +$$

$$+ \Gamma_{22}^{1}\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} = \overline{\Gamma}_{12}^{2}\cdot\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} \tag{IV,88}$$

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} + \Gamma_{11}^{2}\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1}\cdot\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \Gamma_{12}^{2}\left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1}\right) +$$

$$+ \Gamma_{22}^{2}\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} = \overline{\Gamma}_{12}^{2}\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2}.$$

d. *Cazul* $M_1 - M_1$

Pentru ca rețeaua $\overline{u}^1, \overline{u}^2$ să fie rețea $M_1 - M_1$ deducem din (IV,11), (IV,12), că trebue să avem:

$$\overline{\Gamma}^1_{12} = e^{-\overline{u}^1-\overline{u}^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^2}, \qquad \overline{\Gamma}^2_{12} = e^{-\overline{u}^1-\overline{u}^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^1} \tag{IV,89}$$

cu Φ soluție a ecuației

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} = e^{-\overline{u}^1-\overline{u}^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^2} \cdot \tag{IV,90}$$

Așa dar

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} + \Gamma^1_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \Gamma^1_{12} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \right) + \Gamma^1_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} + \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} =$$

$$= e^{-\overline{u}^1-\overline{u}^1} \cdot \left[\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^1} \right] \tag{IV,91}$$

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} + \Gamma^2_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \Gamma^2_{12} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \right) + \Gamma^2_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} =$$

$$= e^{-\overline{u}^1-\overline{u}^1} \cdot \left[\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^1} \right].$$

e. *Cazul* $M_1 - M_2$

Pentru ca rețeaua $\overline{u}^1, \overline{u}^2$ să fie rețea $M_1 - M_2$, deducem din (IV,58) (IV,59) că trebue să avem

$$\overline{\Gamma}^1_{12} = e^{-\overline{u}^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^2}, \qquad \overline{\Gamma}^2_{12} = e^{-\overline{u}^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^1}, \tag{IV,92}$$

cu Φ soluție a ecuației

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} = e^{-\overline{u}^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^2} \cdot \tag{IV,93}$$

Așa dar

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} + \Gamma^1_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \Gamma^1_{12} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \right) + \Gamma^1_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} =$$

$$= e^{-\overline{u}^1} \cdot \left[\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^1} \right] \tag{IV,94}$$

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} + \Gamma^2_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \Gamma^2_{12} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \right) + \Gamma^2_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} =$$

$$= e^{-\overline{u}^1} \cdot \left[\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{u}^1} \right].$$

f. *Cazul* $M_1 - T$

In acest caz, deducem din (IV,70) că

$$\overline{\Gamma}^1_{12} = \overline{u}^2 e^{-\overline{u}^1}, \qquad \overline{\Gamma}^2_{12} = 0. \tag{IV,95}$$

Aşa dar, avem

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} + \Gamma^1_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \Gamma^1_{12} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \right) +$$

$$+ \Gamma^1_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} = \overline{u}^2 e^{-\overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1}$$

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} + \Gamma^2_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \Gamma^2_{12} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \right) +$$

$$+ \Gamma^2_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} = \overline{u}^2 e^{-\overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1}$$

şi făcând schimbarea

$$e^{-\overline{u}^1} = \overline{\varphi}^1, \qquad \overline{u}^2 = \overline{\varphi}^2,$$

obţinem

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial \overline{\varphi}^1 \partial \overline{\varphi}^2} + \Gamma^1_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \overline{\varphi}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{\varphi}^2} + \Gamma^1_{12} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{\varphi}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{\varphi}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{\varphi}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{\varphi}^1} \right) +$$

$$+ \Gamma^1_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \overline{\varphi}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{\varphi}^2} = - \overline{\varphi}^1 \overline{\varphi}^2 \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{\varphi}^1}$$

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial \overline{\varphi}^1 \partial \overline{\varphi}^2} + \Gamma^2_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \overline{\varphi}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{\varphi}^2} + \Gamma^2_{12} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{\varphi}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{\varphi}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{\varphi}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{\varphi}^1} \right) + \tag{IV,96}$$

$$+ \Gamma^2_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \overline{\varphi}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{\varphi}^2} = - \overline{\varphi}^1 \overline{\varphi}^2 \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{\varphi}^1}.$$

g. *Cazul* $M_2 - M_2$

In acest caz, deducem din (IV, 55)

$$\overline{\Gamma}^1_{12} = \overline{\Gamma}^2_{12} = - \frac{1}{\overline{u}^1 + \overline{u}^2}. \tag{IV,97}$$

Aşa dar

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} + \Gamma^1_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \Gamma^1_{12} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \right) + \Gamma^1_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} +$$

$$+ \frac{1}{\overline{u}^1 + \overline{u}^2} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} \right) = 0 \tag{IV,98}$$

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} + \Gamma^2_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} + \Gamma^2_{12} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \right) + \Gamma^2_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} +$$

$$+ \frac{1}{\overline{u}^1 + \overline{u}^2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} + \frac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} \right) = 0.$$

h. *Cazul* $M_2 - T$

In acest caz, deducem din (IV,78)

$$\bar{\Gamma}^1_{12} = \bar{u}^2, \quad \bar{\Gamma}^2_{12} = 0, \tag{IV,99}$$

așa dar

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u^1}{\partial \bar{u}^1\, \partial \bar{u}^2} + \Gamma^1_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + \Gamma^1_{12}\left(\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1}\right) + \\
&+ \Gamma^1_{22} \frac{\partial u^2}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} - \bar{u}^2 \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} = 0 \\
&\frac{\partial^2 u^2}{\partial \bar{u}^1\, \partial \bar{u}^2} + \Gamma^2_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + \Gamma^2_{12}\left(\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1}\right) + \\
&+ \Gamma^2_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} - \bar{u}^2 \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} = 0.
\end{aligned} \tag{IV,100}$$

i. *Cazul* $T - T$

In acest caz, deducem din (IV,79)

$$\bar{\Gamma}^1_{12} = \bar{\Gamma}^2_{12} = 0 \tag{IV,101}$$

așa dar

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u^1}{\partial \bar{u}^1\, \partial \bar{u}^2} + \Gamma^1_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + \Gamma^1_{12}\left(\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1}\right) + \Gamma^1_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} = 0 \\
&\frac{\partial^2 u^2}{\partial \bar{u}^1\, \partial \bar{u}^2} + \Gamma^2_{11} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + \Gamma^2_{12}\left(\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} + \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1}\right) + \Gamma^2_{22} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} = 0.
\end{aligned} \tag{IV,102}$$

Suficiența sistemelor de mai sus se arată ca și la primul dintre ele.

j. *Discuția sistemelor precedente*

Sistemele (IV,82), (IV,86), (IV,88), (IV,91), (IV,94), (IV,96), (IV,98), (IV,100) și (IV,102) sunt de tip hiperbolic și admit în vecinătatea unui punct $(\bar{u}^1 = a, \bar{u}^2 = b)$ o soluție unică $[u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)]$, satisfăcând condițiilor

$$\begin{aligned}
&u^1(\bar{u}^1, b) = U^1(\bar{u}^1) \qquad u^1(a, \bar{u}^2) = U^2(\bar{u}^2), \\
&u^2(\bar{u}^1, b) = U^{*1}(\bar{u}^1) \qquad u^2(a, \bar{u}^2) = U^{*2}(\bar{u}^2).
\end{aligned} \tag{IV,103}$$

unde

$$U^1, \; U^{*1}, \qquad U^2, \; U^{*2}$$

sunt funcții finite și continue ca și derivatele lor de ordinul întâi, așa că

$$U^1(a) = U^2(b), \quad U^{*1}(a) = U^{*2}(b), \tag{IV,104}$$

ceea ce geometric înseamnă că într'un A_2 cu conexiune simetrică, putem să ne dăm două curbe arbitrare care se intersectează și apoi determinăm câte o unică rețea din fiecare din cazurile precedente — așa încât să cuprindă cele două curbe date ca curbe ale rețelei — fiecare curbă aparținând unei

familii a rețelei. Deși diverse calcule din paragrafele precedente sunt identice cu cele ale lui B i a n c h i [9], [10], A. M y l l e r [3], [4] și O. M a y e r [5], totuși, rezultatele noastre sunt mai generale, referindu-se la cazul unui spațiu cu conexiune afină simetrică, în timp ce celelalte se referă la un spațiu riemannian.

§ 38. Cazul planului afin. In acest caz, rețelele de mai sus devin rețele conjugate și putem considera $\Gamma^i_{jk} = 0$, deci sistemele (IV,82), (IV, 86), (IV,88), (IV,91), (IV,96), (IV,98), (IV, 100) și (IV,102) arată că coordonatele u^1, u^2 verifică aceeași ecuație de tip Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} + a\frac{\partial u}{\partial \overline{u}^1} + b\frac{\partial u}{\partial \overline{u}^2} = 0. \qquad \text{(IV,105)}$$

In cele ce urmează, vom considera planul afin parametrizat omogen, introducând o coordonată supranumerară u^3, care să verifice și ea ecuația de mai sus, odată cu u^1, u^2. Dacă de-a-lungul curbelor unei familii coordonate, direcțiile curbelor celeilalte familii sunt concurente, suntem în cazul M_2 § 38 punctul b.; în acest caz, urmează din teoria concurenței că punctul M' asociat lui M va fi fix. Acest punct M' descrie curba asociată. Conform teoriei rețelelor conjugate, M' este transformatul lui M în sensul lui u^1 sau u^2 și este dat de

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^2} + au \text{ sau } u_{-1} = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}_1} + bu,$$

unde u, u_1, u_{-1} iau respectiv grupurile de valori (u^1, u^2, u^3) (u^1_1, u^2_1, u^3_1) $(u^1_{-1}, u^2_{-1}, u^3_{-1})$. E u l e r [12] a arătat că, în acest caz, unul din invarianții rețelei

$$h = \frac{\partial a}{\partial \overline{u}^1} + ab, \quad k = \frac{\partial b}{\partial \overline{u}^2} + ab$$

este nul și ecuația Laplace se rezolvă prin cuadraturi. Direcțiile considerate descriu fascicule, așa că suntem în cazul lui Laplace, caracterizat analitic prin $h = 0$ și u_1 verificând o ecuație de forma

$$A\frac{\partial u_1}{\partial \overline{u}^1} + Bu_1 = 0.$$

Dacă în loc de concurente, direcțiile considerate sunt parelele, suntem în cazul *T* paragraful 38 punctul c., M' este fix ca și înainte, dar pe dreapta dela infinit. Toate considerațiile de mai sus rămân valabile, dar trebue luat $u^3 = 0$. Studiul sistematic al rețelelor conjugate se găsește în E u l e r [12], L a p l a c e [13], D a r b o u x [20], T i ț e i c a [14].

Așa dar, *rețelele înfășurătoare Myller într'un spațiu bidimensional cu conexiune afină sunt generalizarea rețelelor conjugate din planul afin.*

a. *Cazul* M_1

Din (IV,82) deducem că $\Gamma^i_{jk} = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} - \overline{\Gamma}^1_{12}\cdot\frac{\partial u}{\partial \overline{u}^1} - \left(1 + \frac{\partial \log \overline{\Gamma}^1_{12}}{\partial \overline{u}^1}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial \overline{u}^2} = 0. \qquad \text{(IV,82')}$$

Transformatele lui u în $\overline{u}^1$ și $\overline{u}^2$ sunt

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^2} - \overline{\Gamma}^1_{12} \cdot u, \qquad u_{-1} = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^1} + \left(1 + \frac{\partial \log \overline{\Gamma}^1_{12}}{\partial \overline{u}^1}\right) \cdot u, \tag{IV,106}$$

iar invarianții sunt

$$h = \overline{\Gamma}^1_{12}, \qquad k = -\frac{\partial^2 \log \overline{\Gamma}^1_{12}}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} + \overline{\Gamma}^1_{12} + \frac{\partial \overline{\Gamma}^1_{12}}{\partial \overline{u}^1}. \tag{IV,107}$$

Se observă că suntem în cazul caracterizat prin

$$b = -\left(1 + \frac{\partial \log a}{\partial \overline{u}^1}\right),$$

sau

$$h = -a. \tag{IV,108}$$

b. *Cazul* M_2

Din (IV,86) deducem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} - \overline{\Gamma}^1_{12} \cdot \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^1} - \frac{\partial \log \overline{\Gamma}^1_{12}}{\partial \overline{u}^1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^2} = 0. \tag{IV,86'}$$

Transformatele lui u în $\overline{u}^1$ și $\overline{u}^2$ sunt

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^2} - \overline{\Gamma}^1_{12} \cdot u, \qquad u_{-1} = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^1} - \frac{\partial \log \overline{\Gamma}^1_{12}}{\partial \overline{u}^1} \cdot u, \tag{IV,109}$$

iar invarianții sunt

$$h = 0, \qquad k = -\frac{\partial^2 \log \overline{\Gamma}^1_{12}}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} - \frac{\partial \overline{\Gamma}^1_{12}}{\partial \overline{u}^1}.$$

Se observă că suntem în cazul caracterizat prin

$$b = -\frac{\partial \log a}{\partial \overline{u}^1},$$

sau

$$h = 0. \tag{IV,110}$$

In acest caz, u_1 verifică ecuația

$$\frac{\partial u_1}{\partial \overline{u}^1} - \frac{\partial \log \overline{\Gamma}^1_{12}}{\partial \overline{u}^1} \cdot u_1 = 0, \tag{IV,111}$$

ceea ce arată că suntem în cazul Laplace; din această ecuație deducem

$$u_1 = \overline{U}^2 \overline{\Gamma}^1_{12},$$

adică, luând cantități proporționale,

$$u_1^\alpha = \overline{U}^{2,\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{IV,112}$$

cu $\overline{U}^{2,\alpha}$ funcţii de $\overline{u}^2$, ceea ce arată că u_1 este fix de-a-lungul unei curbe $d\overline{u}^2 = 0$; dacă $\overline{u}^2$ variază, acest punct descrie o curbă dată de

$$\varphi\left(\frac{\overline{u}^1}{u^3}, \frac{\overline{u}^2}{\overline{u}^3}\right) = 0, \tag{IV,113}$$

obţinută din eliminarea lui $\overline{u}^2$ din (IV,112).

Prin intermediul lui (IV,109), putem afla şi ecuaţia curbelor loc ale lui u_{-1} când $d\overline{u}^2 = 0$.

Cazul M_2 într'un plan afin revine, deci, la reţelele conjugate cu $a = h = 0$ sau $b = k = 0$. Cea mai generală reţea de curbe M, o putem construi în planul afin în modul următor. Considerăm o familie arbitrară de curbe în plan, curbele $d\overline{u}^2 = 0$, precum şi o curbă unică arbitrară (IV,113); de-a-lungul fiecărei curbe $d\overline{u}^2 = 0$ considerăm o serie de drepte concurente într'un punct al curbei (IV,113) aşa că, $\overline{u}^2$ variind continuu, fiecare fascicul să varieze continuu, în sensul ca fiecare dreaptă a lui să varieze continuu. Dacă $\overline{u}^2$ variază, înfăşurătoarele fiecărei drepte din fascicul sunt curbele $d\overline{u}^1 = 0$.

c. *Cazul* T

In acest caz, din (IV,88) avem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u^1 \partial u^2} - \overline{\Gamma}^2_{21} \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^2} = 0 \tag{IV,88'}$$

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^2}, \qquad u_{-1} = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^1} - \overline{\Gamma}^1_{12} \cdot u \tag{IV,114}$$

$$h = 0, \qquad k = -\frac{\partial \overline{\Gamma}^2_{12}}{\partial \overline{u}^2}. \tag{IV,115}$$

Observăm că acest caz este caracterizat prin

$$a = h \quad \text{sau} \quad b = k. \tag{IV,116}$$

In acest caz, avem

$$\frac{\partial u_1}{\partial \overline{u}^1} - \overline{\Gamma}^2_{12} u_1 = 0, \tag{IV,117}$$

ceea ce arată că suntem în cazul Laplace; din (IV,117) deducem

$$u_1 = \overline{U}^2 e^{\int \overline{\Gamma}^2_{12} d\overline{u}^1},$$

adică

$$u^\alpha_1 = \overline{U}^{2,\alpha}, \qquad u^3_1 = 0 \qquad (\alpha = 1,2), \tag{IV,118}$$

deoarece $\overline{U}^{2,3} = 0$, u_1 fiind un punct fix la infinit pentru $d\overline{u}^2 = 0$. Prin intermediul lui (IV,114) putem căpăta pe u şi u_{-1}. Cea mai generală reţea T o putem construi în planul afin considerând o familie arbitrară de curbe $du^2 = 0$ şi de-a-lungul fiecăreia o serie de drepte paralele, aşa ca direcţia fiecărei drepte să fie o funcţie continuă de $\overline{u}^2$. Infăşurătoarele fiecărei drepte sunt curbele $d\overline{u}^1 = 0$.

d. *Cazul* $M_1 - M_1$

In acest caz, avem din (IV,91)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}^1 \partial \bar{u}^2} - e^{-\bar{u}^1-\bar{u}^3}\left[\frac{\partial u}{\partial \bar{u}^1}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}^2}+\frac{\partial u}{\partial \bar{u}^2}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}^1}\right]=0, \qquad \text{(IV,91')}$$

Φ fiind o soluție a ecuației (IV,90).

Deducem

$$u_1=\frac{\partial u}{\partial \bar{u}^2}-e^{-\bar{u}^1-\bar{u}^3}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}^2}\cdot u; \qquad u_{-1}=\frac{\partial u}{\partial \bar{u}^1}-e^{-\bar{u}^1-\bar{u}^3}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}^1}\cdot u \qquad \text{(IV,119)}$$

$$h=e^{-\bar{u}^1-\bar{u}^3}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}^2}=-a; \qquad k=e^{-\bar{u}^1-\bar{u}^3}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}^1}=-b. \qquad \text{(IV,120)}$$

e. *Cazul* $M_1 - M_2$

In acest caz, avem din (IV,94)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}^1 \partial \bar{u}^2} - e^{-\bar{u}^1}\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial \bar{u}^1}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}^2}+\frac{\partial u}{\partial \bar{u}^2}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}^1}\right]=0, \qquad \text{(IV,94')}$$

Φ fiind o soluție a ecuației (IV,93).

Deducem

$$u_1=\frac{\partial u}{\partial \bar{u}^2}-e^{-\bar{u}^1}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}^2}\cdot u; \qquad u_{-1}=\frac{\partial u}{\partial \bar{u}^1}-e^{-\bar{u}^1}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}^1}\cdot u \qquad \text{(IV,121)}$$

$$h=e^{-\bar{u}^1}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}^2}=-a; \qquad k=0. \qquad \text{(IV,122)}$$

Apoi

$$\frac{\partial u_{-1}}{\partial \bar{u}^2}-e^{-\bar{u}^1}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}^2}\cdot u_{-1}=0, \qquad \text{(IV,123)}$$

ceea ce arată că suntem în cazul Laplace și care dă

$$u_{-1}=\bar{U}^1 e^{\Phi^3-\bar{u}^1},$$

sau luând cantități proporționale

$$u_{-1}^{\alpha}=\bar{U}^{1,\alpha} \qquad (\alpha=1,2,3), \qquad \text{(IV,124)}$$

ceea ce arată că u_{-1} este fix de-a-lungul unei curbe $d\bar{u}^1=0$, iar dacă $\bar{u}^1$ variază, acest punct descrie o curbă dată de o ecuație de forma (IV,113) rezultată din eliminarea lui $\bar{u}^1$ din (IV,124).

f. *Cazul* $M_1 - T$

In acest caz, avem din (IV,96)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}^1 \partial \bar{u}^2}+\bar{u}^1\bar{u}^2\cdot\frac{\partial u}{\partial \bar{u}^1}=0, \qquad \text{(IV,96')}$$

din care deducem

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^2} + \overline{u}^1 \overline{u}^2 \cdot u, \qquad u_{-1} = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^1} \tag{IV,125}$$

$$h = \overline{u}^1 \overline{u}^2, \qquad k = 0. \tag{IV,126}$$

Apoi

$$\frac{\partial u_{-1}}{\partial \overline{u}^2} + \overline{u}^1 \overline{u}^2 \cdot u_{-1} = 0, \tag{IV,127}$$

care arată că suntem în cazul Laplace și care dă

$$u_{-1} = \overline{U}^1 e^{\frac{\overline{u}^1 (\overline{u}^2)^2}{2}},$$

sau

$$u_{-1}^{\alpha} = \overline{U}^{1,\alpha}, \qquad u_{-1}^{3} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2), \tag{IV,128}$$

deoarece $\overline{U}^{1,\alpha} = 0$, u_{-1} fiind un punct fix la infinit pentru $d\overline{u}^1 = 0$.

g. *Cazul* $M_2 - M_2$

Din (IV,98), deducem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} + \frac{1}{\overline{u}^1 + \overline{u}^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \overline{u}^1} + \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^2}\right) = 0 \tag{IV,98'}$$

care dă

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^2} + \frac{1}{\overline{u}^1 + \overline{u}^2} \cdot u; \quad u_{-1} = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^1} + \frac{1}{\overline{u}^1 + \overline{u}^2} \cdot u \tag{IV,129}$$

și

$$h = k = 0, \qquad a = b, \tag{IV,130}$$

care caracterizează acest caz.

Deducem

$$\frac{\partial u_1}{\partial \overline{u}^1} + \frac{1}{\overline{u}^1 + \overline{u}^2} \cdot u_1 = 0 \; ; \quad \frac{\partial u_{-1}}{\partial \overline{u}^2} + \frac{1}{\overline{u}^1 + \overline{u}^2} \cdot u_{-1} = 0 \tag{IV,131}$$

care indică cazul Laplace și de unde deducem

$$u_1 = \frac{\overline{U}^2}{\overline{u}^1 + \overline{u}^2}, \qquad u_{-1} = \frac{\overline{U}^1}{\overline{u}^1 + \overline{u}^2},$$

sau

$$u_1^{\alpha} = \overline{U}^{2,\alpha}, \quad u_{-1}^{\alpha} = \overline{U}^{1,\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{IV,132}$$

ceea ce arată că u_1 este fix de-a-lungul unei curbe $d\overline{u}^2 = 0$, iar u_{-1} pentru $d\overline{u} = 0$.

Ca și în cazurile precedente, deducem locul lui u_1 respectiv u_{-1}.

h. *Cazul* $M_2 - T$

Din (IV,100) deducem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} - \overline{u}^2 \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^1} = 0, \tag{IV,100'}$$

de unde deducem

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^2} - \overline{u}^2 \cdot u, \qquad u_{-1} = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^1} \tag{IV,133}$$

și

$$h = k = b = 0, \tag{IV,134}$$

ceea ce caracterizează acest sistem.

Deducem:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \overline{u}^1} = 0, \qquad \frac{\partial u_{-1}}{\partial \overline{u}^2} - \overline{u}^2 \cdot u_{-1} = 0 \tag{IV,135}$$

$$u_1 = \overline{U}^2, \qquad u_{-1} = \overline{U}_1 e^{\frac{(\overline{u}_2)_1}{2}},$$

sau

$$\begin{aligned} &u_1^\alpha = \overline{U}^{2,\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \\ &u_{-1}^\alpha = \overline{U}^{1,\alpha}, \quad u_{-1}^3 = 0, \ (\alpha = 1, 2). \end{aligned} \tag{IV,136}$$

Locul lui u_1 se deduce ca și în cazurile precedente.

k. *Cazul* $T - T$

Din (IV,102), deducem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{u}^1 \partial \overline{u}^2} = 0 \tag{IV,102'}$$

deci

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^2}, \qquad u_{-1} = \frac{\partial u}{\partial \overline{u}^1} \tag{IV,137}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \overline{u}^1} = 0, \qquad \frac{\partial u_{-1}}{\partial \overline{u}^2} = 0$$

$$u_1 = \overline{U}^2, \qquad u_{-1} = \overline{U}^1$$

$$u_1^\alpha = \overline{U}^{2,\alpha}, \quad u_1^3 = 0; \ u_{-1}^\alpha = \overline{U}^{1,\alpha}, \ u_{-1}^3 = 0 \ (\alpha = 1, 2). \tag{IV,138}$$

i. *Concluziuni*

Din cele precedente reiese că, rețelele M_1 din spațiul bidimensional cu conexiune afină sunt generalizarea rețelelor conjugate, în care

$$h = -a \quad \text{sau} \quad k = -b, \tag{IV,139}$$

rețelele M_2 generalizează pe cele conjugate, în care

$$h = -0,\ k = -\frac{\partial^2 \log a}{\partial \bar{x}^1\, \partial \bar{x}^2} + \frac{\partial a}{\partial \bar{u}^1} \text{ sau } h = -\frac{\partial^2 \log b}{\partial \bar{x}^1\, \partial \bar{u}^2} + \frac{\partial b}{\partial \bar{u}^2},\quad k = 0, \tag{IV,140}$$

rețelele T generalizează pe cele conjugate, în care

$$a = h = 0 \quad \text{sau} \quad b = k = 0 \tag{IV,141}$$

rețelele $M_1 - M_1$ generalizează pe cele conjugate, în care

$$h = -a, \quad k = -b, \tag{IV,142}$$

rețelele $M_1 - M_2$ generalizează pe cele conjugate, în care

$$h = -a,\ k = 0 \quad \text{sau} \quad h = 0,\ k = -b. \tag{IV,143}$$

rețelele $M_1 - T$ generalizează pe cele conjugate, în care

$$h = a,\ k = b = 0 \quad \text{sau} \quad h = a = 0,\ k = b. \tag{IV,144}$$

rețelele $M_2 - M_2$ generalizează pe cele conjugate, în care

$$h = k = 0, \quad a = b. \tag{IV,145}$$

rețelele $M_2 - T$ generalizează pe cele conjugate, în care

$$h = k = a = 0 \quad \text{sau} \quad h = k = b = 0. \tag{IV,146}$$

rețelele $T - T$ generalizează pe cele conjugate, în care

$$h = k = a = b = 0. \tag{IV,147}$$

B. REȚELELE ÎN A_n CU CONEXIUNE AFINĂ

§ 39. Definiții. Să considerăm în A_n o varietate A_2 cu conexiune afină, și pe A_2 două familii de curbe în așa fel, încât cel puțin într'o regiune din A_2 prin fiecare punct M trece câte o singură curbă din fiecare familie. *Dacă de-a lungul curbelor uneia din familii, direcțiile tangente la curbele celeilalte familii sunt înfășurătoare în sensul Acad. Myller în raport cu spațiul ambiant* A_n, *vom spune că cele două familii de curbe constitue o rețea pe* A_2 *în raport cu* A_n; *de sigur, înfășurarea poate degenera în concurență sau paralelism.*

Această definiție nu este simetrică în raport cu cele două familii de curbe; totuși, această simetrie există și va fi pusă în evidență în mod analitic. Ea rezultă, de altfel, din următoarea observație intuitivă: dacă pe A_2 din A_n avem 4 puncte infinit vecine, A, B, C, D, așa că, după ce facem harta afină a acestui contur, dreptele AB și CD sunt incidente, atunci și dreptele AC și BD sunt incidente.

Să considerăm cele două familii de curbe pe A_2, curbe coordonate și fie

$$x^i = x^i(u^1, u^2) \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{IV,148}$$

ecuațiile lui A_2 în A_n.

Pentru a exprima condiția impusă mai sus curbelor pentru a forma rețea, fie

$$\theta_1^i = \rho_1 \frac{\partial x^i}{\partial u^1} \tag{IV,149}$$

și deci, din (I, 20), deducem

$$p_1^{ijk} = \rho_1^2 \begin{vmatrix} \frac{D^2x^i}{du^1\,du^2} & \frac{\partial x^i}{\partial u^1} & \frac{\partial x^i}{\partial u^2} \\ \frac{D^2x^j}{du^1\,du^2} & \frac{\partial x^j}{\partial u^1} & \frac{\partial x^j}{\partial u^2} \\ \frac{D^2x^k}{du^1\,du^2} & \frac{\partial x^k}{\partial u^1} & \frac{\partial x^k}{\partial u^2} \end{vmatrix}. \tag{IV,150}$$

Schimbând rolul celor două familii de curbe, avem

$$\theta_2^i = \rho_2 \frac{\partial x^i}{\partial u^2} \tag{IV,151}$$

$$p_2^{ijk} = \rho_2^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{D^2x^i}{du^1\,du^2} & \frac{\partial x^i}{\partial u^2} & \frac{\partial x^i}{\partial u^1} \\ \frac{D^2x^j}{du^1\,du^2} & \frac{\partial x^j}{\partial u^2} & \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \\ \frac{D^2x^k}{du^1\,du^2} & \frac{\partial x^k}{\partial u^2} & \frac{\partial x^k}{\partial u^1} \end{vmatrix}. \tag{IV,152}$$

Așa dar

$$\frac{p_1^{ijk}}{\rho_1^2} + \frac{p_2^{ijk}}{\rho_2^2} = 0. \tag{IV,153}$$

Se observă că p_1^{ijk} și p_2^{ijk} se anulează deodată, ceea ce arată că definiția rețelelor este simetrică în raport cu cele două familii.

Aceasta constitue generalizarea teoremei cunoscute dela rețelele conjugate pe o suprafață dintr'un spațiu proiectiv, *că, dacă pe o suprafață se află o familie de curbe așa că de-a-lungul lor există o serie de drepte care descriu desfășurabile, atunci există și o a doua familie de astfel de curbe, deci o rețea conjugată.*

Direcțiile curbelor u^1, u^2 *pe* A_2 *pot fi numite, deci, direcții conjugate în sens Myller.*

Considerând ecuațiile înfășurării, ale concurenței, precum și ale paralelismului

$$\begin{aligned} D\xi^i + du^i - \lambda\xi^i\,d\sigma &= 0 \\ D\xi^i + du^i &= 0 \\ D\xi^i &= 0, \end{aligned} \tag{IV,154}$$

în care luăm

$$\xi_1^i = \rho_1 \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \qquad \xi_2^i = \rho_2 \frac{\partial x^i}{\partial u^2}; \qquad \sigma = u^1, \quad \sigma = u^2, \tag{IV,155}$$

avem

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1\,\partial u^2} + \frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \left(\frac{\partial \log \rho_1}{\partial u^1} - \lambda_1\right)\frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial u^1} = 0\\
&\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1\,\partial u^2} + \frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \frac{\partial \log \rho_1}{\partial u^1}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial u^1} = 0\\
&\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1\,\partial u^2} + \frac{\partial \log \rho_1}{\partial u^1}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial u^1} = 0\\
&\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1\,\partial u^2} + \left(\frac{\partial \log \rho_2}{\partial u^2} - \lambda_2\right)\frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \frac{1}{\rho_2}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial u^1}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0\\
&\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1\,\partial u^2} + \frac{\partial \log \rho_2}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \frac{1}{\rho_2}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial u^1}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0\\
&\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1\,\partial u^2} + \frac{\partial \log \rho_2}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial u^1}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0.
\end{aligned} \tag{IV,156}$$

a. *Cazul* $M_1 - M_1$

In acest caz, avem

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1\,\partial u^2} + \frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial u^1} + \left(\frac{\partial \log \rho_1}{\partial u^1} - \lambda_1\right)\frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial u^1}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0\\
&\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1\,\partial u^2} + \left(\frac{\partial \log \rho_2}{\partial u^2} - \lambda_2\right)\frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \frac{1}{\rho_2}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial u^1}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0.
\end{aligned} \tag{IV,157}$$

Scăzând două câte două ecuațiile corespunzătoare din cele două grupuri de mai sus, avem

$$\left(\frac{\partial \log \rho_2}{\partial u^2} - \lambda_2 - \frac{1}{\rho_1}\right)\frac{\partial x^i}{\partial u_1} - \left(\frac{\partial \log \rho_1}{\partial u^1} - \lambda_1 - \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{\partial x^i}{\partial u^2} = 0. \tag{IV,158}$$

Pentrucă varietatea A_2 nu se reduce la o curbă, urmează că coeficienții lui $\frac{\partial x^i}{\partial u^1}$, $\frac{\partial x^i}{\partial u^2}$ sunt nuli, deci ρ_1, ρ_2 verifică sistemul

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \log \rho_1}{\partial u^1} - \frac{1}{\rho_2} = \lambda_1\\
&\frac{\partial \log \rho_2}{\partial u^2} - \frac{1}{\rho_1} = \lambda_2,
\end{aligned} \tag{IV,159}$$

ceea ce se poate admite, deoarece inițial ρ_1 și ρ_2 sunt arbitrari. In acest caz, sistemul (IV, 158) format din $2n$ ecuații diferențiale cu derivate parțiale de

ordinul doi, de tip hiperbolic—care, în general, nu pot fi satisfăcute de n funcții (IV, 148) — se reduce la un sistem de n ecuații

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0, \qquad \text{(IV,160)}$$

unde ρ_1, ρ_2 sunt soluții ale sistemului (IV,159).

In cazul particular în care A_2 — varietatea purtătoare de rețea — ar fi tocmai varietatea coordonată (x^1, x^2), am avea

$$x^i = u^p \, \delta^i_p \quad \begin{matrix} (p = 1, 2) \\ (i = 1, 2, \ldots n). \end{matrix} \qquad \text{(IV,161)}$$

Deoarece aceste valori trebue să verifice (IV,160), deducem

$$\frac{\delta^i_1}{\rho_1} + \frac{\delta^i_2}{\rho_2} + \Gamma^i_{12} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(IV,162)}$$

Dând lui i diverse valori $(i = 1, 2, \ldots, n)$, avem

$$\frac{1}{\rho_1} + \Gamma^1_{12} = 0, \quad \frac{1}{\rho_2} + \Gamma^2_{12} = 0, \quad \Gamma^i_{12} = 0 \quad (i = 3, 4, \ldots, n). \qquad \text{(IV,163)}$$

Deoarece valorile lui ρ_1, ρ_2 trebue să verifice (IV,159), avem

$$\frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u^1} + \lambda_1 \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{12} \Gamma^2_{12} = \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u^2} + \lambda_2 \Gamma^2_{12}, \qquad \text{(IV,164)}$$

care determină pe Γ^1_{12}, Γ^2_{12}.

In cazul particular în care $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, deci u^1, u^2 pot fi considerate ca parametri principali τ_1, τ_2 ai celor două familii de direcții înfășurătoare, ecuațiile (IV, 164) devin (IV, 9) și regăsim — pe A_2 — rețelele înfășurătoare în raport cu conexiunea sa, definite în paragraful 30. Astfel, deși acolo s'a pornit în alt mod pentru definirea rețelelor înfășurătoare, decât pentru cele concurente sau paralele, acum se vede clar că ele își meritau numele, direcțiile lor fiind într'adevăr înfășurătoare în sensul discutat în acest paragraf.

b. *Cazul* $M_1 - M_2$

In acest caz, avem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \left(\frac{\partial \log \rho_1}{\partial u^1} - \lambda_1 \right) \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0. \\ &\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial \log \rho_2}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0. \end{aligned} \qquad \text{(IV,165)}$$

In același mod ca și în cazul precedent, ajungem la ecuațiile

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \log \rho_1}{\partial u^1} - \frac{1}{\rho_2} = \lambda_1 \\ &\frac{\partial \log \rho_2}{\partial u^2} - \frac{1}{\rho_1} = 0. \end{aligned} \qquad \text{(IV,166)}$$

In acest caz, sistemul (IV,165) se reduce la (IV,160) în care ρ_1, ρ_2 sunt dați de (IV,166). In cazul particular în care A_2 — varietatea purtătoare de rețea ar fi tocmai varietatea coordonată (x^1, x^2), refăcând calculele dela cazul $M_1 - M_1$, căpătăm (IV, 163) și, deoarece valorile lui ρ_1, ρ_2 trebue să verifice (IV,166), deducem

$$\frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u^1} + \lambda_1 \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^2}, \qquad \text{(IV,167)}$$

care determină pe Γ_{12}^1, Γ_{12}^2.

In cazul particular în care $\lambda_1 = 1$, deci u^1 poate fi considerat ca parametrul principal τ_1 al respectivei familii de direcții înfășurătoare, ecuațiile (IV,167), devin (IV, 56) și regăsim — pe A_2 — rețelele $M_1 - M_2$ definite în paragraful 33. Astfel, deși acolo s'a pornit în alt mod pentru definirea rețelelor acestora, decât pentru cele concurente sau paralele, acum se vede clar că ele își meritau numele, direcțiile lor fiind într'adevăr înfășurătoare, respectiv concurente în sensul discutat în acest paragraf.

c. *Cazul* M_1 — T.

In acest caz, avem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \left(\frac{\partial \log \rho_1}{\partial u^1} - \lambda_1 \right) \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \Gamma_{jk}^i \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0 \\ &\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial \log \rho_2}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0. \end{aligned} \qquad \text{(IV,168)}$$

In același mod, ca și în primul caz, ajungem la ecuațiile

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \log \rho_1}{\partial u^1} = \lambda_1 \\ &\frac{\partial \log \rho_2}{\partial u^2} - \frac{1}{\rho_1} = 0, \end{aligned} \qquad \text{(IV,169)}$$

care se integrează imediat.

In acest caz, sistemul (IV,168) se reduce la sistemul

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0, \qquad \text{(IV,170)}$$

de n ecuații diferențiale cu derivate parțiale de ordin doi, de tip hiperbolic, unde ρ_1 este o soluție din (IV,169).

In cazul particular în care A_2 ar fi tocmai varietatea coordonată (x^1, x^2), exprimând că (IV,161) verifică (IV,170), avem

$$\frac{\delta_1^i}{\rho_1} + \Gamma_{12}^i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \text{(IV,171)}$$

adică

$$\frac{1}{\rho_1} + \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^i = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n), \qquad \text{(IV,172)}$$

care, dus în (IV, 169), dă

$$\frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u^1} + \lambda_1 \Gamma_{12}^1 = 0, \tag{IV,173}$$

care îl determină pe Γ_{12}^1.

In cazul particular în care $\lambda = 1$, deci u^1 poate fi considerat ca parametrul principal τ, al respectivei familii înfășurătoare, ecuția (IV,173) devine (IV,69′) și regăsim pe A_2, rețelele $M_1 - T$ definite în paragraful 35. Astfel, deși acolo s'a pornit în alt mod pentru definirea rețelelor acestora, acum se vede clar că ele își meritau numele, direcțiile lor fiind într'adevăr înfășurătoare în sensul discutat în acest paragraf.

d. *Cazul* $M_2 - M_2$

In acest caz, avem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \frac{\partial \log \rho_1}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0 \\ &\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial \log \rho_2}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0. \end{aligned} \tag{IV,174}$$

In același mod ca și în cazurile precedente, ajungem la ecuațiile

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \log \rho_1}{\partial u^1} - \frac{1}{\rho_2} = 0 \\ &\frac{\partial \log \rho_2}{\partial u^2} - \frac{1}{\rho_1} = 0. \end{aligned} \tag{IV,175}$$

Notând

$$-\frac{1}{\rho_1} = r_1, \qquad -\frac{1}{\rho_2} = r_2, \tag{IV,176}$$

sistemul (IV, 132) devine

$$\frac{\partial r_1}{\partial u^1} = r_1 r_2 = \frac{\partial r_2}{\partial u^2},$$

adică (IV, 51), afară de notație. Așa dar, ținând seamă de (IV, 55), avem

$$\rho_1 = \rho_2 = u^1 + u^2. \tag{IV,177}$$

Așa dar, (IV, 174) se reduce la

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{1}{u^1 + u^2} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \frac{1}{u^1 + u^2} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0. \tag{IV,178}$$

In cazul particular în care A_2 ar fi tocmai varietatea coordonată (x^1, x^2), am avea (IV, 161); aceste valori, duse în (IV, 178), dau

$$\frac{\delta_1^i + \delta_2^i}{u^1 + u^2} + \Gamma_{12}^i = 0 \tag{IV,179}$$

deci

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{u^1 + u^2}, \quad \Gamma_{12}^i = 0 \quad (i = 3, 4, \ldots n). \tag{IV,180}$$

Or, aceste valori caracterizează rețelele $M_2 - M_2$ definite intrinsec în A_2 în paragraful 32; așa dar, rețelele $M_2 - M_2$ în raport cu A_n, coincid cu cele în raport cu A_2.

In cazul unui spațiu riemannian, putem ajunge la același rezultat, bazându-ne pe faptul că înfășurarea, concurența, precum și paralelismul se mențin în subspații.

e. *Cazul* $M_2 - T$

In acest caz, avem

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1 du^2} + \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \frac{\partial \log \rho_1}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^2} + \Gamma_{jk}^i \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0 \tag{IV,181}$$

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial \log \rho_2}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0.$$

In același mod ca și în celelalte cazuri, avem

$$\frac{\partial \log \rho_1}{\partial u^1} = 0, \quad \frac{\partial \log \rho_2}{\partial u^2} = \frac{1}{\rho^1}, \tag{IV,182}$$

de unde, făcând o schimbare de variabilă,

$$\rho_1 = +\frac{1}{u^2}. \tag{IV,183}$$

Așa dar, (IV, 181) se reduce la

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^1} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0. \tag{IV,184}$$

In cazul în care A_2 este o varietate coordonată (x^1, x^2) din (IV, 161) și (IV, 184) deducem

$$-u^2 \delta_1^i + \Gamma_{12}^i = 0 \tag{IV,185}$$

deci,

$$\Gamma_{12}^1 = u^2, \quad \Gamma_{12}^i = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots n). \tag{IV,186}$$

Ori aceste valori caracterizează rețelele $M_2 - T$, definite intrinsec în A_2 în paragraful 36; așa dar, rețelele $M_2 - T$ în raport cu A_n, coincid cu cele în raport cu A_2. In cazul unui spațiu riemannian, putem ajunge la același rezultat, bazându-ne pe faptul că concurența și paralelismul se mențin în subspații.

f. *In cazul* $T - T$, avem $\rho_1 = u^2$, $\rho_2 = u^1$ și ecuațiile problemei sunt

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^1 \partial u^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \frac{\partial x^k}{\partial u^2} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2 \ldots n). \tag{IV,187}$$

Pentru cazul riemannian, rețelele $M_2 - M_2$ și $M_2 - T$ au fost studiate de Al. Myller [3] [4] și O. Mayer [5] iar $T - T$ de Bianchi [9] [10].

§ 40. Cazul spațiului afin

In acest caz, rețelele de mai sus devin rețele conjugate; putem considera $\Gamma^i_{jk} = 0$ deci sistemele (IV, 160), (IV,170), (IV, 178), (IV, 184) și (IV, 187), ne conduc la ecuații de forma (IV, 105). In cele ce urmează, vom considera spațiul afin parametrizat omogen, introducând o coordonată supranumerară u^{n+1}, care să verifice și ea ecuația respectivă, odată cu u^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

a. *Cazul* $M_1 - M_1$

In acest caz, din (IV, 160) deducem că x^i verifică ecuația

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial x}{\partial u^1} + \frac{1}{\rho_2}\cdot\frac{\partial x}{\partial u^2} = 0 \qquad \text{(IV,160')}$$

cu ρ_1, ρ_2 soluții ale sistemului (IV, 159).

Avem transformatele

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial u^2} + \frac{1}{\rho_1}x, \qquad x_{-1} = \frac{\partial x}{\partial u^1} + \frac{1}{\rho_2}x \qquad \text{(IV,188)}$$

$$h = -\rho_1\lambda_1, \qquad k = -\rho_2\lambda_2. \qquad \text{(IV,189)}$$

b. *Cazul* $M_1 - M_2$

Din (IV,160) deducem că x^i verifică (IV,160') în care ρ_1, ρ_2 sunt soluții ale sistemului (IV,166); așa că, rămân valabile și (IV, 188),

$$h = -\rho_1\lambda_1, \qquad k = 0 \qquad \text{(IV,190)}$$

$$\frac{\partial x_{-1}}{\partial u^2} + \frac{1}{\rho_1}x_{-1} = 0$$

$$x_{-1} = U^1 e^{-\int \frac{du^2}{\rho_1}} \qquad \text{(IV,191)}$$

$$x^\alpha_{-1} = U^{1,\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n+1), \qquad \text{(IV,192)}$$

ceea ce arată că x_{-1} este fix dacă $du^1 = 0$.

c. *Cazul* $M_1 - T$

Din (IV,170) deducem

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial u^1} = 0, \qquad \text{(IV,170')}$$

cu ρ_1 din (IV,169). Avem

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial u^2} + \frac{1}{\rho} x, \qquad x_{-i} = \frac{\partial x}{\partial u^1}$$

$$h = -\frac{1}{\rho_1}, \qquad k = 0$$

$$\frac{\partial x_{-1}}{\partial u^2} + \frac{1}{\rho_1} x_{-1} = 0,$$

din care deducem, ca și mai sus,

$$x^{\alpha}_{-1} = U^{1,\alpha}, \qquad x^{n+1}_{-1} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n), \tag{IV,193}$$

Cazurile $M_2 - M_2$, $M_2 - T$, $T - T$ se tratează identic ca în paragraful 38, punctele g, h, i.

d. *Concluziuni.*

Din cele expuse, reiese că rețelele $M_1 - M_1$ din spațiul cu conexiune afină sunt generalizarea rețelelor conjugate cele mai generale. Rețelele $M_1 - M_2$ generalizează rețelele conjugate cu

$$h = 0 \quad \text{sau} \quad k = 0, \tag{IV,194}$$

iar rețelele $M_1 - T$ generalizează rețelele conjugate cu

$$h = x^{n+1}_1 = 0, \quad \text{sau} \quad k = x^{n+1}_{-1} = 0. \tag{IV,195}$$

Cazurile $M_2 - M_2$, $M_2 - T$, $T - T$, ca în paragraful 38, punctul i.

Institutul de Matematică
al Academiei R. P. R., București

ИЗУЧЕНИЕ ОГИБАЮЩИХ НАПРАВЛЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

I. Пусть A_n-пространство — n-мерное пространство аффинной связности, в котором координатами одной точки будут u^i $(i = 1,2,\ldots,n)$, и пусть в данном пространстве кривая C данная (I,1), где σ — параметр на кривой C.

Рассмотрим через точки кривой C в пространстве A_n, семейство ∞^1 направлений g, данных векторами $\theta^i(\sigma) \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, определенными до произвольного фактора $h(\sigma) \neq 0$. Также обозначим знаком g прямую направления g, исходящую из точки M кривой и находящуюся в n-мерном аффинном пространстве A^M_n, касательном в M к пространству аффинной связности A_n.

Предположим, что это семейство направлений g обладает таким свойством, что при развертывании аффинных пространств в A^M_n на одном из них, иначе говоря, если составить аффинную карту различных реперов, присоединенных к точкам M кривой C, прямые g будут касательными к одной кривой, и это равняется тому что две бесконечно близкие прямые из данного

семейства становятся пересекающимися после развертывания пространства A_n^M. Для этого необходимо и достаточно, чтобы на каждой прямой g, проходящей через точку M кривой C, существовала бы точка M', которая в пространстве развертывания, то есть в карте описывала бы касательную кривую к соответствующей прямой.

Так как в частном случае рассматриваемой проблемы мы находим результаты, полученные Миллером [3], [4], то назовем направления g — *огибающими направлениями в смысле Миллера в пространстве аффинной связности*, коротко говоря назовем их *огибающими направлениями*.

Пусть M' — *главная точка прямой*, на которой она находится, и пусть Γ — *кривая, ассоциированная к семейству рассматриваемых прямых*.

Если в карте координаты точки M суть $\overline{u}^i$, то тогда имеем (I,2). Условие, заданное M', показывает, что необходимо, чтобы существовали функции $\rho(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$, чтобы (I,3) было проверено; дифференцированием (I,2) при помощи обычного дифференциального оператора, в карте, следовательно с оператором абсолютного дифференцирования D в пространстве A_n, из (I,2), (I,3), мы выводим (I,4), являющиеся уравнениями проблемы.

Можно прийти к этим уравнениям еще другим путем, исходя из условия пересечения двух бесконечно близких прямых из рассматриваемого семейства.

Пусть M, M^* — две бесконечно близкие точки кривой C, g, g^* и M, M^* — соответствующие направления и главные точки. Условие проблемы состоит в том, что замкнутый четырехугольник $MM^*M'^*M'M$ в данном случае является треугольником, так как стороны MM' и $M'M'^*$ — коллинейны. Записав (I,5), приходим вновь к (I,4).

Уравнения (I,4) можно записать в виде (I,6) или (I,7). Если в (I,4) производим подстановки (I,8) и рассматриваем (I,9) или (I,10), тогда уравнение (I,4) продолжает существовать. Рассматривая (I,11), можно еще вывести (I,10), показывающее, что τ — инвариантно при замене h и σ.

Если заменить τ, то есть рассматривать $h = 1$, имеем $\rho = \rho_1$ и (I,12), указывающее на ковариантный характер λ.

Если заменять λ, то достаточно рассматривать σ_1, из (I,12), для того чтобы (I,4) существовало.

Если заменять h, то имеем (I,13).

Уравнения (I,7) можно также записать (I,14), где μ, ν даны (I,15). При замене u^i эти уравнения продолжают существовать с $\mu_1 = \mu$, $\nu_1 = \nu$; при замене σ, они существуют также с (I,16). При замене θ^i другой колинейной, (I,14) продолжает существовать с (I,17), (I,18).

В геометрическом смысле, условие, заданное семейству направлений, приводит к тому, что векторы

$$\frac{D\theta^i}{d\sigma}, \quad \theta^i, \quad \frac{du^i}{d\sigma}$$

будут в зависимости, то есть, что плоскость первых двух будет касательной к рассматриваемой кривой C. Эта плоскость находится в A_n^m и установлена только семейством направлений, независимо от выбора h и σ; она образует аффинное обобщение ассоциированного направления в параллелизме Бианки [9], [10] и поэтому может быть названа *ассоциированной плоскостью к семейтсву рассматриваемых направлений*.

Она является неопределенной только если

$$\frac{D\theta^i}{d\sigma} = \mu\,\theta^i ,$$

следовательно, если семейство направлений параллельно в абсолютном смысле по отношению к этой связности A_n.

Следовательно вытекает:

Теорема I. *Для того чтобы семейство направлений, определенных векторами θ^i вдоль кривой C в A_n, было бы огибающим, необходимо и достаточно чтобы*

$$\theta^i, \quad \frac{D\theta^i}{d\sigma}, \quad \frac{du^i}{d\sigma}$$

были соплоскостными.

Это условие, при $n \geqslant 3$, соответствует аннулированию тривектора (I,19), который может быть присоединен ко всякому семейству направлений g.

Можно также рассматривать тривектор (I,20) или (I,21).

При замене координат u^i, имеем (I,22). Этот тривектор p^{ijk} назовем тривектором, ассоциированным к семейству данных направлений, при параметре σ; он становится геометрическим, если θ^i и σ выбраны геометрически.

Условие, заданное семейству направлений, будет удовлетворено, если $n = 1,2$.

Система (I,24), эквивалентная (I,14), приводит к $n-2$ независимым уравнениям, так как (I,14) содержит n уравнений, из которых следует исключить μ и ν.

Если система (I,24) допускает решение $\theta^i(\sigma)$, она допускает и решение $h(\sigma)\,\theta^i(\sigma)$. Ставя еще одно условие, соблюдающее эту однородность, например (I,25), с $\varphi(\sigma)$, произвольно данной функцией, получаем систему $n-1$ независимых уравнений, с n неизвестными $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n$, интегралы которой, имеющие вид

$$\theta^i = h(\sigma)\,\theta^i_1(\sigma),$$

зависят от функции $\varphi(\sigma)$. Так как функция $h(\sigma)$ не существенна, то она может быть фиксирована однородным условием, например $\theta^1 = 1$; выводим, что огибающие семейства вдоль одной кривой находятся в зависимости только от одной произвольной (существенной) функции одной переменной.

В виде (I,6) (I,7) n уравнений проблемы содержат $n+2$ неизвестных функций $\theta^i(\sigma)$, $\rho(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$, потому что u^i известные из (I,1).

Из этих уравнений выводим те же результаты как выше.

Для λ берем произвольную (несущественную) функцию, произвольность которой не изменяет результатов, (так как при изменении λ, сопровождающегося изменением σ, данным (I,12), уравнения (I,4) продолжают существовать) и для $\rho(\sigma)$ произвольную (существенную) функцию одной переменной; при таких условиях система определяет $\theta^i(\sigma)$ при помощи n произвольных постоянных θ^i_0, определяющих первоначальное направление семейства.

Констатируем, что все кривые автоогибающие.

Касательные направления к кривой C, образуют семейство направлений, банально проверяющих условия огибания, так как для него имеется

$$p^{ijk} = 0 \left(\theta^i = \frac{du^i}{d\sigma},\ \rho = 0,\ \lambda = 1 \right).$$

Исключая этот случай, можно геометрически фиксировать вектор θ^i, считая его равным главному вектору.

В этом случае мы имеем $\rho = 1$, следовательно (I,4) можно записать (I,26), не являющимся более однородным и содержащим лишь одну произвольную (существенную) функцию.

Можно сделать вывод, что семейство направлений, проверяющих условия, заданные данной проблемой, может быть характеризовано возможностью определения своих направлений семейством векторов ξ^i, проверяющих систему (26); тогда ξ^i будет главным вектором семейства.

В виде (I,26), при известном ξ^i, имеем систему n уравнений с $n+1$ неизвестными функциями $u^i(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$; если положим $\lambda(\sigma)$ произвольной, что производит лишь изменение параметра σ на C, то система (I,26) даст $u^i(\sigma)$, следовательно C, при помощи n произвольных постоянных $u^i(\sigma_0)$, определяющих положение точки кривой C.

Констатируем, что (I,26) и $d\tau$ инвариантны, при изменении σ, или u^i.

Рассматривая огибающее семейство можно пользоваться h и σ таким образом, что (I,4) или (I,14), которые оно проверяет, принимают более простой вид. Для фиксирования h геометрически, полагаем $\xi^i = \theta^i$. Из (I,10) выводим, что если $\lambda \neq 0$ (следовательно направления не являются пересекающимися, что будет обсуждаться в следующем параграфе) ($d\bar{u}^i \neq 0$) с $\rho = 1$, имеем (I,28), то есть, что был определен до аддитивно-постоянной параметр τ, геометрический, семейства огибающих направлений. Он является инвариантным к изменению h,σ и u^i.

Если рассматривать $\sigma = \tau$, следовательно $\lambda = 1$, уравнения (I,4) запишем (I,29). Здесь $\xi^i = \theta^i$, следовательно $\rho = 1$, следовательно (I,28); вообще с любой θ^i, имеем (I,30) из-за (I,10), (I,15).

Можно записать (I,19) при помощи произвольного параметра σ вместо τ, но из (I,30) видно, что это приводит к $\rho = \lambda$, следовательно к фиксированию произвольной функции $\rho(\sigma)$; таким путем параметру $\tau = \sigma$ будет соответствовать лишь ∞^n огибающее семейство, данное (I,29), одно из которых определено первоначальным главным вектором ξ^i_0 (или, иначе говоря, первоначальным направлением и соответствующей главной точкой).

Если параметр геометрически фиксирован на кривой, присоединенные к нему огибающие семейства принимают геометрическое значение для самой кривой и могут быть использованы для построения ее инвариантов.

Другим способом для фиксирования h является рассмотрение (I,31). Этот выбор является инвариантным при изменениях координат, но не при изменениях параметра σ; это значит взять $\lambda = 1$ в (I,3).

Обозначая r соотвствующее значение ρ ($\xi^i = \rho\, \bar{u}^i$), имеем (I,32), (I,33).

Следовательно τ — параметр, при помощи которого ассоциированный вектор ξ^i выражен (I,33); назовем параметр τ ***главным параметром рассматриваемого семейства огибающих направлений.***

Уравнения (I,29) переходят в (I,34). Можно допустить упрощение уравнений посредством изменения параметра, который сохранит их форму; если σ_0 искомый параметр, то имеем (I,35) из (I,34).

Можно определить σ_0 таким образом, что скобка второго члена (I,35) примет данное значение $-d\log f(\tau)$, следовательно (I,36), дающее (I,37); если $f(\tau)=1$, имеем (I,38). Если τ является инвариантным для семейства огибающих направлений, то тогда то же самое происходит с σ_0; σ_0 есть *нормальный параметр семейства огибающих направлений* и $\frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0}$ — соответствующий *нормализованный* вектор.

Если $c=1$, $c'=0$, уравнения проблемы суть (I,39). Между главным вектором и нормализованным вектором, имеем соотношение (I,40), следовательно (I,39) эквивалентно (I,41), которое приводит помимо этого к (I,29).

Из (I,32) выводим, что значение r_0 из r, соответствующее параметру σ_0, данное (I,42), следовательно оно определено в функции τ до постоянного фактора пропорциональности и в функции σ до аддитивной постоянной.

Условие, заданное семейству рассматриваемых направлений, исходящее из точек M кривой C, находясь в A_n, следующее: оно допускает огибающую кривую Γ после произведения развертывания многообразий A_n^M, касательных в M к A_n.

В конфигурации, образованной аффинным планом различных реперов, присоединенных к точкам M, данные направления g порождают развертывающуюся поверхность. Нормализация означает, что на каждой прямой g мы выбираем точку P, задавая нормализованному вектору $\overrightarrow{MP}$ условие, чтобы его абсолютное развитие было параллельно касательной к кривой C в M; как уже было констатировано, нормальный параметр это параметр σ_0, приводящий MP в вид $\frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0}$ в то время, как главный параметр приводит MM' в вид $\frac{d\bar{u}^i}{d\tau}$.

Если $n=2$, то, так как условия изгиба проверены для всякого семейства направлений, вытекает:

Теорема II. *В двумерном пространстве аффинной связности к всякому семейству направлений инвариантным образом можно присоединить главный параметр τ, следовательно также нормальный σ_0.*

Из (I,14) имеем (I,43).

Таким же способом как (I,14) привели к присоединению к семейству направлений g тривектора (I,19), (I,20), теперь (I,39), (I,41) приводят к присоединению к семейству векторов θ^i бивектор (I,44), (I,45) или (I,46).

Из (I,39) заключаем, что если

$$\theta^i=\frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0},$$

(I,44), (I,45) — нулевые; обратно, аннулирование этого бивектора показывает, что рассматриваемое семейство — огибающее, причем нормальный параметр является σ_0, (I,48) и θ^i — нормализированные векторы.

Если огибающая кривая Γ сводится к точке, тогда прямые g огибают эту точку, после совершения аффинного плана реперов, присоединенных к точке M; так как точка M неподвижна, то следует, что в (I,2), $\bar{u}^i$ — постоянные.

Ввиду того что для римановых пространств проблема была изучена Миллером [3], [4] — эти направления были названы — *пересекающимися направлениями в смысле Миллера, в пространстве аффинной связности или сокращенно — пересекающимися направлениями.*

В таком случае имеем $d\bar{u}^i = 0$, то есть из (I,2) выводим (I,4′), являющиеся уравнениями заданной проблемы. В таком случае можно также фиксировать h, рассматривая $\xi^i = \theta^i$, $\rho = 1$, таким образом, что (I,4′) станет

$$D\,\xi^i + d\bar{u}^i = 0.$$

Эти уравнения соответствуют $\lambda = 0$ в (I,4); имеем (I,15′), происходящее из (I,14); это соотношение получается из (I,15), с $\lambda = 0$, исключая ρ между двумя соотношениями.

Если применить второй метод, намеченный для случая огибания, то, необходимым условием такого случая к семейству направлений будет (I,5′), показывающее, что точки M' и M'^* совпадают. Из этого соотношения выводим (I,4′); эти уравнения можно записать (I,6′), (I,7′). При этом случае можно также фиксировать h, рассматривая $\xi^i = \theta^i$; в этом случае, $\rho = 1$ и (I,4′) становится

$$D_2\,\xi^i = D\,\xi^i + du^i = 0.$$

Этим видом выражена система n линейных уравнений с n неизвестными функциями ξ^i, следовательно решения зависят от n произвольных постоянных ξ^i_0, определяющих первоначальный главный вектор, или иначе говоря, последовательность пересекаемых направлений будет установлена тотчас же после нахождения направления первоначального вектора и соответственной главной точки.

Выводим те же заключения из (I,4′), но тогда произвольная функция $\rho(\sigma)$ должна быть известна. Если брать вместо ρ ту или другую функцию, то это не изменит направления векторов θ^i, а только их величину.

Обратно, если θ^i или $\xi^i(\sigma)$ (I,4′) или (I,6′) известны, следовательно $u^i(\sigma)$ при произвольном $\rho(\sigma)$.

Рассматривая в этих условиях (I,49), имеем (I,50), который посредством (I,51) становится (I,50′). Следовательно:

Теорема III. *В пространстве аффинной связности автопересекающиеся и автопараллельные кривые совпадают.*

При посредстве (I,44) присоединяем к какому-либо семейству векторов θ^i бивектор r^{ij}; вместо r^{ij} можем рассматривать бивектор p^{ij} (I,45). Отмечаем, что если векторы θ^i являются главными векторами пересекающихся направлений, то бивектор p^{ij} — нулевой; обратно, если p^{ij} нулевой, выводим

$$D_3\,\xi^i + du^i = 0,$$

показывающее что θ^i суть векторы семейства пересекающихся направлений. Бивектор p^{ij} — ковариантный относительно σ (I,23′) и при изменении u^i, имеем (I,22′).

Можно также рассматривать в таком случае, в карте, кривую Δ, данную (I,2′), при условии что касательные этой кривой в точках $M''(\sigma)$ и

$g(\sigma)$ будут соответственно параллельны для тех же значений σ, после развертывания, следовательно имеем (I,3′).

Пересекающиеся прямые g представляют образ многообразия касательных кривой Δ; *эта кривая виртуально ассоциирована в семействе пересекающихся направлений*, так как ассоциированная кривая Γ этого же семейства сводится к точке координат $\overline{u}^i$.

Так как ξ^i и $d\overline{v}^i$ — инвариантны к изменению h и σ, имеем (I,11′), следовательно определяем $d\tau$, являющееся инвариантным при изменении σ и h.

Таким образом мы имеем также в случае пересечения *инвариантный главный параметр, присоединенный к семейству рассматриваемых пересекающихся направлений и также к кривой* Δ; τ вариирует с Δ.

Таким же способом, как и в случае огибающих направлений, выводим (I,32) и (I,33′). Следовательно τ позволяет также в этом случае выразить ξ^i в виде (I,33′). Уравнения проблемы становятся (II,34′). Производя изменения параметра и ставя условие (I,36′), получаем (I,37′). Если $f(\tau) = 1$, тогда имеем (I,38′). σ_0 — нормальный параметр относительно к Δ — семейство пересекающихся направлений.

Если $c' = 0$, $c = 1$ то σ_0 и τ идентичны и $r_0 \quad 1$.

Условие, заданное семейству рассматриваемых направлений, исходящих из точек M кривой C, находящихся в A_n^M такое, что оно допускает точку пересечения — после развертывания аффинных многообразий A_n^M касательных к A_n в точках M — на одной из них. Следовательно, в образовавшейся карте посредством различных реперов, присоединенных к точкам M, рассматриваемые направления g порождают конус.

Случай параллельных направлений в смысле Т. Леви-Чивита в пространстве аффинной связности может быть найден как частный случай пересекающихся направлений, если точка пересечения находится в бесконечности, следовательно $\rho = \infty$, $d\rho = 0$.

Как известно, в таком случае условия, заданные данному семейству направлений такие, что они будут параллельными после совершения карты различных многообразий A_n^M.

Следовательно, в этой карте — данные направления g — порождают цилиндр.

★

Пусть к всякой точке M пространства аффинной связности A_n присоединяем определенную точку M' координат ξ^i по отношению к натуральному реперу (R) относительно M; следовательно имеем поле точек и ищем элементарное перемещение M' при переходе M к M^*.

Согласно Картану выражение

$$D_2 \xi^i = D\xi^i + du^i$$

определяет абсолютный дифференциал поля точек. Принимая во внимание это понятие, можно вновь рассмотреть проблему огибающих направлений, пересекающихся или параллельных.

Условие в силу которого направление $\overrightarrow{MM'}$ огибает кривую Γ, в карте, может быть формулировано, с тем чтобы точка M' координат $\xi^i = \rho\theta^i$ по отношению к (R), описала кривую Γ, следовательно, чтобы ее

absolutnym дифференциалом был $d\bar{u}^i$, следовательно, имеем (I,52), представляющее лишь уравнения огибания, если принимать во внимание (I,2), (I,3), следовательно, уравнения огибания выражают, что M', точка контакта прямой g с Г, описывает Г в своем абсолютном перемещении, — в карте.

Если необходимо, чтобы M' была неподвижной, следовательно, чтобы абсолютный дифференциал ξ^i был всегда нулевым, тогда имеем уравнения пересекающихся направлений в A_n.

Если ρ бесконечно, то уравнения проблемы дают

$$D\xi^i = 0,$$

что означает, что точка M' в бесконечности направления g неподвижна относительно своего абсолютного перемещения, следовательно что ξ^i перемещается параллельно.

★

Положим, что в всякой точке M из A_n присоединяем точку M' аффинных координат ξ^i, относительно натурального репера (R) присоединенного к M.

Условие голономии при перемещении направлений посредством огибания выражается условием, по которому направление MM' после того что M описывает цикл $MM_1M_3M_2M$ возвращается в карте в само себя; иначе говоря, надо, чтобы M_1 вернулось в положение M'' на прямой MM'.

Если $d, \bar{d}$ являются элементарными перемещениями на дугах MM_1 соответственно MM_2, то следует, что при таких перемещениях точка M' имеет абсолютное перемещение, данное (I,53), (I,54).

Перемещение M' вдоль контуров $MM_1M_3MM_2M_3$ дает развертыванием точки M_3', $\bar{M}_3'$, которые, если отнести к реперу (R) точки M, имеют координаты, данные (I,55).

Так как перемещение M_3' вследствие перемещения M вдоль цикла в этом случае пропорционально к ξ^i, имеем (I,56) или (I,57), (I,58). Эти уравнения приводят к (I,60) и через (I,65) к (I,67). Следовательно, при невырожденном огибании не существует никакого пространства с голономным перемещением.

Для случая пересекающихся направлений голономное премещение существует лишь при аффинных пространствах.

При параллельных направлениях известно уравнение $R^i_{krs} = o$.

★

Если рассматривать метрическое V_n, в котором имеется квадратичная дифференциальная форма (I,68), то все результаты, полученные для пространства аффинной связности, действительны, так как V_n можно рассматривать как таковое пространство.

В V_n существует возможность *a priori* фиксировать h геометрически, полагая θ_i единичным; в таком случае r значение ρ, будет длиной главного вектора ξ^i, следовательно — инвариантно.

Уравнения проблемы суть (I,69), и все выводы о множестве решений в A_n будут действительными.

При V_n плоскость, ассоциированная к огибающему семейству, может быть замещена содержащим его направлением, ортогональным к направлению θ^i; это направление является именно направлением Бианки (I,73).

Пусть V_n, погруженное в V_{n+1}; можно определить как линии кривизны V_n относительно V_{n+1} кривые, при которых нормали к V_n вдоль них будут огибающими направлениями в смысле Миллера.

Если рассматривать пересекающиеся направления, то имеем (I,72′).

Рассматривая A_3 с связностью, данной (I,75), вдоль кривой C, данной $du^1 = du^3 = o$, $du^2 = d\sigma$, уравнениями огибания будут (I,76) и решения примут вид (I,77), с $\varphi(\sigma)$ произвольной.

Если рассматривать трехмерное метрическое многообразие, тотальной кривизны 1, то имеем метрику (I,78); отмечаем, что она в точности допускает связность (I,75), следовательно имеем (I,79).

Если рассматривать пересекающиеся направления, то имеем (I,76′), (I,77′).

II. Пусть в римановом пространстве S_n зависящее многообразие m размеров $(1 < m < n)$; пусть C кривая V_m и g — семейство направлений, проходящее через точки C и принадлежащее V_m; *спрашивается в каком случае эти направления будут огибающими относительно многообразия V_m.*

Устанавливается:

Теорема IV. *Если направления g, данные векторами θ^i, являются огибающими относительно вмещающего пространства S_n, то они являются также огибающими относительно подчиненного многообразия V_m; если рассматривать огибание относительно S_n или V_m, то это будут те же главные векторы, тот же главный параметр, тот же нормальный параметр, те же нормализованные векторы.*

Для доказательства теоремы используем (II,19) или (II,19′), или (II,19″). Таким же образом (II,20), (II,20′) доказывается:

Теорема V. *Если направления g даны векторами θ^i и суть пересекающиеся относительно вмещающего пространства S_n, то они будут также пересекающимися относительно вмещающего многообразия V_m; если рассматривать пересечение относительно S_n или V_m, то это будут те же главные векторы, тот же нормльный параметр, те же нормализованные векторы.*

Если огибание выражает в параллелизм, то имеем (II,22), (II,22″), откуда выводим теорему, аналогичную теореме Бианки.

Во всех этих теоремах рассматриваем несингулярное V_m; случай с сингулярным V_m требует специального изучения.

Рассматривая тривектор p^{ijk}, введенный в § I, устанавливаем (II,30), (II,30′), откуда выводим теоремы IV и V.

Рассматривая бивектор $\bar{p}^{ij}$, введенный в § 2, устанавливаем (II,31), (II,31′), откуда выводим теорему IV.

Рассматривая бивектор p^{ij}, введенный в § 3, устанавливаем (II,32), (II,32′), откуда выводим теорему V.

★

Пусть C — произвольная кривая в S_n, через точки которой проходит семейство ∞^1 направлений g, касательных к S_n; эти направления даны векторами θ^i. Если эти направления огибающие, то можно определить $\rho(\sigma)$

и $\lambda(\sigma)$ таким образом, что выражения (II,33) будут нулевыми, что обозначает что и r^{ijk}, p^{ijk} (I,19), (I,20) будут нулевыми.

Если эти направления не являются огибающими, то нельзя определить функции $\rho(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$ таким образом, чтобы Ω_1^i были все нулевыми; если фиксировать геометрически ρ и λ, например так чтобы $\lambda = 1$ и $\rho\theta^i = \xi^i$ было единично или, другим способом, так, чтобы ξ^i было вектором, имеющим свое начало в точке M кривой C и край в точке, описывающей линию сужения поверхности, порождаемой и упорядоченной прямыми g в карте, причем соответствующий вектор Ω_1^i определяет в каждой точке C — при каждом способе геометрического фиксирования λ и ρ — единичный вектор η_1^i колинейный к Ω_1^i и данный (II,34); R_1 дано (II,35); он является инвариантным относительно кривой C и к сеиейству векторов θ^i

★

Направление η_1^i векторное направление, ассоциированное посредством огибания семейства направлений g вдоль кривой C относительно способа геометрического фиксирования векторов ξ^i, и количество

$$r_1 = \frac{1}{R_1}$$

векторная кривизна огибания семсйства направлений g вдоль кривой C относительно способа геометрического фиксирования векторов ξ^i. R_1 — радиус соответственной кривизны.

При помощи этого понятия устанавливаем теорему:

Теорема VI. *Когда через точки кривой C в зависимом многообразии V_m проходят направления g, то необходимым и достаточным условием для огибания направлений g в V_m, является возможность определения векторов ξ^i на направлениях g, таким способом, чтобы векторные η_1^i, ассоциированные направления огибания в ξ^i относительно вмещающего пространства, были бы нормальны в V_m вдоль кривой C.*

Условия этой теоремы могут быть выражены теоремой:

Теорема VII. *Когда через точки кривой C в зависимом многообразии V_m проходят направления g, то необходимым и достаточным условием для огибания направлений g в V_m является возможность геометрического определения векторов ξ^i на направлениях g, таким способом, чтобы евклидово пространство T_3, опрвделяемое векторами $D\xi^i, \xi^i, dx^i$, пересекало бы евклидово пространство T_{n-m} нормальное к V_m, по крайней мере вдоль одной прямой, следовательно, чтобы T_3 содержало по меньшей мере одну нормаль в V_m.*

Эта теорема доказывается посредством (II,40), (II,41), (II,42), (II,43). Когда S_n езклидово и V_m риманово, то выводим (I,44), следовательно (II,45), значит (II,46), где N_P^i суть $n-m$ векторы независимые нормальные в V_m, и суммируется относительно p.

Следовательно $\frac{dx^i}{d\tau}$, касательная к присоединенной кривой $\bar{x}^i = \bar{x}^i(\tau)$, находится в евклидовом пространстве S_{n-m+1}, соединяющее прямую MM_1 с пространством S_{n-m}, нормальным к V_m в M. Доказывается и обратно

посредством (II,48), (II,49), что если условие удовлетворительно, то направления суть огибающие. Поэтому также имеем теорему:

Теорема VIII. *Когда через точки кривой C в многообразии V_m, погруженном в евклидоеом пространстве E_n, проходят направления g, то необходимым и достаточным условием для огибания направлений g в V_m является возможность определения на каждой прямой g одной присоединенной точки M, таким способом, чтобы всякая касательная τ_1 к кривой C_1 места точек M_1 была бы в евклидовом $n-m+1$-мерном пространстве, являющимся соединением $n-m$-мерного евклидова пространства, нормальным к V_m и прямой g, не принадлежащей нормальному пространству.*

★

Таким же способом как вывели из (II,33) *понятие о векторном направлении, ассоциированном посредством огибания, выводим из (I,46) понятие о векторном направлении, ассоциированном посредством огибания нормилизированным способом семества направлений g вдоль кривой C, относительно способа геометрического фиксирования векторов ξ^i; количество*

$$\bar{r}_2 = \frac{1}{\bar{R}_2}$$

является соответствующей векторной кривой.

Посредством этого понятия устанавливаем теорему:

Теорема IX. *Когда через точки кривой C в зависящем многообразии V_m проходят направления g, то необходимым и достаточным условием для огибания направления g в V_m является возможность определить векторы ξ^i на направлениях g и одном параметре σ, таким способом, чтобы векторные направления $\bar{\eta}_2^i$, ассоциированные к ξ^i нормализованным способом, огибанием относительно вмещающего пространства были бы ортогональны к V_m, вдоль кривой C.*

В этом случае ξ^i суть нормализованные векторы и σ нормальный параметр семейства огибающих направлений.

Эта теорема может также быть выражена теоремой:

Теорема X. *Когда через точки кривой C в зависящем многообразии V_m проходят направления g, то необходимым и достаточным условием для огибания направлений g в S_n является возможность геометрического определения векторов ξ^i на направления g, и одном параметре σ, таким способом, чтобы плоскость T_2, определенная посредством векторов $D\xi^i$ и dx^i пересекала евклидово пространство T_{n-m} ортогонально к V_m по крайней мере вдоль одной прямой, имеющей переменное направление в плоскости T_2, следовательно чтобы плоскость T_2 содержала по меньшей мере одну нормаль к V_m, имеющую переменное направление в T_2. В этом случае ξ^i суть нормализованные векторы и σ есть нормальный параметр семейства огибающих направлений.*

★

Таким же способом как в предыдущем выводим из (II,51) *понятие об ассоциированном векторном направлении посредством пересечения се-*

мейства направлений g вдоль кривой C — относительно способа геометрического фиксирования векторов ξ^i; количество

$$r_2 = \frac{1}{R_2}$$

является соответственной векторной кривизной.

Посредством этого понятия устанавливаем теорему:

Теорема XI. *Когда через точки кривой C в зависящем многообразии V_m проходят направления g, то необходимым и достаточным условием для пересечения направлений g в V_m является возможность геометрического определения векторов ξ^i на направлениях g таким способом, чтобы векторные направления η_2^i, ассоциированные посредством пересечения к ξ^i относительно вмещающего пространства, были ортогональны к V_m вдоль C.*

Условия этой теоремы могут быть выражены также теоремой:

Теорема XII. *Когда через точки кривой C в зависящем многообразии V_m проходят направления g, то необходимым и достаточным условием для пересечения направлений g и V_m является возможность геометрического определения векторов ξ^i на направлениях g, таким способом, чтобы плоскость T_2, определяемая векторами $D\xi^i$ и dx^i, пересекала бы евклидово пространство T_{n-m}, нормальное к V_m, по крайней мере вдоль одной прямой, которая имела бы неизменное направление в плоскости T_2, следовательно чтобы плоскость T_2 содержала бы по меньшей мере одну нормаль к V_m, которая имела бы неизмененное направление в T_2.*

Когда S_n евклидово, то из (II,60), (II,61) выводим (II,62), которое показывает, что $\frac{d\bar{x}^i}{dt}$, касательное к зависящей кривой, находится в евклидовом пространстве S_{n-m}, нормально к V_m, в точке M. Посредством (II,63), (II,64), (II,65) доказывают обратное; поэтому имеем теорему:

Теорема XIII. *Когда через точки кривой C в многообразии V_m, погруженном в евклидовом пространстве E_n, проходят направления g, то необходимым и достаточным условием для пересечения направлений g в V_m является возможность определить на каждой прямой g одну вспомогательную точку M_1, таким способом, чтобы любая касательная t_1 к кривой C_1, места точек M_1, находилась в евклидовом пространстве с $m-n$ измерениями нормально к V_n.*

★

Таким же способом, как в предыдущем, исходя из ρ^{ijk}, получаем (II,70), (II,71), значит понятие о трехвекторном направлении, ассоциированном посредством огибания с семейством направлений g вдоль кривой C, и количество $t_1 = \frac{1}{T_1}$ — соответственная кривизна. При помощи этого понятия устанавливаем теорему:

Теорема XIV. *Когда через точки кривой C в зависящем многообразии V_m проходят направления g, то необходимым и достаточ-*

ным условием для огибания направлений g в V_m будет, чтобы трехвекторные направления ω^{ijk}, ассоциированные посредством огибания направлений g относительно вмещающего пространства, были бы нормальны ко всем тривекторным направлениям, касательным к V_m вдоль кривой C.

Из $\bar{p}^{ijk}$ вводим также *понятие о бивекторном направлении ассоциированном нормализованным способом с семейством векторов g вдоль кривой C*, и количество $\bar{t}_2 = \frac{1}{T_2}$ (II,75) — соответствующая кривизна.

При помощи этого понятия устанавливаем теорему:

Теорема XV. *Когда через точки кривой C в зависящем многообразии V_m проходят направления g, то необходимым и достаточным условием для огибания этих направлений будет возможность определения векторов ξ^i на направлениях g, а также одного параметра σ таким способом, чтобы бивекторные направления, ассоциированные нормализованным способом $\bar{\omega}^{ij}$ с векторами ξ^i относительно вмещающего пространства, были бы нормальные ко всем бивекторным направлениям касательным к V_m, вдоль кривой C.*

Исходя из p^{ij}, вводим также, понятие о бивекторном направлении, ассоциированном посредством пересечения с семейством векторов ξ^i вдоль кривой C, и количество t_2 $\frac{1}{T_2}$ — соответственная кривизна.

Подобно вышеуказанному доказываем теорему:

Теорема XVI. *Когда точки кривой C в зависящем многообразии V_m проходят направления g, то необходимым и достаточным условием для пересечения этих направлений будет возможность определения векторов ξ^i на направлениях g таким способом, чтобы бивекторные направления ω^{ij}, ассоциированные с векторами ξ^i относительно вмещающего пространства, были бы нормальны ко всем бивекторным направлениям, касательным к V_m вдоль кривой C.*

★

Рассматривая два метрических многообразия V_m, $V_{m^*}^*$ с соответственными размерами m и m^*, касательными вдоль кривой C, доказываем теоремы:

Теорема XVII. *Для двух многообразий V_m и $V_{m^*}^*$, касательных вдоль кривой C, огибание будет таким же вдоль этой кривой: главные векторы, главные параметры, нормальные параметры, нормализованные параметры, нормализованные векторы и тривекторы, ассоциированные огибанием, векторы и бивекторы ассоциированные нормализованным способом посредством огибания, и соответственные кривизны будут тоже тождественны.*

Теорема XVIII. *Для двух многообразий V_m, $V_{m^*}^*$, касательных вдоль кривой C, пересечение будет таким же вдоль этой кривой: главные векторы, нормализованные параметры, бивекторы, ассоцииро-*

ванные посредством пересечения, и соответственные кривизны суть также тождественны.

★

В §§ 24 — 25 исходим из условий, установленных в теоремах VIII и XIII, чтобы семейство направлений было огибающим, соответственно пересекающимся, и ими пользуются для внешнего определения таких семейств.

Рассматривая (II,88) — (II,91), мы видим, что, условия выражены посредством (II,92), (II,95), (II,98) или (II,100) откуда выводим (I,6).

★

III. В главе III изучаем нормализованные векторы и главные векторы с метрической точки зрения. Рассматриваем два семейства направлений вдоль кривой C: каждое из них может быть огибающим (M_1), пересекающим (M_2) или параллельным (T), следовательно имеется шесть случаев $M_1 — M_1$, $M_2 — M_2$, $T — T$, $M_1 — M_2$, $M_1 — T$, $M_2 — T$.

Изучаем также различные формы для выражений различных кривизн. Отсюда выводим теоремы:

Теорема XIX. *Если рассматривать семейство векторов ξ^i вдоль кривой C многообразия V_m, зависящего от риманова пространства S_n, когда направления, ассоциированные их огибанием относительно V_m, суть ортогональные к самим векторам ξ^i, то же самое происходит с направлениями, ассоциированными огибанием векторов ξ^i относительно S_n и взаимно.*

Теорема XX. *Если рассматривать семейство векторов ξ^i вдоль кривой C многообразия V_m, зависящего от риманова пространства S_n, когда направления, ассоциированные своим пересечением относительно V_m, суть ортогональны к самим векторам ξ^i, то же самое происходит с направлениями, ассоциированными пересечением векторов ξ^i относительно S_n и взаимно.*

Теорема XXI. *Если рассматривать семейство векторов ξ^i вдоль кривой C многообразия V_m, зависящего от риманова пространства S_n, когда направления, ассоциированные своим параллелизмом относительно V_m, суть ортогональны к самим векторам ξ^i, то же самое происходит с направлениями ассоциированными посредством пересечения векторов ξ^i относительно S_n и взаимно.*

Рассматривая (III,65) — (III,67) получаем теорему:

Теорема XXII. *Если рассматривать произвольное семейство векторов ξ^i вдоль кривой C многообразия V_m, взяв от точки M на C на направлении η_2^i расстояние r_2 до P, на направлении ξ^i расстояние r до Q, то сторона PQ треугольника MPQ имеет точно длину r_1.*

Из (III,73) выводим результаты:

Если рассматривать произвольное семейство векторов ξ^i вдоль кривой C многообразия V_m, когда берем от точки M на C на направлении η_3^i в отрицательном смысле расстояние r_3 до Q и на направлении касательной к C в M расстояние $\frac{ds}{d\tau}$ до P, то сторона PQ треугольника PMQ имеет точно длину r_2.

Если рассматривать огибающее семейство векторов ξ^i вдоль кривой C от V_m, когда берем от точки M на C на направлении u^i расстояние $\frac{ds}{d\tau}$ до P на направлении ξ^i расстояние r до M', то сторона PM' треугольника MPM' имеет точно длину r_3.

Если рассматривать параллельное семейство векторов ξ^i вдоль кривой C многообразия V_m, взяв, начиная с точки M кривой C, на направлении ξ^i длину r до P на направлении, касательном к C расстояние $\frac{ds}{d\tau}$ до Q, то сторона PQ треугольника MPQ имеет точно длину r_1.

Отмечают что:

Кривизна огибания семейства пересекающихся направлений имеет тоже выражение как кривизна пересечения семейства огибающих направлений.

Кривизна пересечения семейства параллельных направлений имеет такое же выражение как кривизна параллелизма семейства пересекающих направлений.

Кривизна параллелизма семейства огибающих направлений имеет такое же выражение как кривизна огибания семейства параллельных направлений.

★

Посредством (III,97), (III,108) выводим (III,109), значит выражение $d\tau$ — посредством ds в метрическом V_2.

IV. В главе IV изучаются различные сети в A_2 или в A_n.

Огибающая сеть Миллера ($M_1 - M_1$) есть сеть одного A_2, для которого τ_1 и τ_2, главные параметры двух семейств касательных к двум семействам координированных кривых, суть функции от u^1 соответственно u^2, следовательно для которых τ_1, τ_2 можно рассматривать как параметры u^1, u^2 сети. Условия даны (IV,9) или (V,14).

Пересекающаяся сеть Миллера ($M_2 - M_2$) это сеть одного A_2, для которого касательные к одному из двух семейств координированных кривых суть пересекающиеся в смысле Миллера вдоль другой и взамно. Условия даны посредством (IV,51) или (IV,55).

Сеть $M_1 - M_2$ это сеть комбинации из двух предыдущих случаев. Условия даны посредством (IV,56) или (IV,60).

Сеть $M_1 - T$, это сеть комбинации из случая огибания и случая параллелизма; условия даны посредством (IV,70).

Сеть $M_2 - T$ это сеть комбинации из случая пересечения и случая параллелизма; условия даны посредством (V,78).

Отыскание сетей различных типов на A_2 производятся посредством систем уравнений (IV,82), (IV,86), (IV,88), (IV,91), (IV,94), (IV,96), (IV,98), (IV,100), (IV,101); они гиперболического типа и допускают в окрестностях одной точки одно единственное решение, удовлетворяющее условиям (IV,103), (IV,104), что геометрически означает, что в A_2 симметричной аффинной связности имеется одна единственная сеть, проходящая

через две произвольные кривые, из которых каждая принадлежит одному семейству кривых сети.

Доказываем, что огибающие сети Миллера в A_2 суть обобщения сопряженных сетей аффинной плоскости.

★

Рассмотрим одно A_2 в A_n аффинной связности и на A_2 два семейства кривых таким способом, чтобы по крайней мере в одной окрестности A_2, через каждую точку M проходила одна из кривых каждого семейства.

Когда вдоль кривых одного из семейств, направления, касательные к кривым другого семейства, суть огибающие в смысле Миллера относительно вмещающего пространства A_n, говорим что оба семейства кривых образуют сеть на A_2 относительно A_n; огибание может выродиться в пересечение или параллелизм.

Это условие, не являющееся симметричным относительно к двум семействам, выражается тем, что p_1^{jk} из (IV,150) нулевая.

Из (IV,153) видна симметрия.

Направления кривых u^1, u^2 на A_2 могут быть названы сопряженными направлениями в смысле Миллера.

Уравнения, дающие различные типы сетей, суть (IV,160), (IV,167, (IV,170), (IV,178), (IV,184), (IV,187).

Эти сети суть обобщение сопряженных сетей аффинного пространства.

Следует отметить, что определение, данное для огибающих сетей в A_2, отличается от определения для A_n; доказываем, что огибающие сети A_n, расположенного на A_2, суть также огибающие в A_2 в рассмотренном смысле.

L'ÉTUDE DES DIRECTIONS ENVELOPPANTES DANS UN ESPACE À CONNNEXION AFFINE

(RÉSUMÉ)

I. Soit A_n un espace à connexion affine, n — dimensionnel, dans lequel les coordonnées d'un point soient $u^i (i = 1,2,\ldots,n)$ et dans cet espace soit une courbe C donnée par (I,1), où σ est un paramètre sur la courbe C.

Par les points de la courbe C, dans l'espace A_n, on considère une série de ∞^1 directions g, données par les vecteurs $\theta^i(\sigma) \neq 0 \ (i = 1,2,\ldots,n)$ définis jusqu'à un facteur arbitraire $h(\sigma) \neq 0$. Notons toujours avec g la droite de direction g qui part du point M de la courbe et se trouve dans l'espace affin A_n^M, n — dimensionnel, tangent en M à l'espace à connexion affine A_n.

On supposera que cette série de directions g a la propriété qu'au développement des espaces affins A_n^M sur l'un d'eux — autrement dit, en faisant la carte affine des divers repères attachés aux points M de la courbe C, les droites g restent tangentes à une courbe, ce qui revient à dire que deux droites infiniment voisines de la série donnée deviennent incidentes après avoir effectué le développement des espaces A_n^M.

Pour cela, il est nécessaire et suffisant que, sur chaque droite g qui passe par le point M de la courbe C, il existe un point qui, dans l'espace de

développement, c'est-à-dire dans la carte, décrive une courbe tangente à la droite respective.

Etant donné que, dans un cas particulier du problème considéré, on retrouve les résultats obtenus par Myller [3] [4], l'Auteur nomme les directions g, — *directions enveloppantes au sens de Myller, dans un espace à connexion affine*; en abrégé, nous les nommerons *directions enveloppantes*.

Soit M' *le point principal de la droite* sur laquelle il se trouve et Γ *la courbe associée à la série de droites* considerée.

Si dans la carte, les coordonnées du point M' sont $\overline{u}^i$, on aura (I,2). La condition imposée à M' montre qu'il faut qu'il existe des fonctions $\rho(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$, de telle manière que (I,3) soit vérifiée; en différentiant (I,2) à l'aide de l'opérateur différentiel habituel dans la carte—donc avec l'opérateur de la différentiation absolue D dans l'espace A_n, de (I,2) (I,3) on déduit (I,4) qui sont les équations du problème.

On peut aboutir à ces équations encore d'une autre manière, en partant de la condition d'incidence de deux droites infiniment voisines de la série considérée.

Soient M, M^* deux points infiniment voisins de la courbe C, — g, g^* et M, M^* les directions et les points principaux correspondants. La condition du problème s'exprime en ce que le quadrilatère fermé $MM^*M'^*M'M$ est dans notre cas un triangle, parceque les côtés MM' et $M'M'^*$ sont colinéaires. En écrivant (I,5), on aboutit encore une fois à (I,4).

Les équations (I,4) s'écrivent aussi (I,6) ou (I,7). Si dans (I,4) on fait les substitutions (I,8) et on considère aussi (I,9) ou (I,10), l'équation (I,4) subsiste. En considérant (I,11) on peut encore déduire (I,10) qui montre que τ est invariant pour un changement de h et de σ.

Si on fait un changement de σ, en considérant donc $h=1$, nous avons $\rho=\rho_1$ et (I,12) qui montre le caractère covariant de λ.

Si on fait un changement de λ, il suffit qu'on considère σ_1 de (I,12) pour que (I, 4) subsiste.

Si on change h, nous avons (I,13).

Les équations (I,7) s'écrivent aussi (I,14) ou μ, ν sont donnés par (I,15). Pour un changement de u^i, ces équations subsistent avec $\mu_1=\mu$, $\nu_1=\nu$; pour un changement de σ, elles subsistent aussi avec (I,16). Pour un changement de θ^i avec un autre colinéaire, (I,14) subsistent avec (I,17) (I,18).

Géométriquement, la condition imposée à la série de directions, revient à ce que les vecteurs.

$$\frac{D\theta^i}{d\sigma}, \quad \theta^i, \quad du^i$$

soient dépendants, c'est-à-dire que le plan des deux premiers, soit tangent à la courbe C' considérée. Ce plan se trouve dans A_n^M et est uniquement déterminé par la série de directions, indépendamment du choix de h et de σ; il constitue la généralisation affine de la direction associée de parallélisme de Bianchi [9] [10] et c'est pourquoi il peut être nommé *plan associé à la série de directions considérées*.

Il est indéterminé seulement si

$$\frac{D\theta^i}{d\sigma}=\mu\theta^i$$

donc si la série de directions est parallèle en sens absolu, en rapport avec la connexion de A_n.

D nc, nous avons le

Théorème *I*: *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de directions définies par les vecteurs* θ^i, *le long de la courbe* C *dans* A_n, *soit enveloppante, est que*

$$\theta^i, \frac{D\theta^i}{d\sigma}, \frac{du^i}{d\sigma}$$

soient coplanaires.

Cette condition, pour $n \geqslant 3$, revient à annuler le trivecteur (I,19) qui peut être attaché à chaque série de directions g.

On peut aussi considérer le trivecteur (I,20) ou (I,21).

Pour un changement des coordonnées u^i, on a (I,22). Ce trivecteur p^{ijk} sera nommé trivecteur associé à la série de directions données, pour le paramètre σ; il devient géométrique si θ^i et σ sont géométriquement choisies.

La condition imposée à la série de directions est toujours satisfaite, si $n = 1, 2$.

Le système (I,24) équivalent à (I,14), revient à $n - 2$ équations indépendantes, car (I,14) contient n équations parmi lesquelles nous devons éliminer μ et ν.

Si le système (I,24) admet la solution $\theta^i(\sigma)$, il admet aussi la solution $h(\sigma)\,\theta^i(\sigma)$. En posant encore une condition qui respecte cette homogénéité, par exemple (I,25), avec $\varphi(\sigma)$, une fonction donnée arbitrairement, on obtient un système de $n - 1$ équations indépendantes, avec n inconnues $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n$, les intégrales duquel, ayant la forme

$$\theta^i = h(\sigma)\,\theta_1^i(\sigma)$$

dépendent de la fonction $\varphi(\sigma)$. Parce que la fonction $h(\sigma)$ n'est pas essentielle elle peut être fixée par une condition non homogène, par exemple $\theta^1 = 1$; on déduit que les séries enveloppantes, le long d'une courbe, dépendent d'une seule fonction arbitraire (essentielle) d'une variable.

Sous la forme (I,6) (I,7), les n équations du problème contiennent $n + 2$ fonctions inconnues $\theta^i(\sigma)$, $\rho(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$ parce que $\dot{u}^i$ sont connues de (I,1).

De ces équations on déduit les mêmes résultats que plus haut.

Pour λ on prend une fonction arbitraire (non essentielle), l'arbitraire de laquelle ne change pas les résultats (car pour un changement de λ, acompagné d'un changement de σ, donné par (I,12), les équations (I,4) subsistent), et pour $\rho(\sigma)$ une fonction arbitraire (essentielle) d'une variable; dans ces conditions, le système détermine $\theta^i(\sigma)$ à l'aide de n constantes arbitraires θ_0^i qui définissent une direction initiale de la série.

On constate que toutes les courbes sont auto-enveloppantes.

Les directions tangentes à la courbe C, forment une série de directions qui vérifient évidemment les conditions d'enveloppement, parce que pour elle on a $p^{ijk} = 0\left(\theta^i = \frac{du^i}{d\sigma}, \rho = 0, \lambda = 1\right)$.

En excluant ce cas, on peut fixer géométriquement le vecteur θ^i en le prenant égal au vecteur principal.

Dans ce cas, nous avons $\rho = 1$, donc (I,4) s'écrivent (I,26), qui n'est plus homogène et qui comporte une seule fonction arbitraire (essentielle).

On conclut donc, qu'une série de directions qui vérifient les conditions imposées par notre problème, peut être caractérisée par la possibilité de définir ses directions par une série de vecteurs ξ^i qui vérifient le système (26); dans ce cas ξ^i sera le vecteur principal de la série.

Sous la forme (I,26), si on connaît ξ^i, nous avons un système de n équations avec $n+1$ fonctions inconnues $u^i(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$; en prenant $\lambda(\sigma)$ arbitraire, ce qui ne produit qu'un changement du paramètre σ sur C, le système (I, 26) donnera $u^i(\sigma)$, donc C, à l'aide de n constantes arbitraires $u^i(\sigma_0)$ qui définissent la position d'un point de la courbe C.

On constate que (I,26) et $d\tau$ sont invariants pour un changement de σ ou de u^i.

En considérant une série enveloppante, on peut disposer de h et de σ de telle manière que (I,4) ou (I,14), qu'elle vérifie, prennent une forme plus simple. Pour fixer h géométriquement, on prend $\xi^i = \theta^i$. De (I,10) on déduit que si $\lambda \neq 0$ (donc les directions ne sont pas concurrentes, ce qui sera discuté dans un des paragraphes suivants) ($d\bar{u}^i \neq 0$), avec $\rho = 1$, nous avons (I,28), c'est-à-dire qu'on a déterminé jusqu'à une constante additive un paramètre τ, géométrique, de la série de directions enveloppantes. Il est invariant au changement de h, σ et u^i.

Si nous considérons $\sigma = \tau$, donc $\lambda = 1$, les équations (I,4) s'écrivent (I,29). Ici $\xi^i = \theta^i$, donc $\rho = 1$, donc (I,28); en général, avec θ^i quelconque, nous avons (I,30) à cause de (I,10) (I.15).

On peut écrire (I,19) à l'aide d'un paramètre σ quelconque au lieu de τ, mais de (I, 30) on observe que cela revient à considérer $\rho = \lambda$, donc à fixer la fonction arbitraire $\rho(\sigma)$; de cette manière, au paramètre $\tau = \sigma$ correspondront seulement ∞^n séries enveloppantes données par (I,29), l'une d'elles étant déterminée par un vecteur principal initial ξ^i_0 (ou, autrement dit, par une direction initiale et le point principal correspondant).

Si le paramètre est fixé géométriquement sur la courbe, les séries enveloppantes qui lui sont attachées ont une signification géométrique pour la courbe elle-même et peuvent être utilisées à la construction des invariants de celle-ci.

Un autre moyen pour fixer h, est de considérer (I,31). Ce choix est invariant pour les changements de coordonnées mais pas pour les changements de paramètre σ; elle revient à prendre $\lambda = 1$ dans (I,3).

En notant avec r la valeur correspondante de ρ ($\xi^i = \rho\dot{\bar{u}}^i$) on obtient (I,32) (I,33).

Donc τ est un paramètre, à l'aide duquel le vecteur associé ξ^i s'exprime sous la forme (I,33); le paramètre τ sera nommé le *paramètre principal de la série de directions enveloppantes considérée.*

Les équations (I,29) deviennent (I,34). On peut se proposer de simplifier ces équations par un changement de paramètre, qui leur maintienne la forme si σ_1 est le paramètre cherché, on a (I,35) de (I,34).

On peut déterminer σ_0 de telle manière que la parenthèse du second, membre de (I,35), prenne une valeur donnée, $-d\log f(\tau)$, donc (I,36) qui donne (I,37); si $f(\tau)=1$, on a (I,38). τ étant invariant pour la série de directions enveloppantes, il en est de même pour σ_0; σ_0 est *le paramètre normal de la série de directions enveloppantes* et $\frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0}$, le vecteur *normalisé* correspondant.

En prenant $c=1$, $c'=0$, les équations du problème sont (I,39). Entre le vecteur principal et le vecteur normalisé, il y a la relation (I,40), donc (I,39) est équivalent à (I,41) qui conduit, en outre à (I,29).

De (I,32) on déduit que la valeur r_0 de r, correspondante au paramètre τ_0, est donnée par (I,42), est donc définie en fonction de τ jusqu'à un facteur constant de proportionnalité et en fonction de σ_0 jusqu'à une constante additive.

Les conditions qu'on a imposées à la série des directions considérées,qui partent des points M de la courbe C, en se trouvant dans A_n, sont: elles admettent une courbe enveloppante après avoir fait le développement des variétés A_n^M tangentes dans les M à A_n.

Dans la configuration formée par la carte affine des divers repères attachés aux points M—les directions données g engendrents une surface développable. La normalisation veut dire que sur chaque droite g on choisit un point P, en imposant au vecteur normalisé $\overrightarrow{MP}$ la condition que sa croissance absolue soit parallèle à la tangente à la courbe C dans M; comme on l'a constaté, le paramètre normal est le paramètre σ_0, qui rend MP sous la forme $\frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0}$, pendant que le paramètre principal rend MM' sous la forme $\frac{d\bar{u}^i}{d\tau}$.

Si $n=2$, les conditions d'enveloppement étant vérifiées pour toute série de directions, il s'ensuit que:

Théorème II: *Dans un espace à connexion affine, à deux dimensions, à toute série de directions on peut attacher d'une manière invariante un paramètre principal τ, donc aussi un normal σ_0.*

De (I,14) on a (I,43).

De la même manière que (I,14) ont conduit à attacher à une série de directions g, le trivecteur (I,19) (I,20), maintenant (I,39) (I,41) conduisent à attacher à une série de vecteurs θ^i le bivecteur (I,44), (I,45) ou (I,46).

De (I,39) nous déduisons que si

$$\theta^i=\frac{d\bar{u}^i}{d\sigma_0}$$

(I,44) (I,45) sont nuls; inversement l'annulation de ce directeur montre que la série considérée est enveloppante, le paramètre normal étant σ_0, (I,48) et θ^i les vecteurs normalisés.

★

Si la courbe enveloppante Γ est réduite à un point, les droites g enveloppent ce point — après avoir fait la carte affine des repères attachés au point M; le point M étant fixe, il s'ensuit que dans (I,2), $\bar{u}^i$ sont des constantes.

Parce que pour des espaces riemanniens, le problème a été étudié par Myller [3] [4] — l'Auteur a nommé ces directions — *directions concurrentes au sens de Myller, dans un espace à connexion affine* ou, en abrégeant, *directions concurrentes.*

Dans ce cas, on a $d\overline{u}^i = 0$, donc de (I,2) on déduit (I,4′) qui sont les équations du problème proposé. Dans ce cas aussi on peut fixer h, en considérant $\xi^i = \theta^i$, $\rho = 1$, de telle manière que (I,4′) devienne

$$D\xi^i + du^i = 0.$$

Ces équations correspondent à $\lambda = 0$ dans (I,4); on a (I,15′) qui provient de (I,14); cette relation s'obtient de (I,15), avec $\lambda = 0$ en éliminant ρ entre les deux relations.

Si on suit la deuxième méthode, ébauchée pour le cas de l'enveloppement, la condition imposée dans ce cas à la série de directions est (I,5′) qui montre que les points M' et M'' coïncident. De cette relation on déduit (I,4′); ces équations s'écrivent aussi (I,6′) (I,7′). Dans ce cas également on peut fixer h, en considérant $\xi^i = \theta^i$; $\rho = 1$ et (I,4′) deviennent

$$D_2\xi^i = D\xi^i + du^i = 0.$$

Sous cette forme, nous avons un système de n équations linéaires à n fonctions inconnues ξ^i; les solutions dépendent donc de n constantes arbitraires ξ^i_0, qui définissent un vecteur principal initial ou, autrement dit, une série de directions concurrentes est déterminée, dès qu'on connaît la direction d'un vecteur initial et le point principal respectif.

On déduit les mêmes conclusions de (I,4′), mais là on doit connaître la fonction arbitraire $\rho(\sigma)$. Le fait de prendre pour ρ une fonction ou une autre, ne change pas la direction des vecteurs θ^i, mais seulement leur grandeur.

Inversement si l'on connaît θ^i ou $\xi^i(\sigma)$, (I,4′) ou (I,6′), donc $u^i(\sigma)$ si on prend $\rho(\sigma)$ arbitraire.

En considérant dans ces conditions (I,49), on a (I,50) qui par (I,51) devient (I,50′). Donc on a le

Théorème III: *Dans un espace à connexion affine, les courbes auto-concurrentes et les auto-parallèles coïncident.*

Par l'intermédiaire de (I,44), on a attaché à une série quelconque de vecteurs θ^i un bivecteur r^{ij}; au lieu de r^{ij} on peut considérer le bivecteur un p^{ij} (I,45). On remarque que si les vecteurs θ^i sont des vecteurs principaux des directions concurrentes, le bivecteur p^{ij} est nul; inversement, si p^{ij} est nul, on déduit

$$D_3\xi^i + du^i = 0$$

qui montre que θ^i sont des vecteurs d'une série de directions concurrentes. Le bivecteur p^{ij} est covariant par rapport à σ (I,23′) et pour un changement de u^i, on a (I,22′).

★

On peut considérer dans ce cas aussi, dans la carte, une courbe Δ donnée par (I,2′) à condition que les tangentes dans les points $M''(\sigma)$ de cette courbe et les droites $g(\sigma)$ soient respectivement parallèles pour les mêmes valeurs de σ, après le développement, donc qu'on ait (I,3′).

Les droites g concurrentes représentent une image de la variation des tangentes de la courbe Δ; *cette courbe est associée virtuellement à la série de directions concurrentes*, parce que la courbe associée Γ de la même série est réduite au point de coordonnée $\overline{u}^i$.

Parce que ξ^i et $d\overline{v}^i$ sont invariants à un changement de h et de σ, on a (I,11′), donc on détermine $d\tau$, qui est invariant pour un changement de σ et de h.

De cette manière, dans le cas de la concurrence, on a également un *paramètre principal invariant attaché à la série de directions concurrentes considérées et aussi à la courbe* Δ; τ varie avec Δ.

On déduit (I,32) et (I,33′) de la même manière que pour le cas des directions enveloppantes. Donc τ permet, dans ce cas aussi d'exprimer ξ^i sous la forme (I,33′). Les équations du problème deviennent (II,34′). En effectuant un changement de paramètre et en posant la condition (I,36′), on obtient (I,37′). Si $f(\tau) = 1$, on a (I,38′). σ_0 est le paramètre normal par rapport à Δ — de la série de directions concurrentes.

Si $c' = 0$, $c = 1$, σ_0 et τ sont identiques, et $r_0 = 1$.

La condition que l'on a imposée à la série de directions considérées —qui partent des points M de la courbe C, se trouvant dans A_n^M— est qu'elles admettent un point de concurrence — après avoir fait le développement des variétés affines A_n^M tangentes à A_n dans les points de M — sur l'une d'elles. Donc, dans la carte formée par les divers repères attachés aux points M, — les directions considérées g engendreront un cône.

Le cas des directions parallèles au sens de T. Levi-Civita, dans un espace à connexion affine, peut être retrouvé comme un cas particulier des directions concurrentes, si le point de concurrence est à l'infini, donc $\rho = \infty$, $d\rho = 0$.

Dans ce cas, les conditions qu'on impose à la série de directions donnée sont qu'elles soient parallèles après avoir fait la carte des diverses variétés A_n^M.

Donc—dans cette carte—les directions données g engendrent un cylindre.

★

On considère qu'à chaque point M, d'un espace à connexion affine A_n, on attache un point M' déterminé, de coordonnées ξ^i par rapport au repère naturel (R), relatif à M; on a donc un champ de points et on cherche le déplacement élémentaire de M' quand on passe de M à M^*.

D'après Cartan, l'expression

$$D_2\xi^i = D\xi^i + du^i$$

définit la différentielle absolue du champ de points. Avec cette notion on peut reconsidérer le problème des directions enveloppantes, concurrentes ou parallèles.

Pour que la direction $\overrightarrow{MM'}$ enveloppe la courbe Γ, dans la carte, la condition peut être formulée en demandant que le point M' de coordonnées $\xi^i = \rho\theta^i$ par rapport à (R), décrive la courbe Γ; donc, que sa différentielle absolue soit $d\overline{u}^i$ et qu'on ait (I,52), qui ne représente autre chose que les équations de l'enveloppement, si l'on tient compte de (I,2), (I,3). Donc les équations de l'enveloppement expriment que M', le point de contact de la droite g avec Γ, décrive Γ dans son transport absolu, — dans la carte.

Si on demande que M' soit fixe, donc que la différentielle absolue de ξ^i soit toujours nulle, on a les équations des directions concurrentes dans un A_n.

Si ρ est infini, les équations du problème donnent

$$D\xi^i = 0$$

Ce qui exprime que le point M' à l'infini dans la direction g est fixe par rapport à son transport absolu, donc que ξ^i se transporte parallèlement.

★

Supposons qu'on attache à chaque point M de A_n, un point M' de coordonnées affines ξ^i par rapport au repère naturel (R) attaché à M.

La condition d'holonomie pour le transport des directions par l'enveloppement se traduit par la condition que dans la carte, la direction MM' revienne sur elle même après que M ait décrit un cycle $MM_1M_3M_2M$; autrement dit, il faut que M' revienne dans une position M'' sur la droite MM'.

Si d, $\overline{d}$ sont les déplacements élémentaires sur les arcs MM_1MM_2 respectivement, il s'ensuit que dans ces déplacements, le point M' a un déplacement absolu donné par (I,53), (I,54).

Le déplacement de M' le long des contours MM_1M_3, MM_2M_3 donne donc par le développement les points M_3', $\overline{M}_3'$ qui, rapportés au repère (R) du point M, ont des coordonées données par (I,55).

Parce que le déplacement de M_3', comme conséquence du déplacement de M le long du cycle est dans ce cas proportionnel à ξ^i, on a (I,56) ou (I,57) (I,58). Ces équations conduisent à (I,60) et par (I,65) à (I,67). Donc, pour l'enveloppement non dégénéré il n'y a aucun espace au transport holonome.

Pour le cas des directions concurrentes il y a transport holonome seulement pour les espaces affins.

Pour le cas des directions parallèles, on connaît la relation $R^i_{krs} = 0$.

★

II. Si l'on considère un V_n métrique dans lequel on a une forme différentielle quadratique (I,68), tous les résultats obtenus pour un espace à connexion affine sont valables, car V_n peut être considéré comme un tel espace.

Dans un V_n, on a une possibilité *apriori* de fixer h géométriquement, en prenant θ^i unitaire ; dans ce cas r, la valeur de ρ, c'est la longueur du vecteur principal ξ^i, donc invariant.

Les équations du problème sont (I,69) et toutes les conclusions sur la multiplicité des solutions dans un A_n restent valables.

Pour un V_n, le plan associé à la série enveloppante peut être remplacé par la direction qu'il contient, orthogonale à la direction θ^i; cette direction est justement la direction de Bianchi (I,73).

En considérant un V_n, immergé dans un V_{n+1}, on peut définir comme lignes de courbure de V_n, par rapport à V_{n+1}, les courbures pour lesquelles les normales à V_n le long d'elles sont des directions enveloppantes au sens de Myller.

Si l'on considère des directions concurrentes, on a (I,72').

En considérant un A_3 avec la connexion donnée par (I,75), le long de la courbe C donné par $du^1 = du^3 = 0$, $du^2 = d\sigma$, les équations de l'enveloppement sont (I,76) et les solutions ont la forme (I,77), avec $\varphi(\sigma)$ arbitraire.

Si l'on considère une variété métrique à 3 dimensions, de courbure totale 1, on a la métrique (I,78); on remarque qu'elle admet exactement la connexion (I,75), on a donc (I,79).

Si l'on considère des directions concurrentes, on a (I,76′) (I,77′).

§ II. Dans l'espace riemannien S_n on considère une variété subordonnée à m dimensions ($1 < m < n$); soit C une courbe de V_m et g, une série de directions passant par les points de C et appartenant à V_m; *on demande dans quel cas ces directions sont enveloppantes par rapport à la variété* V_m.

On établit le

Théorème IV: *Si les directions* g, *données par les vecteurs* θ^i, *sont enveloppantes par rapport à l'espace ambiant* S_n, *elles sont aussi enveloppantes par rapport à la variété subordonnée* V_m ; *soit que l'on considère l'enveloppement par rapport à* S_n *ou à* V_m, *ce sont les mêmes vecteurs principaux, le même paramètre principal, le même paramètre normal, les mêmes vecteurs normalisés.*

Pour établir ce théorème, on utilise (II,19), (II,19′) ou (II,19″) De même, de (II,20) (II,20′), on établit le

Théorème V: *Si les directions* g, *données par les vecteurs*, θ^i *sont concurrentes par rapport à l'espace ambiant* S_n, *elles sont aussi concurents par rapport à la variété subordonnée* V_m; *soit que l'on considère la concurence par rapport à* S_n *ou à* V_m, ce *sont les mêmes vecteurs principaux, le même paramètre normal, les mêmes vecteurs normalisés.*

Si l'enveloppement est dégénéré en parallélisme, on a (II,22) (II,22′) d'où l'on déduit le théorème analogue de Bianchi.

Dans tous ces théorèmes, on considère V_m non singulier; le cas d'un V_m singulier comporte une étude spéciale.

En considérant le trivecteur p^{ijk}, introduit dans le § 1, on établit (II,30) (II,30′), d'où l'on déduit les théorèmes IV et V.

En considérant le bivecteur $\overline{p}^{ij}$, introduit dans le § 2, on établit (II,31) (II,31′) d'où l'on déduit le théorème IV.

En considérant le bivecteur p^{ij}, introduit dans le § 3, on établit (II,32) (II,32′) d'où l'on déduit le théorème V.

★

Soit C une courbe quelconque dans S_n, par les points de laquelle passe une série de ∞^1, directions g, tangentes à S_n ; ces directions sont données par les vecteurs θ^i. Si ces directions sont enveloppantes, on peut déterminer un $\rho(\sigma)$ et un $\lambda(\sigma)$, de manière que les expressions (II,33) soient nulles, ce qui exprime que r^{ijg}, p^{ijk} de (I,19) (I,20) sont nulles.

Si ces directions ne sont pas enveloppantes, on ne peut pas déterminer les fonctions $\rho(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$ de telle manière que Ω_1^i soient toutes nulles; si on fixe géométriquement ρ et λ, par exemple $\lambda = 1$, et que $\rho\theta^i = \xi^i$ soit unitaire, ou d'une autre manière, que ξ^i soit le vecteur qui a son origine dans le point M de la courbe C et l'extrêmité dans le point qui décrit la ligne de striction de la surface réglée, générée par les droites g dans la carte, le vecteur Ω_1^i correspondant détermine dans chaque point de C — pour chaque manière

de fixer géométriquement λ et ρ — un vecteur unitaire η_1^i colinéaire à Ω_1^i et donné par (II,34); R_1 est donné par (II,35); il est invariant par rapport à la courbe C et à la série de vecteurs θ^i.

La direction η_1^i est la direction vectorielle, associée par enveloppement de la série de directions g *le long de la courbe* C *— par rapport à la manière de fixer géométriquement les vecteurs ξ^i et la quantité*

$$r_1 = \frac{1}{R}$$

la courbure vectorielle d'enveloppement de la série de directions g *le long de la courbe* C *— par rapport à la manière de fixer géométriquement les vecteurs ξ^i; R_1 est le rayon respectif de courbure.*

A l'aide de cette notion, on établit le

Théorème VI: *Si par les points d'une courbe* C *dans la variété subordonnée* V_m *passent les directions* g, *la condition nécessaire et suffisante pour l'enveloppement des directions* g *dans* V_m, *est qu'il soit possible de déterminer des vecteurs ξ^i sur les directions* g, *de telle manière que les directions vectorielles η_1^i associées d'enveloppement à ξ^i par rapport à l'espace ambiant, soient normales à* V_m *le long de la courbe* C.

On peut exprimer les conditions de ce théorème par le

Théorème VII: *Si par les points d'une courbe C dans la variété subordonnée* V_m, *passent les directions* g, *la condition nécessaire et suffisante pour l'enveloppement des directions* g *dans* V_m *est qu'il soit possible de déterminer géométriquement des vecteurs ξ^i sur les directions* g, *de telle manière que l'espace euclidien T_3, déterminé par les vecteurs $D\xi^i$, ξ^i, dx^i, coupe l'espace euclidien T_{n-m} normal à* V_m, *au moins le long d'une droite, donc que T_3 contienne au moins une normale à* V_m.

Ce théorème est démontré par (II,40), (II,41), (II,42), (II,43). Si S_n est euclidien et V_m riemannien, on déduit (I,44), donc (II,45), donc (II,46), où N_p^i sont $n - m$ vecteurs indépendants normaux à V_m et on fait la somme par rapport à p.

Donc $\frac{d\bar{x}^i}{d\tau}$, la tangente de la courbe adjointe $\bar{x}^i = \bar{x}^i(\tau)$, se trouve dans l'espace euclidien S_{n-m+1}, qui unit la droite MM_1 à l'espace S_{n-m} normal à V_m dans M. Réciproquement, par (II,48) (II,49) on démontre que si la condition est remplie, les directions sont enveloppantes. On a donc aussi le

Théorème VIII: *Si par les points d'une courbe* C *dans la variété* V_m *immergée dans l'espace euclidien* E_n, *passent les directions* g, *la condition nécessaire et suffisante pour l'enveloppement des directions* g *dans* V_m *est qu'el soit possible de déterminer sur chaque droite* g *un point adjoint M_1, de telle manière que toute tangente τ_1 à la courbe* C_1, *lieu des points M_1, soit dans l'espace euclidien à $n - m + 1$ dimensions, qui est l'union de l'espace euclidien à* n — m *dimensions, normal à* V_m *et de la droite* g *— qui n'appar-tient pas à l'espace normal.*

★

De la même manière qu'on a déduit de (II, 33) *la notion de direction vectorielle associée par enveloppement, on déduit de* (I, 46) *la notion de direction*

vectorielle associée par enveloppement d'une manière normalisée d'une série de directions g *le long de la courbe* C, *par rapport à la manière de fixer géométriquement les vecteurs* ξ^i; *la quantité*

$$r_2 = \frac{1}{R_2}$$

est la courbure vectorielle correspondante.

A l'aide de cette notion on établit le

Théorème IX: *Si par les points d'une courbe* C, *dans la variété subordonnée* V_m, *passent les directions* g, *la condition nécessaire et suffisante pour l'enveloppement des directions* g *dans* V_m *est qu'il soit possible de déterminer des vecteurs* ξ^i *sur les directions* g *et un paramètre* σ, *de telle manière que les directions vectorielles* $\overline{\eta}^i$ *associées à* ξ^i *d'une manière normalisée, par enveloppement par rapport à l'espace ambiant, soient orthogonales à* V_m *le long de la courbe* C.

Dans ce cas, ξ^i *sont les vecteurs normalisés et* σ *le paramètre normal de la série de directions enveloppantes.*

Ce théorème peut être exprimé aussi par le

Théorème X: *Si par les points d'une courbe* C, *dans la variété subordonnée* V_m *passent les directions* g, *la condition nécessaire et suffisante pour l'enveloppement des directions* g *dans* S_n *est qu'on puisse déterminer géométriquement des vecteurs* ξ^i *sur les directions* g *et un paramètre* σ, *de telle manière que le plan* T_2 *déterminé par les vecteurs* $D\xi^i$ *et* dx^i *coupe l'espace euclidien* T_{n-m} *orthogonal à* V_m *au moins le long d'une droite, qui ait une direction variable dans le plan* T_2; *donc que le plan* T_2 *contienne au moins une normale à* V_m, *qui ait une direction variable dans* T_2. *Dans ce cas,* ξ^i *sont des vecteurs normalisés et* σ, *le paramètre normal de la série de directions enveloppantes.*

★

De la même manière que plus haut, on déduit de (II,51) la *notion de direction vectorielle associée par concurrence d'une série de directions* g, *le long de la courbe* C — *par rapport à la manière de fixer — géométriquement les vecteurs* ξ^i, *la quantité*

$$r_2 = \frac{1}{R_2}$$

est la courbure vectorielle correspondante.

A l'aide de cette notion, on établit le

Théorème XI: *Si par les points d'une courbe* C, *dans la variété subordonnée* V_m *passent les directions* g, *la condition nécessaire et suffisante pour la concurrence des directions* g *dans* V_m *est qu'on puisse déterminer géométriquement des vecteurs* ξ^i *sur les directions* g, *de telle manière que les directions vectorielles* η^i_2 *associées par concurrence à* ξ^i *par rapport à l'espace ambiant soient orthogonales à* V_m *le long de* C.

Les conditions de ce théorème peuvent être exprimées aussi par le

Théorème XII: *Si par les points d'une courbe* C, *dans la variété subordonnée* V_m, *passent les directions* g, *la condition nécessaire et suffisante pour la concurrence des directions* g *dans* V_m *est qu'on puisse déterminer géométriquement des vecteurs* ξ^i *sur les directions* g, *de telle manière que le plan* T_2

déterminé par les vecteurs $D\xi^i$ *et* dx^i *coupe l'espace euclidien* T_{n-m} *normal a* V_m, *au moins le long d'une droite qui ait une direction fixe dans le plan* T_2; *donc, que le plan* T_2 *contienne au moins une normale ä* V_m *qui ait une direction fixe dans* T_2.

Si S_n est euclidien, de (II,60), (II,61) on déduit (II,62) qui montre que $\frac{d\bar{x}^i}{dt}$, la tangente à la courbe adjointe, se trouve dans l'espace euclidien S_{n-m} normal à V_m dans le point M. Par (II,63), (II,64), (II,65), on démontre la réciproque; on a donc le

Théorème XIII: *Si par les points d'une courbe* C, *dans la variété* V_m *immergée dans l'espace euclidien* E_n, *passent les directions* g, *la condition nécessaire et suffisante pour la concurrence des directions* g *dans* V_m *est qu'on puisse déterminer sur chaque droite* g *un point adjoint* M_1, *de telle maniére que toute tangente* t_1 *à la courbe* C_1, *lieu des points* M_1, *soit dans l'espace euclidien à* m — n *dimensions, normal à* V_n.

★

De la même manière que plus haut, en partant de p^{ijk} on a (II,70), (II,71); donc, la notion de direction trivectorielle, associée par enveloppement à la série de directions g, le long de la courbe C et la quantité $t_1 = \frac{1}{T_1}$ la courbure respective. A l'aide de cette notion on établit le

Théorème XIV: *Si par les points d'une courbe* C, *dans la variété subordonnée* V_m, *passent les directions* g, *la condition nécessaire et suffisante pour l'enveloppement des directions* g, *dans* V_m, *est que les directions trivectorielles* ω^{ijk} *associées par enveloppement des directions* g *par rapport à l'espace ambiant soient normales à toutes les directions trivectorielles tangentes à* V_m, *le long de la courbe* C.

★

En partant de $\bar{p}^{ijk}$, on introduit aussi, *la notion de direction bivectorielle, associée d'une manière normalisee, à la série de vecteurs* g, *le long de la courbe* C et la quantité $F_2 = \frac{1}{T_2}$ (II,75), la courbure respective.

A l'aide de cette notion, on établit le

Théorème XV: *Si par les points d'une courbe* C, *dans la variété subordonnée* V_m, *passent les directions* g, *la condition nécessaire et suffisante pour l'enveloppement de ces directions est qu'il soit possible de déterminer des vecteurs* ξ^i *sur les directions* g *et aussi un paramètre* σ, *de telle manière que les directions bivectorielles associées d'une manière normalisée* $\bar{\omega}^{ij}$ *aux vecteurs* ξ^i, *par rapport à l'espace ambiant, soient normales à toutes les directions bivectorielles tangentes à* V_m, *le long de la courbe* C.

★

En partant de p^{ij}, on introduit aussi la notion de direction bivectorielle associée par concurrence à la série de vecteurs ξ^i le long de la courbe C — et la quantité $t_2 = \frac{1}{T_2}$, la courbure respective.

De la même manière que plus haut, on démontre le

Théorème XVI: *Si par les points d'une courbe* C, *dans la variété subordonnée* V_m, *passent les directions* g, *la condition nécessaire et suffisante pour la concurrence de ces directions est qu'il soit possible de déterminer des vecteurs* ξ^i *sur les directions* g, *de telle manière que les directions bivectorielles* ω^{ij}, *associées aux vecteurs* ξ^i *par rapport à l'espace ambiant, soient normales à toutes les directions bivectorielles tangentes à* V_m, *le long de la courbe* C.

★

En considérant deux variétés métriques, V_m, $V_{m^*}^*$, de dimensions respectivement m et m^*, tangentes le long d'une courbe C, on démontre le

Théorème XVII: *Pour deux variétés* V_m, $V_{m^*}^*$, *tangentes le long d'une courbe* C, *l'enveloppement est le même, le long de cette courbe: les vecteurs principaux, paramètres principaux, paramètres normaux, les vecteurs normalisés et les trivecteurs associés par enveloppement, les vecteurs et birecteurs associés d'une manière normalisée par enveloppement et les courbures respectives sont également identiques.*

Théorème XVIII: *Pour deux variétés* V_m, $V_{m^*}^*$, *tangentes le long d'une courbe* C, *la concurrence est la même le long de cette courbe: les vecteurs principaux, les paramètres normalisés, les bivecteurs associés par concurrence et les courbures respectives sont également identiques.*

★

Dans les §§24—25, on part des conditions établies dans les théorèmes VIII et XIII pour qu'une série de directions soient enveloppantes respectivement concurrentes et l'on se sert d'elles pour définir extrinsèquement de telles séries.

En considérant (II,88) — (II,91), les conditions sont exprimées par (II,92), (II,95), (II,98) ou (II,100), d'où l'on déduit (I,6).

★

III. Dans le chapitre III on étudie, du point de vue métrique, les vecteurs normalisés et les vecteurs principaux. On considère deux séries de directions le long de la courbe C; chacune peut être enveloppante (M_1), concurrente (M_2) ou parallèle (T); on a donc six cas, $M_1 - M_1$, $M_2 - M_2$, $T - T$, $M_1 - M_2$, $M_1 - T$, $M_2 - T$.

On étudie également différentes formes, pour les expressions des différentes courbures. On en déduit le

Théorème XIX: *En considérant une serie de vecteurs* ξ^i, *le long d'une courbe* C *d'une variété* V_m, *subordonnée à l'espace riemannien* S_n, *si les directions associées par enveloppement de celles-ci par rapport à* V_m *sont orthogonales aux vecteurs* ξ^i *mêmes, la même chose se passe avec les directions associées par enveloppement des vecteurs* ξ^i, *par rapport à* S_n *et réciproquement.*

Théorème XX: *En considérant une série de vecteurs* ξ^i, *le long d'une courbe* C *de la variété* V_m, *subordonnée à l'espace riemannien* S_n, *si les directions associées par concurrence de celles-ci par rapport à* V_m *sont orthogonales aux vecteurs* ξ^i *mêmes, la même chose se passe avec les directions associées par concurrence des vecteurs* ξ^i *par rapport à* S_n *et reciproquement.*

Théorème XXI: *En considérant une série de vecteurs* ξ^i, *le long d'une courbe* C *de la variété* V_m, *subordonnée à l'espace riemannien* S_n, *si les directions associées par parallélisme de celle-ci par rapport à* V_m *sont orthogonales aux vecteurs* ξ^i *mêmes, la même chose se passe avec les directions associées par parallélisme des vecteurs* ξ^i *par rapport à* S_n *et réciproquement.*

En considérant (III,65)—(III,67′), on a le résultat:

En considérant une série arbitraire de vecteurs ξ^i, *le long d'une courbe* C *de la variété* V_m, *si l'on prend du point* M *de* C, *sur la direction* η_2^i, *la distance* r_2 *jusqu'à* P *et sur la direction de* ξ^i *la distance* r *jusqu'à* Q, *le côté* PQ *du triangle* MPQ *a justement la longueur* r_1.

De (III, 73) on déduit les résultats:

En considérant une série arbitraire de vecteurs ξ^i, *le long d'une courbe* C *de la variété* V_m, *si l'on prend du point* M *de* C, *sur la direction* η_3^i, *dans le sens négatif, la distance* r_3 *jusqu'à* Q *et sur la direction de la tangente à* C *dans* M, *la distance* $\frac{ds}{d\tau}$ *jusqu'à* P, *le côté* PQ *du triangle* MPQ *a justement la longueur* r_2.

En considérant une série enveloppante de vecteurs ξ^i, *le long de la courbe* C *de* V_m, *si l'on prend à partir du point* M *de* C, *sur la direction, de* u^i *la distance* $\frac{ds}{d\tau}$ *jusqu'à* P *et sur la direction de* ξ^i *la distance* r *jusqu'à* M′, *le côté* PM′ *du triangle* MPM′ *a justement la longueur* r_3.

En considérant une série parallèle de vecteurs ξ^i, *le long d'une courbe* C, *de la variété* V_m, *si l'on prend à partir du point* M *de la courbe* C, *sur la direction de* ξ^i, *la longueur* r *jusqu'à* P *et sur la direction tangente à* C, *la distance* $\frac{ds}{d\tau}$ *jusqu'à* Q, *le côté* PQ *du triangle* MPQ *a justement la longueur* r_1.

On remarque que:

La courbure d'enveloppement d'une série de directions concurrentes a la même expression que la courbure de concurrence d'une série de directions enveloppantes.

La courbure de concurrence d'une série de directions parallèles a la même expression que la courbure de parallélisme d'une série de directions concurrentes.

La courbure de parallélisme d'une série de directions enveloppantes a la même expression que la courbure d'enveloppement d'une série de directions parallèles.

★

A l'aide de (III,97), (III,108), on déduit (III,109), donc l'expression de $d\tau$ à l'aide de ds dans un V_2 métrique.

★

IV. Dans le chapitre IV on étudie différents réseaux dans un A_2, où dans un A_n.

Un réseau enveloppant Myller (M_1—M_1), *est un réseau d'un* A_2, *pour lequel* τ_1 *et* τ_2, *les paramètres principaux des deux séries de tangentes aux deux familles de courbes coordonnées sont des fonctions de* u^1, *respectivement* u^2; *donc, pour lequel* τ_1, τ_2 *peuvent être considérés comme paramètres* u^1, u^2 *du réseau. Les conditions sont données par* (IV,9) *ou* (IV,14).

Un réseau concurrent Myller (M_2—M_2) *est un réseau d'un* A_2 *pour lequel les tangentes à l'une des deux familles de courbes coordonnées sont concurrentes au sens de Myller, le long de l'autre et réciproquement. Les conditions sont données* par (IV,51) ou (IV,55).

Un réseau $M_1 - M_2$ est un réseau combinaison des deux cas ci dessus. Les conditions sont données par (IV,56) ou (IV,60).

Un réseau M_1—T est un réseau combinaison du cas d'enveloppement et du cas de parallélisme; les conditions sont (IV,70).

Un réseau M_2—T est un réseau combinaison du cas de concurrence et du cas de parallélisme; les conditions sont données par (IV,78).

La recherche des réseaux de différents types sur un A_2 est faite à l'aide des systèmes d'équations (IV,82), (IV,86), (IV,88), (IV, 91), (IV,94), (IV,96), (IV,98), (IV,100), (IV,101); elles sont du type hyperbolique et admettent, dans le voisinage d'un point, une solution unique satisfaisant aux conditions (IV,103), (IV, 104), ce qui, géométriquement, veut dire que dans un A_2, à connexion affine symétrique, il y a un seul réseau qui passe par deux courbes arbitraires, chacune d'elles faisant partie d'une famille de courbes du réseau.

On montre que les réseaux enveloppants Myller, dans un A_2, sont la généralisation des réseaux conjugués du plan affin.

★

Considérons un A_2 dans un A_n à connexion affine et sur A_2, deux familles de courbes de telle manière qu'au moins dans une région de A_2, par chaque point de M, passe au moins une courbe de chaque famille.

Si le long des courbes d'une des familles, les directions tangentes aux courbes de l'autre famille sont enveloppantes au sens de Myller, par rapport à l'espace ambiant A_n, *nous dirons que les deux familles de courbes constituent un réseau sur* A_2, *par rapport à* A_n; *l'enveloppement peut dégénerer en concurrence ou en parallélisme.*

Cette condition, qui n'est pas symétrique par rapport aux deux familles, s'exprime par le fait que p_1^{ijk} de (IV,150) est nul.

De (IV,153), on voit la symétrie.

Les directions des courbes u^1, u^2 *sur* A_2 *peuvent être nommées directions conjuguées au sens Myller.*

Les équations qui donnent les différents types de réseaux sont (IV,160), (IV,167), (IV,170), (IV,178), (IV,184), (IV,187).

Ces réseaux sont la généralisation des réseaux conjugués de l'espace affin.

On doit remarquer que la définition donnée pour les réseaux enveloppants dans un A_2 diffère de la définition pour un A_n; on démontre que les réseaux enveloppants d'un A_n, situés sur un A_2, sont enveloppants aussi dans A_2, dans le sens considéré.

BIBLIOGRAFIE

1. T. Levi-Cività, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione geometrica della curvatura riemanniana.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1917, t. XLII, p. 173—204.
2. — *Der absolute Differentialkalkül.* Springer, Berlin.
3. Al. Myller, *Direzioni concorrenti sopra una superficie spicate dei punti di una curva.* Rendiconti della R. Academia nazionale dei Lincei, 1924, XXXIII, serie 5, sem. I, p. 339—341.
4. — *Directions concurrentes dans une variété métrique à n dimensions.* Bull. de la Société mathématique de France, t. 56, p. 1—6.
5. O. Mayer, *Études sur les réseaux de M. Myller.* Annales scientifiques de l'Université de Jassy, 1927, t. XIV, fasc. III—IV, p. 169—204.
6. A. Haimovici, *Directions concurrentes et directions parallèles sur une variété d'un espace conforme.* Thèse, Iași 1938.
7. C. Agostinelli, *Sulle direzioni concorrenti in una varietà* V_n. Atti della Reale Academia nazionale dei Lincei, 1933, v. XVII, p. 23—30.
8. P. A. Şirocov, *O shodeascihsea napravleniiah v rimanovîh prostronstvah.* Cazan, Izv. Fiz.—Matem. Obşcest., 1934—1935, 3, 7, p. 77—88.
9. L. Bianchi, *Nota sul parallelismo di Levi-Cività.* Rendiconti dell'Academia delle Scienze di Napoli, 1942, v. 28.
10. — *Lezioni di geometria differenziale.* Parte II, terza edizione, Nicola Zanichelli, Bologna, 1930, v. II, p. 789—811.
11. P. Tchebycheff, *Sur le coupe des vêtements.* Assoc. France, Oeuvres II.
12. L. Euler, *Institutiones Calculi integralis III.*
13. Laplace, *Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles.* 1773.
14. G. Tzitzeica, *Géométrie différentielle projective des réseaux.* Académie roumaine, Études et recherches, Cultura Națională, Bucarest, Gauthier—Villars, Paris 1924.
15. M. Servant, *Sur l'habillage des surfaces.* C. R. Sci., Paris, 1902, t. 135.
16. A. Voss, *Über ein neues Prinzip der Abbildung krummer Oberflächen.* Math. Ann., 1882, t. 19.
17. K. M. Peterson, *Ob otnoşeniiah i srodstvah mejdu crivîmî poverhnostiami.* Mat. Sb., 1856, 1.
18. — *Über Kurven und Flächen.* Leipzig, 1868.
19. V. F. Cagan, *Osnovî teorii poverhnostei v tenzornom izlojenii.* Ceast pervaia, Oghiz — Gosudarstvenoe izdatelstvo tehnico-teoreticescoi literaturî, Moscva — Leningrad, 1947
20. G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* Gauthier—Villars, Paris, 1886—1897, v. II.
21. E. Bompiani, *Surfaces de translation et surfaces minima dans les espaces courbes.* C. R. Sci., t. 169, p. 940.
22. Millu Roth, *O generalizare a noțiunii de direcții concurente în sensul Academicianului Myller.* Lucrările Sesiunii Generale Științifice a Academiei R.P.R. din 2—12 Iunie 1950, p. 321—334.
23. E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée.* Annales Sci. de l'École normale supérieure, 1923, t. 40.
24. — *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann.* Gauthier—Villars, Paris, 1928.
25. G. Vrănceanu, *Leçons de géométrie différentielle.* București, 1947, v. I, p. 239.
26. M. Janet, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien.* Ann. Soc. Polon. de Math. 1927, t. V, p. 38—43.
27. C. Burstin, *Ein Beitrag zum Problem der Einbettung Riemannscher Raüme in euklidische Raüme.* Matematiceschi Sbornic, 1931, v. 38, p. 74.
28. E. Cartan, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien.* Ann. Soc. Polon. de Math. 1928, t. 6, p. 1—7.
29. G. F. Laptev, *O pogrujenii prostranstva afinoi sviaznosti v afinoe prostranstvo.* Docladî Academii Nauc SSSR, 1945, 47, p. 551—554.
30. E. B. Cristoffel, *Über die Transformation der homogenen Differential—Ausdrücke zweiten Grades.* Journal für reine und angew. Math., 1869, 70.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul III, Nr. 1 — 2, 1952

ASUPRA TEOREMELOR DE DESCOMPUNERE ALE ALGEBREI

DE

MIHAIL BENADO

Intr'o lucrare anterioară [1] care poate fi considerată drept introducere la lucrarea de faţă, ne-am ocupat de problema descompunerii sistemelor algebrice prin şiruri *principale*, în cadrul normalităţilor lui O. Ore; introducând conceptul de lanţuri latero — α — normale, am stabilit cu acest prilej că teoremele Jordan-Hölder clasice pentru şiruri principale, pot fi subsumate normalităţii α. Am arătat de asemenea că acest rezultat este variabil şi pentru cazul mai general al şirurilor modulare, sau numai α - modulare. (A se vedea, în privinţa acestor rezultate, câteva observaţii din anexa dela sfârşitul prezentei lucrări).

In prezenta lucrare, ducem mai departe analiza problemei descompunerii sistemelor algebrice, de astădată însă, prin şiruri *normale* (dar nu numai decât principale).

Contribuţia noastră se poate rezuma, în esenţă, la următoarele două puncte:

A) Isomorfismul (de structură) din teoremele Schreier-Zassenhaus clasice *este o consecinţă a normalităţii* α.

B) Seminormalitatea aparţine unei subspecii mai cuprinzătoare a normalităţii β, anume, *normalitatea secundară* [1]), sau *binormalitatea*, pentru care demonstrăm o teoremă Jordan-Hölder, complet analogă celei demonstrate de Halanay [2] în cazul seminormalităţii.

Notaţiile şi definiţiile din prezenta lucrare sunt (înafară de menţiune contrară) cele din lucrarea [1].

CAPITOLUL I

NORMALITATEA α ŞI TEOREMA JORDAN-HÖLDER

§ 1. Normalitatea α şi isomorfismul de structură

1° Lanţuri α-normale. In legătură cu lanţurile α-normale, Ore [3] a demonstrat următoarea propoziţie binecunoscută:

---

[1]) Termenul de normalitate secundară ne-a fost sugerat de Prof. D. Barbilian; noi preferăm termenul de binormalitate, ca mai scurt.

Două lanțuri α-normale cu extremități comune, se transformă prin rafinările Zassenhaus în două lanțuri în care câturile conjugate sunt asemenea.

Intr'un articol publicat în 1946, Prof. D. Barbilian [4] întărește enunțul teoremei precedente cu afirmația că, după rafinare, lanțurile sunt de aceeași lungime (veritabilă); de aici, el a dedus o teoremă de descompunere de tipul Jordan-Dedekind, pentru care trimitem la articolul citat (p. 31).

In acest paragraf, ne propunem să întărim, mai departe, enunțul teoremei lui Ore cu această afirmație remarcabilă și oarecum neașteptată că, în lanțurile rafinate, câturile conjugate sunt nu numai asemenea, *dar au chiar structuri isomorfe.*

Ținând seama de acest fapt, rezultă că teorema Schreier-Zassenhaus pentru lanțuri seminormale demonstrată de Ore, este ameliorată, în timp ce teorema Schreier-Zassenhaus pentru lanțuri seminormale *demonstrată de* A. Halanay *(loc. cit.)* este pusă în adevărata sa lumină: ceea ce seminormalitatea aduce esențial nou, este proprietatea de covarianță a (semi) normalității față de rafinările Zassenhaus.

Este necesar să adăugăm că rezultatul nostru a fost obținut în lumina unor idei exprimate (pentru prima dată, cel puțin din punct de vedere abstract) de către algebristul sovietic A. I. Uzcov, [5]: este vorba în special de proprietatea de *accesibilitate normală* ca un *aspect complementar* al proprietății unui lanț de a fi normal.

2°. Lemmă fundamentală. Fie într'o structură arbitrară $\mathcal{S}$ $\Omega \supset a$ *un interval α-normal și* $\Omega \supset b_1 \supset b_2 \supset \ldots \supset b_j \supset \ldots \supset b_{s-1} \supset b_s$ (s, număr natural *arbitrar*) *un lanț α-normal arbitrar*; *avem conexiunea monotonă*[1] *perfectă (așa dar, isomorfismul de structură).*

$$a \cup b_s/a \rightleftarrows b_s/a \cap b_s$$

Demonstrăm lemma printr'o inducție completă:

Pentru $s = 1$, lemma se verifică, deoarece revine la rezultatul nostru din [1], cap. II, 8°. Să admitem că propoziția este adevărată pentru 2, 3, ..., $\mathcal{S}-1$ și să dovedim că, în acest caz, ea este adevărată și pentru s.

Or, prin ipoteza recurenței, avem:

$$\ldots a \cup b_{s-1}/a \rightleftarrows b_{s-1}/a \cap b_{s-1} \qquad (1)$$

Pe de altă parte, $a \cap b_{s-1}$ este, conform unei teor eme a lui Ore ([1] cap. II. 7°), α-normal în b_{s-1} și cum b_s este de asemenea α-normal în b_{s-1} (ipoteza lemmei!) vom putea scrie pe baza rezultatului meu din [1], amintit mai sus:

$$(a \cap b_{s-1}) \cup b_s/a \cap b_{s-1} \rightleftarrows b_s/a \cap b_s \qquad (2)$$

---

1) Reamintim odată pentru totdeauna că ori de câte ori vorbim de conexiunea monotonă mixtă dintre $a \cup b/a$ și $b/a \cap b$, o înțelegem pe aceea definită de $\chi(p) = b \cap p$; $p \in a \cup b/a$ și $\varphi(p') = a \cup p'$; $p' \in b/a \cap b$.

Să considerăm conexiunea monotonă (perfectă, conform cu (1)!)

$$\begin{aligned} &a \cup b_{s-1} \supset a \cup b_s \supset a \\ &b_{s-1} \supset (a \cap b_{s-1}) \cup b_s \supset a \cap b_{s-1}; \end{aligned} \tag{1'}$$

este clar că în acest isomorfism de structură, $a \cup b_s$ și $(a \cap b_{s-1}) \cup b_s$ sunt elemente homoloage.

Așa dar, putem scrie ([1], cap. I, 3°, observație importantă).

$$a \cup b_s/a \overset{\longrightarrow}{\longleftarrow} (a \cap b_{s-1}) \cup b_s/a \cap b_{s-1}. \tag{3}$$

Comparând pe (3) cu (2) rezultă (transivitatea isomorfismului)

$$a \cup b_s/a \overset{\longrightarrow}{\longleftarrow} b_s/a \cap b_s. \tag{4}$$

Rămâne să dovedim *(aceasta este esențial!)* că isomorfismul (4) este indus de operațiile

$$\left.\begin{aligned} &0(p) = b_s \cap p, \quad p \in a \cup b_s/a \\ &\psi(p') = a \cup p', \quad p' \in b_s/a \cap b_s \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

care definesc conexiunea monotonă mixtă dintre $a \cup b_s/a$ și $b_s/a \cap b_s$.

Or, conexiunea monotonă perfectă (3) este definită (conform observației din [1], amintite mai sus [1]), de operațiile:

$$\left.\begin{aligned} &\chi(p) = b_{s-1} \cap p, \quad p \in a \cup b_s/a \\ &\varphi(p'') = a \cup p'', \quad p'' \in (a \cap b_{s-1}) \cup b_s/a \cap b_{s-1} \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

adică exact de aceleași operații care definesc conexiunea monotonă mixtă din (1'), respectiv (1), (dar limitate la $a \cup b_s/a$ și $(a \cap b_{s-1}) \cup b_s/a \cap b_{s-1}$!).

In al doilea rând, conexiunea monotonă (2) este definită evident de operațiile

$$\left.\begin{aligned} &\sigma(p'') = b_s \cap p'' \quad , \quad p'' \in (a \cap b_{s-1}) \cup b_s/a \cap b_{s-1} \\ &\tau(p') = (a \cap b_{s-1}) \cup p', \quad p' \in b_s/a \cap b_s \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Să compunem cele două conexiuni monotone (perfecte) (3), (2), definind prin mijlocirea lui (3'), (2'), operațiile:

$$\begin{aligned} &0(p) = \sigma\chi(p) = b_s \cap (b_{s-1} \cap p) = b_s \cap p \quad , \quad p \in a \cup b_s/a \\ &\psi(p') = \varphi\tau(p') = a \cup [(a \cap b_{s-1}) \cup \ '] = a \cup p', \quad p' \in b_s/a \cap b_s \end{aligned}$$

---

[1]) Faptul se poate verifica și direct, observând că operațiile ce definesc pe (3) sunt

$$\begin{aligned} &\varphi(p'') = a \cup p'', \quad p'' \in (a \cap b_{s-1}) \cup b_s/a \cap b_{s-1} \\ &\chi(p) = [(a \cap b_{s-1}) \cup b_s] \cap p, \quad p \in a \cup b_s/a \end{aligned}$$

dar $(a \cap b_{s-1}) \cup b_s = b_{s-1} \cap (a \cup b_s)$ căci a este α-normal în Ω. Deci

$$\chi(p) = b_{s-1} \cap (a \cup b_s) \cap p = b_{s-1} \cap p, \quad p \in a \cup b_s/a.$$

Aceste operații θ, ψ sunt tocmai cele din (4'), adică acelea care definesc conexiunea monotonă dintre $a \cup b_s/a$ și $b_s/a \cap b_s$. Cum conexiunile (3) și (2) sunt perfecte și cum este evident că, compunerea a două conexiuni monotone perfecte este tot o conexiune monotonă perfectă [1]) rezultă că putem scrie

$$a \cup b_s/a \rightleftarrows b_s/a \cap b_s, \quad (\text{mod } \theta, \psi)$$

Cu aceasta, este dovedit că recurența funcționează și lemma este demonstrată.

Consecință imediată. Mai întâi o definiție: dacă $\Omega \supset x$ și dacă există între Ω și x un lanț α-normal finit, vom spune că Ω *este α-normal și finit accesibil din* x. Noțiunea este datorită, în esență, lui A. I. Uzcov *(loc. cit.)*, care o definește însă pentru o relație *abstractă* de normalitate.

Cu această noțiune, consecința în chestiune se enunță astfel: *dacă* $\Omega \supset$ x *și* $\Omega \supset$ a *astfel ca* Ω *să fie α-normal și finit accesibil din* x *(dar altfel* x *este arbitrar) și astfel ca* Ω/a *să fie α-normal, atunci* $a \cup$ x/a $\rightleftarrows$ x/a $\cap$ x.

Această afirmație nu este, în fond, decât un alt mod de a enunța lemma precedentă.

3°. Teorema Schreier-Zassenhaus *pentru normalitatea* α. Fie, într'o structură arbitrară $\mathfrak{S}$,

$$\left.\begin{aligned} &a_0 \supset a_1 \supset \ldots \supset a_{i-1} \supset a_i \supset \ldots \supset a_r \\ &b_0 \supset b_1 \supset \ldots \supset b_{j-1} \supset b_j \supset \ldots \supset b_s \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

două lanțuri α-normale, *cu extremități comune*: $a_0 = b_0$, $a_r = b_s$.

Rafinările Zassenhaus ale lanțurilor (5), le definim prin:

$$a_{ij} = a_i \cup (a_{i-1} \cap b_j), \quad (i = 1,2,\ldots,r;\ j = 0,1,2,\ldots,s)$$

$$b_{ji} = b_j \cup (b_{j-1} \cap a_i), \quad (i = 0,1,2,\ldots,r;\ j = 1,2,\ldots,s)$$

Așa fiind, teorema Schreier-Zassenhaus în chestiune, are următorul enunț:

Două lanțuri (5) *se transformă prin rafinările Zassenhaus în două lanțuri*: A. *Cu câturile conjugate asemenea* (Ore); B. *De aceeași lungime veritabilă* (Barbilian); C. *In care câturile conjugate sunt chiar cu structuri isomorfe*; D. *In care fiecare intercalar* a_{ij}, *respectiv* b_{ji} *este α-normal relativ la structura câtului* $a_{i,j-1}/a_i$, *respectiv* $b_{j,i-1}/b_j$.

Firește, avem de justificat numai punctele *C* și *D* din acest enunț. Să notăm ca de obiceiu:

$$a_{i-1} = M, a_i = m, b_{j-1} = N, b_j = n$$

Câturile conjugate sunt $a_{i,i-1}/a_{ij}$, $b_{j,i-1}/b_{ji}$ sau, ceea ce este tot una, $m \cup S/m \cup T$ respectiv $n \cup S/n \cup T$ unde am notat:

$$S = M \cap N, \quad T = (M \cap n) \cup (N \cap m)$$

Or, este evident că $M \cap N = a_{i-1} \cap b_{j-1}$ este legat de $M = a_{i-1}$ printr'un lanț α-normal finit, anume

$$a_{i-1} \supset a_{i-1} \cap b_1 \supset a_{i-1} \cap b_2 \supset \ldots \supset a_{i-1} \cap b_{j-1}$$

---

1) Avem, de exemplu, $\theta\psi(p') = \sigma\chi\varphi\tau(p') = \sigma \cdot \chi\varphi \cdot \tau(p') = \sigma\tau(p') = p'$, etc.

(Aceasta rezultă simplu din proprietatea de covarianță *prin secțiune* a normalității α: dacă $x \supset y$ este interval α-normal, iar $a \in \mathfrak{S}$, atunci $a \cap x/a \cap y$ este încă interval α-normal). Incât putem scrie pe baza lemei precedente

$$m \cup S/m \rightleftarrows S/m \cap S \ , \quad \begin{cases} m \cup S \supset m \cup T \supset m \\ S \supset T \supset m \cap S \end{cases} \tag{6}$$

Aceleași observații sunt evident valabile pentru $M \cap N = a_{i-1} \cap b_{j-1}$ și $N = b_{j-1}$; rezultă că avem conexiunea monotonă perfectă

$$n \cup S/n \rightleftarrows S/n \cap S \ , \quad \begin{cases} n \cup S \supset n \cup T \supset n \\ S \supset T \supset n \cap S \end{cases} \tag{6'}$$

Din (6), (6') rezultă evident

$$m \cup S/m \cup T \rightleftarrows S/T \rightleftarrows n \cup S/n \cup T.$$

Aceste relații demonstrează punctul C al teoremei.

In ceea ce privește punctul D al teoremei, vom observa că deoarece $M \cap N/M \cap n = S/n \cap S$ și $N \cap M/N \cap m = S/m \cap S$ sunt câturi α-normale, câtul S/T este de asemenea α-normal, *dar relativ la structura* $S/m \cap S$ (respectiv $S/n \cap S$); cu alte cuvinte, T este α-normal în structura $S/m \cap S$ (respectiv $S/n \cap S$). Argument: [1], cap. II, 7°, 8°.

Rezultă atunci din isomorfismele (6), (6') că $m \cup T$ este α-normal în structura $m \cup S/m$ și $n \cup T$ este α-normal în structura $n \cup S/n$, căci un isomorfism de structură conservă evident proprietatea de a fi α-normal.

Cu aceasta, punctul D este și el stabilit, iar teorema complet demonstrată.

4°. Teorema Jordan-Hölder *pentru normalitatea* α.

Pentru a enunța o asemenea teoremă, introducem noțiunea de *interval α-normal relativ prim*; numim astfel, un interval α-normal veritabil $x > y$, pentru care orice a cu $x \supset a \supset y$ și α-normal *relativ la structura câtului* x/y, are proprietatea: *sau* a = x, *sau* a = y.

Este evident că noțiunea de interval α-normal relativ prim este mai generală decât aceea de interval absolut α-normal [4], dar este mai particulară decât aceea de interval α-normal prim.

Numim *șir α-normal relativ*, un lanț α-normal veritabil ale cărui intervale sunt toate α-normal relativ prime.

Putem enunța acum teorema Jordan-Hölder în chestiune:

Două șiruri α-normale relative, cu extremități comune, au aceeași lungime și intervalele isomorfe (într'o anumită ordine).

Această propoziție se deduce prin tehnica uzuală, din teorema Schreier-Zassenhaus demonstrată în 3°; ea constitue, după cum se observă cu ușurință, generalizarea firească a teoremei Jordan-Dedekind asupra șirurilor absolut α-normale, demonstrată de Prof. D. Barbilian (vezi 1°).

Vom observa, în sfârșit, că în cadrul normalității α se poate enunța și o teoremă Jordan de accesibilitate (teorema lui Jordan, *a doua*!), cu următorul conținut:

Dacă un interval α-normal veritabil $x > y$ *poate fi rafinat până la un șir α-normal relativ, atunci, prin orice* a *cu* $x \supset a \supset y$ *și cu* x/a = *α-normal, trece un șir α-normal relativ echivalent cu primul* (adică de aceeași lungime cu acesta și cu factorii isomorfi într'o anumită ordine cu ai acestuia).

§ 2. Despre diferite subspecii ale normalității α

5°. Observații cu caracter axiomatic asupra unor rezultate din [1]: In [1], cap. II, am demonstrat, între altele, următoarele proprietăți:

a) Dacă α este seminormal I în $\mathcal{S}$, iar $\overline{\alpha}$ cu $\overline{\alpha} \supset \alpha$ este α-normal în R^{α}, atunci α este α-normal chiar în $\mathcal{S}$.

b) Dacă α' este seminormal I în $\mathcal{S}$, iar α este α-normal în $\mathcal{S}$, atunci, $\alpha' \cup \alpha$ este încă α-normal în $\mathcal{S}$.

c) Dacă α este seminormal I în $\mathcal{S}$, iar $x \supset y$ este un interval α-normal, atunci $\alpha \cup x \supset \alpha \cup y$ este de asemenea un interval α-normal.

La aceste proprietăți este de adăugat următoarea, importantă pentru normalitățile lui O. Ore (proprietatea de *retronormalitate absolută*).

d) Dacă α este normal în $\mathcal{S}$ (adică seminormal, respectiv α-normal, β-normal), atunci el este normal în *orice* Ω cu $\Omega \supset \alpha$.

Prin mijlocirea proprietăților *a)* și *b)* putem disocia seminormalitatea, precum urmează:

a') *Normalitatea* α_K (normalitatea α, *à la Kurosch*). Un element α α-normal în $\mathcal{S}$, se va zice α_K-*normal în* $\mathcal{S}$ dacă și numai dacă din $\overline{\alpha} \supset \alpha$ cu $\overline{\alpha}$, α-normal în R^{α} rezultă că $\overline{\alpha}$ este α-normal chiar în $\mathcal{S}$.

Pentru această normalitate sunt valabile următoarele două proprietăți, a căror demonstrație este imediată:

Propoziția 1. Dacă α este α_K-normal în $\mathcal{S}$, iar $\overline{\alpha}$ cu $\overline{\alpha} \supset \alpha$ este α_K-normal în R^{α}, atunci $\overline{\alpha}$ este α_K-normal chiar în $\mathcal{S}$.

Propoziția 2. Dacă α_0 este α_K-normal în $\mathcal{S}$, iar α este α-normal în $\mathcal{S}$, atunci $\alpha_0 \cup \alpha$ este α-normal în $\mathcal{S}$.

In general, α_K-normalitatea nu este o retronormalitate; dimpotrivă, dacă cerem ca α_K-normalitatea să fie o retronormalitate, atunci se poate demonstra și propoziția 3.

Propoziția 3. Dacă α, α' sunt α_K-normale în $\mathcal{S}$, atunci $\alpha \cap \alpha'$ este α_K-normal în α (și α').

b') Normalitatea α_Δ (normalitate α, *dilatantă*). Un element α, α-normal în $\mathcal{S}$ este α_Δ-normal în $\mathcal{S}$ dacă și numai dacă pentru orice α', α-normal în $\mathcal{S}$, $\alpha \cup \alpha'$ este de asemenea α-normal în $\mathcal{S}$.

Pentru această normalitate, care în general nu este nici ea retronormalitate, este valabilă propoziția următoare:

Propoziția 1'. Dacă α', α'', sunt α_Δ-normale în $\mathcal{S}$, atunci $\alpha' \cup \alpha''$ este de asemenea α_Δ-normal în $\mathcal{S}$.

Aici se așează observația că uniunea a două elemente α_K-normale este un element α_Δ-normal.

Este clar, conform cu propoziția 2, că α_K-normalitatea este o α_Δ-normalitate. De asemenea, o α_K-retronormalitate este o α_Δ-retronormalitate. Este ușor de dovedit că pentru o α_K-normalitate *care este și o retronormalitate* avem următoarea propoziție:

Două lanțuri α_K-*(retro)normale*[1]) *cu extremități comune se transformă prin*

1) Condiția de retronormalitate poate fi slăbită aici, până la următoarea cerere: fie $\Omega \supset \alpha$ și $\Omega \supset x$; dacă α este a_K-normal în Ω și dacă Ω este α-normal și finit accesibil din x, atunci α este α_K-normal în $\alpha \cup x$.

rafinările Zassenhaus în două lanțuri α_Δ-(retro) normale de aceeași lungime veritabilă, cu câturi conjugate isomorfe.

Pentru demonstrație, se consideră isomorfismul (6), (respectiv (6')

$$m \cup S \supset m \cup T \supset m$$
$$S \supset T \supset m \cap S$$

unde $m \cup S/m$ este (vezi nota din josul paginei) α_K-normal, iar $m \cup S/m \cup T$ respectiv $S/m \cap S$, α-normal respectiv α_K-normal, cum se arată ușor. Fie a cu $m \cup S \supset a$ și astfel ca $m \cup S/a = \alpha$-normal, dar altfel arbitrar; trebue arătat că $a \cup (m \cup T)$ este încă α-normal în $m \cup S$ (odată cu $m \cup T$ și a).

Or, cum m este α_k-normal în $m \cup S$, rezultă că $\overline{a} = a \cup m$ este α-normal în $m \cup S$, încât este suficient să dovedim că $\overline{a} \cup (m \cup T) = a \cup (m \cup T)$ este α-normal în $m \cup S$. Să aplicăm isomorfismul (6): $\overline{a}$ trece în $\overline{a}'$ cu $S \supset \overline{a}' \supset m \cap S$ și cu $S/\overline{a}' = \alpha$-normal, $m \cup T$ trece în T care este (după cum se poate constata fără nicio dificultate) α_Δ-normal în S.

Cum $\overline{a} \cup (m \cup T)$ trece, prin isomorfism, în $\overline{a}' \cup T$ și cum acest din urmă element este evident α-normal în S, rezultă că $\overline{a} \cup (m \cup T)$ va fi α-normal în $m \cup S/m$ adică, deoarece m este α_K-normal în $m \cup S$, $\overline{a} \cup (m \cup T)$ va fi α-normal chiar în $m \cup S$.

6° Normalitatea α_Σ (normalitate α suprainvariantă).

Folosind acum proprietatea *c)*, putem încă disocia seminormalitatea, și anume:

c') Un element α, α-normal în S, se va zice *α_Σ-normal în S* dacă și numai dacă pentru orice interval $x \supset y$, α-normal, intervalul $\alpha \cup x \supset \alpha \cup y$ este de asemenea α-normal.

Este evident că α-normalitatea suprainvariantă este o retronormalitate; vom arăta însă, în cele ce urmează, că în cadrul α-normalității suprainvariante se poate enunța o teoremă Schreier-Zassenhaus completă (de tip clasic).

Pentru o mai mare generalitate, vom înlocui definiția de mai sus a α_Σ-normalității cu următoarea definiție (mai puțin restrictivă):

c'') Fie $\Omega \supset \alpha$ și $\Omega \supset x \supset y$ cu $\Omega/\alpha =$ α-normal și $x/y = \alpha$-normal, iar Ω, α-normal și finit accesibil din x; vom zice că α este α_Σ-normal în Ω dacă și numai dacă $\alpha \cup x/\alpha \cup y = \alpha$-normal.

Fie $\Omega \supset \Omega' \supset \alpha$ cu $\Omega/\alpha = \alpha_\Sigma$-normal, *în sensul definiției precedente* (c'')!); dacă intercalarul Ω' este arbitrar, proprietatea de retronormalitate nu are, în general, loc.

Dimpotrivă, această proprietate are loc, după cum se constată cu ușurință, pentru toți acei intercalari Ω' care au *cel puțin proprietatea* că Ω este α-normal și finit accesibil din Ω'. In particular, rezultă de aici și din definiția c'') că dacă avem $\Omega \supset \alpha$ și $\Omega \supset x$ cu $\Omega/\alpha = \alpha_\Sigma$-normal și cu Ω α-normal și finit accesibil din x, atunci α este α_Σ-normal în $\alpha \cup x$.

Lemma 1. *Fie $\Omega \supset \alpha$, $\Omega \supset \alpha'$ cu Ω/α, Ω/α' câturi α_Σ-normale; atunci câtul $\Omega/\alpha \cup \alpha'$ este de asemenea α_Σ-normal.*

Intr'adevăr, fie $\Omega \supset \alpha$ și $\Omega \supset a$ cu $\Omega/\alpha = \alpha_\Sigma$-normal și $\Omega/a = \alpha$-normal. Or, deoarece este clar că Ω este α-normal și finit accesibil din a (în mod banal!) rezultă că $\alpha \cup \Omega/\alpha \cup a = \Omega/\alpha \cup a = \alpha$-normal; în particular, rezultă atunci că $\alpha \cup \alpha'$ este α-normal în Ω de îndată ce Ω/α, Ω/α' sunt α_Σ-normale (ipoteza!).

Așa fiind, să considerăm $\Omega \supset x \supset y$ cu $x/y = \alpha$- normal și cu Ω, α- normal și finit accesibil din x, așa dar avem lanțul α- normal.

$$\Omega \supset x_1 \supset x_2 \supset \cdots \supset x_{r-1} \supset x \supset y.$$

Conform definiției c') și observației precedente ($\alpha \cup a$, α- normal în Ω !), rezultă că lanțul

$$\Omega \supset \alpha' \cup x_1 \supset \alpha' \cup x_2 \supset \cdots \supset \alpha' \cup x_{r-1} \supset \alpha' \cup x \supset \alpha' \cup y \qquad (7)$$

este încă α- normal, și ca atare câtul $\alpha \cup (\alpha' \cup x)/\alpha \cup (\alpha' \cup y)$ va fi de asemenea (căci din (7) rezultă că Ω este α- normal și finit accesibil din $\alpha' \cup x$).

Cu aceasta, lemma este demonstrată, căci am arătat deja că $\alpha \cup \alpha'$ este α- normal în Ω.

Lemma 2. *Fie* $\Omega \supset \alpha$ *și* $\Omega \supset x$ *cu* $\Omega/\alpha = \alpha_\Sigma$- *normal și cu* Ω, α- *normal și finit accesibil din* x, *atunci* $\alpha \cap x$ *este* α_Σ- *normal în* x.

Într'adevăr, fie $x \supset y \supset y'$ cu $y/y' = \alpha$- normal și cu x, α- normal și finit accesibil din y; trebue să arătăm că $(\alpha \cap x) \cup y/(\alpha \cap x) \cup y' = \alpha$- normal.

Or, este clar că Ω este α- normal și finit accesibil din y; ca atare, câtul $\alpha \cup y/\alpha \cup y'$ este α- normal și deci câtul $x \cap (\alpha \cup y) / x \cap (\alpha \cap y')$ este (conform proprietăților generale ale normalității α), de asemenea α- normal. Dar avem, evident

$$x \cap (\alpha \cup y) = (x \cap \alpha) \cup y, \quad x \cap (\alpha \cup y') = (x \cap \alpha) \cup y.$$

Incât, este clar că $\alpha \cap x$ este α_Σ- normal în x, Q.E.D.

Lemma 3. *Fie* $\Omega \supset \alpha$ *și* $\Omega \supset$ x *cu* $\Omega/\alpha = \alpha_\Sigma$- *normal și cu* Ω α- *normal și finit accesibil din* x; *fie, de asemenea* $x \supset p' \supset \alpha \cap x$ *cu* $x/p' = \alpha_\Sigma$- *normal*; *atunci*, $\alpha \cup x/\alpha \cup p' = \alpha_\Sigma$- *normal.*

Într'adevăr, să considerăm conexiunea monotonă perfectă (2°)

$$\begin{matrix} \alpha \cup x \supset \alpha \cup p' \supset \alpha \\ x \supset p' \supset \alpha \cap x \end{matrix} \qquad (8)$$

Pentru simplificarea scrierii să notăm $\alpha \cup p' = \bar{\alpha}$: *este clar că* $\bar{\alpha}$ *este deja* α- *normal în* $\alpha \cup x$. Fie $\alpha \cup x \supset \xi \supset \eta$ cu $\xi/\eta = \alpha$- normal și cu $\alpha \cup x$, α- normal și finit accesibil din ξ. Este clar că $\bar{\xi}/\bar{\eta} = \alpha \cup \xi/\alpha \cup \eta = \alpha$- normal și că $\alpha \cup x$ este α- normal și finit accesibil din $\bar{\xi}$; cum $\alpha \cup x \supset \bar{\xi} \supset \bar{\eta} \supset \alpha$, rezultă că, dacă aplicăm isomorfismul de structură (8) și ținem seama de proprietățile generale ale normalității α, obținem $x \supset \bar{\xi}' \supset \bar{\eta}' \supset \alpha \cap x$ (unde firește $\bar{\xi}' = x \cap \xi$, $\bar{\eta}' = x \cap \bar{\eta}$) cu $\bar{\xi}' / \bar{\eta}' = \alpha$- normal și cu x, α- normal și finit accesibil din $\bar{\xi}'$.

Or, p' este α_Σ- normal în x, deci $p' \cup \bar{\xi}'/p' \cup \bar{\eta}'$ este α- normal, iar x este α- normal și finit accesibil din $p' \cup \bar{\xi}'$. Această din urmă împrejurare face ca Ω însuși să fie α- normal și finit accesibil din $p' \cup \bar{\xi}'$. Rezultă că $\alpha \cup p' \cup \bar{\xi}'/\alpha \cup p' \cup \bar{\eta}'$ este un cât α- normal; dar avem

$$\alpha \cup p' \cup \bar{\xi}' = (\alpha \cup p') \cup (\alpha \cup \bar{\xi}') = \bar{\alpha} \cup \bar{\xi}$$
$$\alpha \cup p' \cup \bar{\eta}' = (\alpha \cup p') \cup (\alpha \cup \bar{\eta}') = \alpha \cup \bar{\eta}$$

Așa dar, $\bar{\alpha} \cup \bar{\xi}/\bar{\alpha} \cup \bar{\eta} = \bar{\alpha} \cup \xi/\bar{\alpha} \cup \eta$ este α- normal, ceea ce înseamnă că $\alpha \cup p' = \bar{\alpha}$ este α_Σ- normal în $\alpha \cup x$, Q.E.D.

Lemele precedente sunt suficiente pentru a conchide la următoarea propoziție (care constitue o primă generalizare a teoremei Schreier-Zassenhaus pentru seminormalitate, obținută de H a l a n a y):

Teorema Schreier-Zassenhaus pentru α- normalitatea suprainvariantă.

Două lanțuri α- normale suprainvariante, ca extremități comune, se transformă prin rafinările Zassenhaus în două lanțuri de asemenea α- normale suprainvariante, de aceeași lungime veritabilă și ale căror câturi conjugate sunt cu structuri isomorfe.

Urmează imediat, prin tehnica uzuală, teorema Jordan-Hölder pentru șiruri α_Σ - normale.

Incheind această critică sumară a normalității α, vom observa că ceea ce asigură succesul unei teoreme Schreier-Zassenhaus pentru lanțuri α_Σ-normale este luarea împreună a proprietății de suprainvarianță (a normalității α_Σ față de normalitatea α) și a isomorfismului de structură din teorema Schreier-Zassenhaus pentru lanțuri α-normale, demonstrată în 3°; aceasta înseamnă că pentru α_Σ-normalitatea *definită în c')* nu putem spera la o proprietate de tipul:

Dacă α este α_Σ-normal în $\mathcal{S}$, iar intervalul $x \supset y$ este α_Σ-normal, *dar altfel arbitrar*, atunci $\alpha \cup x \supset \alpha \cup y$ este de asemenea α_Σ-normal.

In concluzie: α_Σ-normalitatea *definită* în *c')*, nu este (contrar aparențelor) o normalitate unitară [4].

§ 3. Despre lanțuri α-normale centrate

7°. D e f i n i ț i i. In acest paragraf ne propunem să demonstrăm unele propoziții care constitue generalizări ale lemmei din 2°; în legătură cu aceste propoziții, introducem noțiunea de *lanț α-normal centrat* (vezi definiția mai jos) care generalizează noțiunea obișnuită de lanț α-normal și care posedă unele proprietăți demne de reținut. In teoria care urmează, joacă un important rol caracterul de autodualitate al normalității α; ca atare, pentru a evita confuziile, vom enunța toate definițiile și proprietățile care stau la baza cercetării din prezentul paragraf, *împreună* cu dualele lor.

Fie $\mathcal{S}$ o structură arbitrară și $x \supset y$ un interval din $\mathcal{S}$. Spunem că, intervalul $x \supset y$ (sau câtul x/y) este descendent α-normal, dacă y este α-normal în structura R_x; spunem că intervalul $x \supset y$ (sau câtul x/y) este *ascendent α-normal*, dacă x este α- normal în structura R^y.

Pentru a simplifica terminologia, vom spune interval (cât) α-normal pentru interval (cât) descendent α-normal; de asemenea, vom spune interval (cât) *dual* α-normal pentru interval (cât) ascendent α-normal. Definiții corespunzătoare pentru lanț α-normal, respectiv dual α-normal.

P. trivit acestui limbaj, reamintim că:

a) Dacă $x \cup y/x = \alpha$-normal atunci, $y/x \cap y = \alpha$-normal; dacă $y/x \cap y =$ $=$ dual α-normal, atunci, $x \cup y/x =$ dual α-normal (O r e).

b) Dacă a, b, sunt α-normale în $\mathcal{S}$, atunci $a \cup b/a$, $a \cup b/b$ sunt dual α-normale, în timp ce $a/a \cap b$, $b/a \cap b$ sunt α-normale; în plus, avem conexiunea monotonă perfectă $a \cup b/a \rightleftarrows b/a \cap b$ (și $a \cup b/b \rightleftarrows a/a \cap b$), [1], cap. II, 8°.

O altă formă a propozițiilor *a*), (utilă în aplicații) este următoarea, care este binecunoscută:

a') Dacă $x/y =$ α-normal, iar $a \in \mathcal{S}$, atunci $a \cap x/a \cap y =$ α-normal; dacă $x/y =$ dual α-normal, iar $a \in \mathcal{S}$, atunci $a \cup x/a \cup y$ dual α-normal.

Iată acum definiția lanțului α-normal centrat; numim astfel, un lanț

$$a_{-p} \supset a_{1-p} \supset a_{2-p} \supset \ldots \supset a_{-2} \supset a_{-1} \supset a \supset a_1 \supset \ldots \supset a_{r-1} \supset a_r$$

în care

A. *Lanțul parțial* $a \supset a_1 \supset a_2 \supset \ldots \supset a_{r-1} \supset a_r$ *este* α*-normal.*

B. *Lanțul parțial* $a_{-p} \supset a_{1-p} \supset \ldots \supset a_{-1} \supset a$ *este dual* α*-normal.*

C. *Elementul* a *este* α*-normal în întreaga structură* $\mathcal{S}$; *el poartă numele de termen central al lanțului considerat.*

8°. Teoremă. *Două lanțuri* α*-normale centrate pot fi întregite până la două lanțuri tot* α*-normale centrate, însă cu extremități comune, astfel că lanțurile date apar ca lanțuri parțiale ale noilor lanțuri.*

Intr'adevăr, fie

$$a_{-p} \supset a_{1-p} \supset \ldots \supset a_{-1} \supset a \supset a_1 \supset \ldots \supset a_{r-1} \supset a_r$$
$$b_{-q} \supset b_{1-q} \supset \ldots \supset b_{-1} \supset b \supset b_1 \supset \ldots \supset b_{s-1} \supset b_s$$

două lanțuri α-normale centrate.

Conform propoziției *a'*), este clar că lanțurile

$$a \supset a_1 \supset \ldots \supset a_{r-1} \supset a_r \supset b \cap a_r \supset b_1 \cap a_r \supset \ldots \supset b_{s-1} \cap a_r \supset b_s \cap a_r$$
$$b \supset b_1 \supset \ldots \supset b_{s-1} \supset b_s \supset a \cap b_s \supset a_1 \cap b_s \supset \ldots \supset a_{r-1} \cap b_s \supset a_r \cap b_s$$

sunt α-normale, în timp ce lanțurile

$$a_{-p} \cup b_{-q} \supset a_{1-p} \cup b_{-q} \supset \ldots \supset a_{-1} \cup b_{-q} \supset b_{-q} \supset b_{1-q} \supset \ldots \supset b_{-1} \supset b$$
$$b_{-q} \cup a_{-p} \supset b_{1-q} \cup a_{-p} \supset \ldots \supset b_{-1} \cup a_{-p} \supset a_{-p} \supset a_{1-p} \supset \ldots \supset a_{-1} \supset a$$

sunt dual α-normale. Teorema este demonstrată.

9°. Teoremă. *Fie* a *un element* α*-normal în structura* $\mathcal{S}$, $\bar{a}$ *un element cu* $\bar{a} \supset a$ *și* α*-normal în structura* R^a; *fie, de asemenea,*

$$b \supset b_1 \supset \ldots \supset b_j \supset \ldots,$$

un lanț α*-normal în care primul termen,* b, *este* α*-normal în* $\mathcal{S}$.

Atunci :

1. *Avem conexiunea monotonă perfectă* (j, *număr natural arbitrar*)

$$\bar{a} \cup b_j/\bar{a} \rightleftarrows b_j/\bar{a} \cap b_j$$

2. $\bar{a} \cap b_j$ *este* α*-normal în structura câtului* $b_j/a \cap b$ *(în care* $\bar{a} \cap b_j$ *este cuprins*);

3. $\bar{a} \cup b_j$ *este* α*-normal în structura câtului* $\bar{a} \cup b_{j-1}/\bar{a}$ *(în care* $\bar{a} \cup b$ *este cuprins)* [1].

Vom demonstra teorema, printr'o inducție finită. Verificăm mai întâi faptul că teorema este adevărată pentru prima treaptă a inducției, fie $j = 0$, $(b_0 = b)$.

[1]) Se recunoaște fără nicio dificultate că această propoziție constitue o generalizare a lemmei din 2°.

Intr'adevăr, conform cu propoziția *a)* din acest aliniat, elementul $a \cup b$ este α-normal în structura R^a; în acest caz, putem scrie, conform cu *b)*, conexiunea monotonă perfectă (gândită în structura R^a!)

$$\bar{a} \cup (a \cup b)/\bar{a} \rightleftarrows a \cup b/\bar{a} \cap (a \cup b) \tag{9}$$

Cum b este α-normal în $\mathfrak{S}$, avem $\bar{a} \cap (a \cup b) = a \cup (\bar{a} \cap b)$, deci (9) se scrie

$$a \cup b/\bar{a} \rightleftarrows a \cup b/a \cup (\bar{a} \cap b) \tag{9'}$$

Pe de altă parte, avem conexiunea monotonă perfectă

$$\left.\begin{array}{l} a \cup b \supset a \cup (\bar{a} \cap b) \supset a \\ b \supset \bar{a} \cap b \supset a \cap b \end{array}\right\} \tag{10}$$

unde firește, $\bar{a} \cap b$ este omologul lui $a \cup (a \cap b)$ în acest isomorfism (10) și, *ca atare*, deoarece conform cu (9), (9'), $a \cup (\bar{a} \cap b)$ este α-normal în structura câtului $a \cup b/a$, *rezultă că* $\bar{a} \cap b$ *va fi* α*-normal în structura câtului* $b/a \cap b$, *adică, punctul 2 al teoremei se verifică pentru* $j = 0$.

Dar din (10) mai rezultă că avem și

$$a \cup b/a \cup (\bar{a} \cap b) \rightleftarrows b/\bar{a} \cap b \tag{10'}$$

și deci, comparând isomorfismele (9'), (10'), *rezultă isomorfismul*

$$\bar{a} \cup b/\bar{a} \rightleftarrows b/\bar{a} \cap b$$

care (se arată exact ca în 7°, lemma 2), este indus de operațiile ce definesc conexiunea monotonă mixtă dintre câturile $\bar{a} \cup b/\bar{a}$ și $b/\bar{a} \cap b$, încât, *punctul 1 al teoremei noastre se verifică de asemenea pentru* $j = 0$.

In ceea ce privește punctul 3 al teoremei, acesta se verifică în mod banal pentru $j = 0$, căci este clar că pentru *orice* z cu $z \supset b$, $\bar{a} \cup b$, care este α-normal în structura $R^{\bar{a}}$ (propoziția *a*), va fi *a fortiori* α-normal în structura câtului $\bar{a} \cup z/\bar{a}$.

In definitiv, teorema se verifică pentru prima treaptă a inducției, $j = 0$.

Să admitem dar, că ea se verifică pentru toți indicii j mai mici decât un indice $j > 0$ fix (dar arbitrar ales) și să demonstrăm că în acest caz ea se verifică și pentru acest indice j. Așa dar, avem, în particular

$$\bar{a} \cup b_{j-1}/\bar{a} \rightleftarrows b_{j-1}/\bar{a} \cap b_{j-1} \tag{11}$$

în plus, $\bar{a} \cap b_{j-1}$ este α-normal în structura $b_{j-1}/a \cap b_{j-1}$, iar $a \cup b_{j-1}$ este α-normal în structura câtului $\bar{a} \cup b_{j-2}/\bar{a}$.

Infășurările (gândite în structura $R_{b_{j-1}}$!).

$$b_{j-1} \supset \bar{a} \cap b_{j-1} \supset a \cap b_{j-1}$$

$$b_{j-1} \supset b_j ,$$

sunt, în ipotezele precedente, exact în situația celor din enunțul teoremei ($a \cap b_{j-1}$ este asimilabil cu $\bar{a}$, $a \cap b_{j-1}$ cu a, b_j cu b), încât, ținând seama de prima treaptă a recurenței, putem scrie:

$$(\bar{a} \cap b_{j-1}) \cup b_j/\bar{a} \cap b_{j-1} \rightleftarrows b_j/\bar{a} \cap b_j \tag{12}$$

iar $(\bar{a} \cap b_{j-1}) \cap b_j = \bar{a} \cap b_j$ este α-normal în structura câtului $b_j/(a \cap b_{j-1}) \cap b_j = b_j/a \cap b_j$; ultima afirmație arată că la punctul 2 recurența funcționează.

Pe de altă parte, potrivit lui (11), schema

$$\begin{cases} \bar{a} \cup b_{j-1} \supset \bar{a} \cup b_j = \bar{a} \cup b_j \supset \bar{a} \\ b_{j-1} \supset b_{j-1} \cap (\bar{a} \cup b_j) \supset (b_{j-1} \cap \bar{a}) \cup b_j \supset \bar{a} \cap b_{j-1} \end{cases}$$

ne dă $b_{j-1} \cap (\bar{a} \cup b_j) = (b_{j-1} \cap \bar{a}) \cup b_j$ și

$$\bar{a} \cup b_j/\bar{a} \rightleftarrows (\bar{a} \cap b_{j-1}) \cup b_j/\bar{a} \cup b_{j-1}$$

isomorfism care, compus cu (12) ne dă isomorfismul

$$\bar{a} \cup b_j/\bar{a} \rightleftarrows b_j/\bar{a} \cap b_j$$

Recurența funcționează deci și în punctul 1 al teoremei.

Cu privire la punctul 3, este deajuns să observăm că avem (identic)

$$(\bar{a} \cap b_{j-1}) \cup b_j = (\bar{a} \cap b_{j-1}) \cup [(a \cap b_{j-1}) \cup b_j]$$

că $\bar{a} \cap b_{j-1}$ este (potrivit ipotezelor recurenței) α-normal în structura câtului $b_{j-1}/a \cap b_{j-1}$ și că $(a \cap b_{j-1}) \cup b_j$ este α-normal în structura aceluiași cât ; atunci $(\bar{a} \cap b_{j-1}) \cup [(a \cap b_{j-1}) \cup b_j]$ va fi α-normal în structura câtului $b_{j-1}/\bar{a} \cap b_{j-1}$ propoziția *b*) !) și deci, prin isomorfismul (11), $\bar{a} \cup b_j$ va fi α-normal în structura câtului $\bar{a} \cup b_{j-1}/\bar{a}$.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

10°. Teoremă. *Fie* a, b *două elemente* α*-normale în structura* $\S$ *și*

$$\ldots \supset a_{-p} \supset a_{1-p} \supset \ldots \supset a_{-1} \supset a$$
$$b \supset b_1 \supset \ldots \supset b_{s-1} \supset b_s \supset \ldots$$

două lanțuri, primul dual α*-normal, al doilea* α*-normal.*
Atunci:

1. *Avem conexiunea monotonă perfectă* k, j *numere naturale arbitrare*)

$$a_{-k} \cup b_j/a_{-k} \rightleftarrows b_j/a_{-k} \cap b_j$$

2. $a_{-k} \cap b_j$ *este* α*-normal în structura câtului* $b_j/a_{1-k} \cap b_j$.
3. $a_{-k} \cup b_j$ *este* α*-normal în structura câtului* $a_{-k} \cup b_{j-1}/a_{-k}$.

Pentru demonstrație, vom aplica din nou un raționament prin inducție finită (*inducție după* k).

Teorema 3 se verifică pentru prima treaptă a inducției, fie $k = 1$, căci, în acest caz, enunțul său coincide cu enunțul teoremei din 9°. Să admitem deci că ea se verifică pentru toți indicii k mai mici decât un indice $k > 1$ fix (dar arbitrar ales), așa dar admitem că, în particular, avem:

$$a_{1-k} \cup b_j/a_{1-k} \rightleftarrows b_j/a_{1-k} \cap b_j \qquad (13)$$

că $a_{1-k} \cap b_j$ este α-normal în structura câtului $b_j/a_{2-k} \cap b_j$ și că $a_{1-k} \cup b_j$ este α-normal în structura câtului $a_{1-k} \cup b_{j-1}/a_{1-k}$ $(j \geqslant 1)$.

Din ultima ipoteză rezultă că lanțul

$$a_{1-k} \cup b \supset a_{1-k} \cup b_1 \supset \ldots \supset a_{1-k} \cup b_{j-1} \supset a_{1-k} \cup b_j$$

gândit în substructura $R^{a_{1-k}}$, este α-normal în această substructură; cum pe de altă parte, capătul $a_{1-k} \cup b$ al lanţului precedent este el însuşi α-normal în aceeaşi substructură $R^{a_{1-k}}$ în care este şi a_{-k}, urmează că putem aplica lemma din 2° şi putem scrie

$$a_{-k} \cup (a_{1-k} \cup b_j)/a_{-k} \leftrightarrows a_{1-k} \cup b_j/a_{-k} \cap (a_{1-k} \cup b_j) \tag{13'}$$

Dar conform cu (13), rezultă din schema

$$\left.\begin{array}{c} a_{1-k} \cup b_j \supset a_{-k} \cap (a_{1-k} \cup b_j) \supset (a_{-k} \cap b_j) \cup a_{1-k} \supset a_{1-k} \\ b_j \supset a_{-k} \cap b_j = a_{-k} \cap b_j \supset a_{1-k} \cap b_j \end{array}\right\} \tag{13''}$$

că
$$a_{-k} \cap (a_{1-k} \cup b_j) = (a_{-k} \cap b_j) \cup a_{1-k}$$

şi că
$$a_{1-k} \cup b_j/a_{-k} \cap (a_{1-k} \cup b_j) \leftrightarrows b/a_{-k} \cap b_j$$

isomorfism care, compus cu (13'), ne dă isomorfismul

$$a_{-k} \cup b_j/a_{-k} \leftrightarrows b_j/a_{-k} \cap b_j.$$

Aşa dar, în punctul 1 al teoremei 3, recurenţa funcţionează; că ea funcţionează de asemenea şi în punctul 2 al teoremei în chestiune, aceasta rezultă din (13') şi din schema (13'') a isomorfismului (13). In fine, recurenţa funcţionează şi în punctul 3 al teoremei; aceasta rezultă, în esenţă, din faptul că ea funcţionează deja în punctele 1 şi 2 (pentru amănunte, vezi demonstraţia punctului 3 al teoremei 2).

Cu aceasta, teorema este demonstrată; *a posteriori* ea exprimă o serie de proprietăţi ale lanţurilor α-normale centrate, dintre care cea mai importantă este proprietatea de isomorfism de structură dela punctul 1 al teoremei.

CAPITOLUL II

NORMALITATEA β ŞI TEOREMA JORDAN-HÖLDER[1])

11°. Conceptul de binormalitate. In paragraful de faţă vom studia sub numele de *binormalitate* (*normalitate secundară*) o anumită slăbire a *seminormalităţii lui Ore, considerată ca subspecie a normalităţii* β, arătând că în acest cadru mai larg se poate demonstra o teoremă Schreier-Zassenhaus care generalizează pe aceea a lui Halanay pentru seminormalitate.

Iată acum definiţia noului concept:

Fie $\Omega \supset \beta$ şi $\Omega \supset b$ *cu* $\Omega/\beta = \beta$-*normal şi cu* Ω, β-*normal şi finit accesibil din* b[2]) (dar altfel b este arbitrar); vom spune că β este *binormal* în Ω dacă şi numai dacă avem conexiunea monotonă perfectă

$$\beta \cup b/\beta \leftrightarrows b/\beta \cap b.$$

Este clar că seminormalitatea este o subspecie a binormalităţii, ambele fiind subspecii ale β-normalităţii.

[1]) Peste tot, în acest capitol, este vorba numai de normalitatea β de *prima specie.*
[2]) Aceasta înseamnă, prin definiţie, că există un lanţ β-normal finit care leagă pe Ω de b.

Inainte de a trece la analiza proprietăților binormalității, reamintim următoarele rezultate din lucrarea noastră citată în [1] (rezultatele în chestiune se referă la normalitatea β, *generală*):

R^{β}, atunci β este β-normal în $\mathcal{S}$ și dacă $\overline{\beta}$ cu $\overline{\beta} \supset \beta$, este β-normal în

1. Dacă $\overline{\beta}$ este β-normal în $\mathcal{S}$.

2. Dacă $a \cup b/a$ este β-normal și dacă $a \cup b/a \rightleftarrows b/a \cap b$, atunci $b/a \cap b$ este de asemenea β-normal.

Reamintim, în plus, că elementele β-normale formează, după Ore [3], o semistructură față de uniune.

12°. Lemmă. *Fie* $\Omega \supset \beta$ *și* $\Omega \supset$ b *cu* $\Omega/\beta =$ *binormal și cu* Ω β-*normal și finit accesibil din* b; *atunci câtul* $b/\beta \cap b$ *este de asemenea binormal.*

Intr'adevăr, avem prin definiție $\beta \cup b/\beta \rightleftarrows b/\beta \cap b$; or, β fiind binormal în Ω este, *ipso facto*, β-normal în Ω. Deci câtul $\beta \cup b/\beta$ este β-normal și în consecință (vezi propoziția 2. din 6°), câtul $b/\beta \cap b$ rezultă de asemenea β-normal.

Fie, însă $b' \subset b$ cu b β-normal și finit accesibil din b' (dar altfel b' este arbitrar); pentru a termina demonstrația lemmei mai trebue să arătăm că avem

$$(\beta \cap b) \cup b'/\beta \cap b \rightleftarrows b'/\beta \cap b' \tag{14}$$

Or, deoarece Ω este β-normal și finit accesibil din b, iar b este β-normal și finit accesibil din b', urmează evident că Ω este β-normal și finit accesibil din b'; ca atare, putem scrie:

$$\beta \cup b'/\beta \rightleftarrows b'/\beta \cap b' \tag{15}$$

Dar avem

$$\beta \cup b \supset \beta \cup b' \supset \beta$$
$$b \supset (\beta \cap b) \cup b' \supset \beta \cap b$$

și cum $\beta \cup b/\beta \rightleftarrows b/\beta \cap b$, rezultă:

$$\beta \cap b'/\beta \rightleftarrows (\beta \cup b) \cup b'/\beta \cap b \tag{15'}$$

Din (15), (15') urmează

$$(\beta \cap b) \cup b'/\beta \cap b \rightleftarrows b'/\beta \cap b'$$

adică tocmai isomorfismul (14).

Rămâne să arătăm că acest isomorfism (14) *este indus de operațiile care definesc conexiunea monotonă mixtă dintre câturile* $(\beta \cap b) \cup b'/\beta \cap b$ *și* $b'/\beta \cap b'$.

Intr'adevăr, operațiile care definesc conexiunea monotonă dintre $\beta \cup b'/\beta$ și $(\beta \cap b) \cup b'/\beta \cap b$ sunt date de:

$$\left.\begin{aligned} &\chi(p) = \beta \cup p; \quad p \in (\beta \cap b) \cup b'/\beta \cap b \\ &\varphi(p'') = [(\beta \cap b) \cup b'] \cap p'' = (\beta \cup b') \cap b \cap p'' = b \cap p''^{1}); \; p'' \in \beta \cup b'/\beta \end{aligned}\right\} \tag{15'_1}$$

Pe de altă parte, operațiile care definesc conexiunea monotonă mixtă dintre $\beta \cup b'/\beta$ și $b'/\beta \cap b'$ sunt date de

$$\left.\begin{aligned} &\sigma(p'') = b' \cap p''; \quad p'' \in \beta \cup b'/\beta \\ &\tau(p') = \beta \cup p'; \quad p' \in b'/\beta \cap b' \end{aligned}\right\} \tag{15_1}$$

[1]) Am aplicat prima condiție Dedekind - Ore din [1].

Să construim operațiile $\theta = \sigma\chi$, $\psi = \varphi\tau$. Este clar că operația θ face trecerea dela $(\beta \cap b) \cup b'/\beta \cap b$ la $b'/\beta \cap b'$ în timp ce operația ψ face trecerea dela $b'/\beta \cap b'$ la $(\beta \cap b) \cup b'/\beta \cap b$; de asemenea, este clar că operațiile θ, ψ sunt monotone.

Explicit operațiile θ, ψ, se scriu:

$$\theta(p) = \sigma\chi(p) = b' \cap (\beta \cup p); \quad p \in (\beta \cap b) \cup b'/\beta \cap b$$

$$\psi(p') = \varphi\tau(p') = b \cap (\beta \cup p'); \quad p' \in b'/\beta \cap b'.$$

Afirmăm că operațiile θ, ψ date de formulele precedente, sunt exact acelea care definesc conexiunea monotonă mixtă dintre câturile $(\beta \cap b) \cup b'/\beta \cap b$ și $b'/\beta \cap b'$.

Intr'adevăr, pentru ψ, aceasta este aproape evident; căci, ținând seama de faptul că avem $\beta \cup b/\beta \rightleftarrows b/\beta \cap b$ și că $b \supset p'$ (deja, $b' \supset p'$!) vom avea, conform primei condiții Dedekind-Ore din [1], cap. I, 6°.

$$\psi(p') = b \cap (\beta \cup p') = (\beta \cap b) \cup p'; \quad p' \in b'/\beta \cap b'.$$

Așa dar, pentru ψ afirmația noastră se verifică; în ceea ce privește pe θ, avem succesiv, ținând seama că $b \supset p$:

$$\theta(p) = b' \cap (\beta \cup p) = b' \cap b \cap (\beta \cup p) = b' \cap [(b \cap \beta) \cup p] =$$

$$= b' \cap p; \quad p \in (\beta \cap b) \cup b'/\beta \cap b$$

căci este clar că $p \supset \beta \cap b$. Incât afirmația noastră este pe deplin verificată.

Pentru a încheia demonstrația, este nevoie să observăm că deoarece conexiunea monotonă mixtă $(\beta \cap b) \cup b'/\beta \cap b \rightleftarrows b'/\beta \cap b'$ (mod θ, ψ) rezultă din compunerea a două conexiuni monotone *perfecte*, va fi ea însăși o conexiune monotonă perfectă (așa dar un isomorfism de structură). In definitiv, este dovedit că $\beta \cap b$ este binormal în b.

13°. Lemmă. *Fie* $\Omega \supset \overline{\beta} \supset \beta$; *dacă* β *este binormal în* Ω *și dacă* $\overline{\beta}$ *este binormal în structura câtului* Ω/β *atunci* $\overline{\beta}$ *este binormal chiar în* Ω.

Intr'adevăr, fie b cu $b \subset \Omega$ și astfel ca Ω să fie β-normal și finit accesibil din b; trebue să arătăm că

$$\overline{\beta} \cup b/\overline{\beta} \rightleftarrows b/\overline{\beta} \cap b$$

Vom arăta mai întâi că Ω este β-normal și finit accesibil din $\beta \cup b$; fie în acest scop:

$$\Omega \supset b_1 \supset b_2 \supset \ldots \supset b_{s-1} \supset b$$

lanțul β-normal care leagă pe Ω de b (ipoteza !); afirmăm că lanțul

$$\Omega \supset \beta \cup b_1 \supset \beta \cup b_2 \supset \ldots \supset \beta \cup b_{s-1} \supset \beta \cup b \tag{16}$$

este încă β-normal.

Mai întâi este clar că $\beta \cup b_1$ este β-normal în Ω, căci elementele β-normale formează o semistructură față de $\cup$ (O r e). In al doilea rând, avem conexiunea monotonă perfectă:

$$\beta \cup b_1 \supset \beta \cup b_2 \supset \beta$$

$$b_1 \supset (\beta \cap b_1) \cup b_2 \supset \beta \cap b_1$$

Dar $\beta \cap b_1$ este β-normal în b_1 căci, conform cu 2 din 11°, aceasta rezultă din $\beta \cup b_1/\beta \rightleftarrows b_1/\beta \cap b_1$; cum b_2 este de asemenea β-normal în b_1, urmează că $(\beta \cap b_1) \cup b_2$ va fi încă β-normal în b_1 și deci *a fortiori* în structura câtului $b_1/\beta \cap b_1$.

Rezultă atunci că $\beta \cup b_2$, homologul lui $(\beta \cap b_1) \cup b_2$ în isomorfismul determinat de conexiunea monotonă perfectă $\beta \cup b_1/\beta \rightleftarrows b_1/\beta \cap b_1$, va fi β-normal în structura câtului $\beta \cup b_1/\beta$. In acest caz însă, $\beta \cup b_2$ va fi β-normal chiar în $\beta \cup b_1$, conform proprietății 1. din 11°.

Tot astfel, folosind conexiunea monotonă perfectă $\beta \cup b_2/\beta \rightleftarrows b_2/\beta \cap b_2$, se arată că $\beta \cup b_3$ este β-normal în $\beta \cup b_2$, etc. Din aproape în aproape (sau printr'o inducție finită) rezultă deci că lanțul (16) este β-normal sau, ceea ce este tot una: Ω este β-normal și finit accesibil din $\beta \cup b$.

Dar $\beta \cup b$ este un element din structura câtului Ω/β, și anume, astfel încât există un lanț β-*normal în raport cu această structură* (fiindcă β-normal deja în raport cu structura R_Ω!), care leagă pe $\beta \cup b$ de Ω, încât putem scrie, evident:

$$\bar{\beta} \cup b/\bar{\beta} = \bar{\beta} \cup (\beta \cup b)/\bar{\beta} \rightleftarrows \beta \cup b/\bar{\beta} \cap (\beta \cup b) = \beta \cup b/\beta \cup (\bar{\beta} \cap b)$$

Dar avem conexiunea monotonă perfectă

$$\beta \cup b \supset \beta \cup (\bar{\beta} \cap b) \supset \beta$$

$$b \supset \bar{\beta} \cap b \supset \beta \cap b$$

și, ca urmare, vom avea evident și

$$\beta \cup b/\beta \cup (\bar{\beta} \cap b) \rightleftarrows b/\bar{\beta} \cap b \tag{17}$$

Ținând seama însă că avem (vezi mai sus):

$$\bar{\beta} \cup b/\bar{\beta} \rightleftarrows \beta \cup b/\beta \cup (\bar{\beta} \cap b) \tag{17'}$$

urmează, comparând cele două isomorfisme (17), (17'),

$$\bar{\beta} \cup b/\bar{\beta} \rightleftarrows b/\bar{\beta} \cap b \tag{18}$$

Rămâne de arătat, ca și în cazurile precedente, că isomorfismul (18) este indus de conexiunea monotonă mixtă dintre câturile $\bar{\beta} \cup b/\bar{\beta}$ și $b/\bar{\beta} \cap b$.

Or, operațiile care determină conexiunea monotonă mixtă dintre $\bar{\beta} \cup b/\bar{\beta}$ și $\beta \cup b/\beta \cup (\bar{\beta} \cap b)$ sunt date de

$$\chi(p) = (\beta \cup b) \cap p; \quad p \in \bar{\beta} \cup b/\bar{\beta}$$

$$\varphi(p'') = \bar{\beta} \cup p''; \quad p'' \in \beta \cup b/\beta \cup (\bar{\beta} \cap b).$$

De asemenea, operațiile care determină conexiunea monotonă mixtă dintre $\beta \cup b/\beta \cup (\bar{\beta} \cap b)$ și $b/\bar{\beta} \cap b$ sunt date de:

$$\sigma(p'') = b \cap p''; \quad p'' \in \beta \cup b/\beta \cup (\bar{\beta} \cap b)$$

$$\tau(p') = \beta \cup p'; \quad p' \in b/\bar{\beta} \cap b$$

Operațiile $\theta = \sigma\chi$ și $\psi = \varphi\tau$ fac respectiv trecerea dela $\overline{\beta} \cup b/\overline{\beta}$ la $b/\overline{\beta} \cap b$ și dela $b/\overline{\beta} \cap b$ la $\overline{\beta} \cup b/\overline{\beta}$. Ele sunt evident monotone și se scriu explicit:

$$\theta(p) = \sigma\chi(p) = b \cap (\beta \cup b) \cap p = b \cap p; \quad p \in \overline{\beta} \cup b/\overline{\beta}$$

$$\psi(p') = \varphi\tau(p') = \overline{\beta} \cup (\beta \cup p') = \overline{\beta} \cup p'; \quad p' \in b/\overline{\beta} \cap b.$$

Așa dar, θ, ψ care determină o conexiune monotonă perfectă între $\overline{\beta} \cup b/\overline{\beta}$ și $b/\overline{\beta} \cap b$ sunt chiar operațiile care determină conexiunea monotonă mixtă dintre câturile în chestiune.

Cu aceasta lemma este complet demonstrată.

14°. Lemmă. *Fie* $\Omega \supset \beta, \beta'$ *cu* $\Omega/\beta =$ *binormal*, $\Omega/\beta' =$ *binormal*; *atunci* $\Omega/\beta \cup \beta'$ *este de asemenea binormal* (cu alte cuvinte: *elementele binormale formează semistructură față de uniune*).

Intr'adevăr, fie $b \subset \Omega$ cu Ω β-normal și finit accesibil din b (dar altfel, b este arbitrar); am arătat în demonstrația lemei din 13° că Ω este încă β-normal și finit accesibil din $\beta' \cup b$. Ca atare, putem scrie:

$$\beta \cup (\beta' \cup b)/\beta \rightleftarrows \beta' \cup b/\beta \cap (\beta' \cup b). \tag{19}$$

Schema conexiunii monotone perfecte (19) fiind

$$(\beta \cup \beta') \cup b \supset \beta \cup \beta' \supset \beta$$
$$\beta' \cup b \supset (\beta \cup \beta') \cap (\beta' \cup b) \supset \beta \cap (\beta' \cup b)$$

rezultă că putem scrie

$$(\beta \cup \beta') \cup b/\beta \cup \beta' \rightleftarrows \beta' \cup b/(\beta \cup \beta') \cup (\beta' \cup b) \tag{20}$$

Pe de altă parte, avem firește, $\beta' \cup b/\beta' \rightleftarrows b/\beta' \cap b$ și ca atare, schema

$$\beta' \cup b \supset (\beta \cup \beta') \cap (\beta' \cup b) \supset \beta'$$
$$b \supset (\beta \cup \beta') \cap b \supset \beta' \cap b$$

conduce la conexiunea monotonă perfectă:

$$\beta' \cup b/(\beta \cup \beta') \cap (\beta' \cup b) \rightleftarrows b/(\beta \cup \beta') \cap b. \tag{20'}$$

Din compunerea isomorfismelor de structură (20), (20') rezultă

$$(\beta \cup \beta') \cup b/\beta \cup \beta' \rightleftarrows b/(\beta \cup \beta') \cap b.$$

Ca și în cazurile precedente, rămâne să arătăm că ultimul isomorfism este indus de operațiile care definesc conexiunea monotonă mixtă dintre

$$(\beta \cup \beta') \cup b/\beta \cup \beta' \text{ și } b/(\beta \cup \beta') \cap b$$

Pentru aceasta, vom observa întâi că operațiile ce definesc conexiunea (20) sunt chiar [1]) cele ce definesc pe (19) dar, *limitate la câturile din* (20), adică:

$$\chi(p) = (\beta' \cup b) \cap p; \quad p \in (\beta \cup \beta') \cup b/\beta \cup \beta'$$
$$\varphi(p'') = \beta \cup p'' \quad ; \quad p'' \in \beta' \cup b/(\beta \cup \beta') \cap (\beta' \cup b)$$

[1]) Vezi [1], 3°, observație.

In al doilea rând, conexiunea (20′) este definită de aceleași operații ca și conexiunea $\beta' \cup b/\beta' \rightleftarrows b/\beta' \cap b$ dar, *limitate la câturile din* (20′), adică

$$\sigma(p'') = b \cap p''; \quad p'' \in \beta' \cup b/(\beta \cup \beta') \cap (\beta' \cup b)$$
$$\tau(p') = \beta' \cup p'; \quad p' \in b/(\beta \cup \beta') \cap b$$

Operațiile $\theta = \sigma\chi$, $\psi = \varphi\tau$ rezultate din compunerea conexiunilor (20), (20′), definesc o conexiune monotonă (între $(\beta \cup \beta') \cup b/\beta \cup \beta'$ și $b/(\beta \cup \beta') \cap b$, evident).

Se vede fără nicio dificultate că $\theta(p) = b \cap p$, $p \in (\beta \cup \beta') \cup b/\beta \cup \beta'$ și că $\psi(p') = (\beta \cup \beta') \cup p'$, $p' \in b/(\beta \cup \beta') \cap b$.

Conexiunile (20), (20′) fiind perfecte, conexiunea rezultantă este de asemenea, Q. E. D.

15°. Lemmă. *Fie* $\Omega \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}'$ *și* $\Omega \supset \beta$; *dacă* Ω *este* β*-normal și finit accesibil din* $\mathfrak{b}$, *dacă* $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}'$ *este binormal și dacă* Ω/β *este de asemen a binormal, atunci* $\beta \cup \mathfrak{b}/\beta \cup \mathfrak{b}'$ *este încă binormal.*

Într'adevăr, conform ipotezei avem $\beta \cup b/\beta \rightleftarrows b/\beta \cap b$; schema acestui isomorfism este

$$\beta \cup b \supset \beta \cup b' \supset \beta$$
$$b \supset (\beta \cap b) \cup b' \supset \beta \cap b$$

unde, firește, $\beta \cup b'$ este omologul lui $(\beta \cap b) \cup b'$. Cum $\beta \cap b$ este binormal în b (12°) rezultă că $(\beta \cap b) \cup b'$ este încă binormal în b (lema 3); *a fortiori*, $(\beta \cap b) \cup b'$ este binormal în structura câtului $b/\beta \cap b$.

Cum proprietatea de a fi binormal se conservă evident prin isomorfism (se arată ușor, prin mijlocirea condițiilor Dedekind-Ore!) rezultă că $\beta \cup b'$ este binormal în structura câtului $\beta \cup b/\beta$.

Dar β este binormal în Ω; *a fortiori el este binormal în orice* $\mathfrak{x}$ *cu* $\Omega \supset \mathfrak{x} \supset \beta$ *și cu proprietatea că* Ω *este* β*-normal și finit accesibil din acel* $\mathfrak{x}$!.

Prin ipoteză însă, Ω este β-normal și finit accesibil din b; am arătat că în acest caz (vezi demonstrația lemei din 13°) Ω este β-normal și finit accesibil și din $\beta \cup b$. *Rezultă atunci că* β *este binormal în* $\beta \cup \mathfrak{b}$.

Incât, este clar că $\beta \cup b'$, care este binormal în structura câtului $\beta \cup \mathfrak{b}/\beta$, va fi binormal chiar în $\beta \cup b$, Q. E. D.

15°. Lemă. *Fie* $\Omega \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}'$, $\Omega \supset \mathfrak{c}$; *dacă* Ω *este binormal și finit accesibil din* $\mathfrak{b}$ *dacă* $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}'$ *este binormal și dacă* Ω *este binormal și finit accesibil din* $\mathfrak{c}$, *atunci câtul* $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}/\mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}'$ *este de asemenea binormal.*

Pentru a justifica această propoziție, este deajuns să observăm că dacă Ω/β și Ω/β' sunt câturi binormale, atunci din 12° rezultă imediat că $\beta \cap \beta'$ este binormal în β (și analog, în β', firește).

Așa fiind, lema se demonstrează printr'o dublă recurență finită, exact ca în cazul normalității lui Uzcov (*loc. cit.*).

16°. Teorema Schreier-Zassenhaus. Propozițiile precedente sunt suficiente pentru a deduce, cu tehnica uzuală, *teorema Schreier-Zassenhaus pentru binormalitate*:

Două lanțuri binormale cu extremități comune se transformă prin rafinările Zassenhaus în două lanțuri de asemenea binormale, de aceeași lungime veritabilă și având câturi conjugate cu structuri isomorfe.

Rezultă imediat teorema Jordan-Hölder pentru șiruri binormale [1]).

Observație. Este interesant de semnalat această deosebire calitativă (între altele) dintre seminormalitate și binormalitate:

Pentru seminormalitate avem proprietatea: dacă $\Omega \supset a$ cu $\Omega/a =$ seminormal, atunci $b/a =$ seminormal pentru *orice* b cu $\Omega \supset b \supset a$ (seminormalitatea este o retronormalitate).

Pentru binormalitate avem proprietatea: dacă $\Omega \supset a$ cu $\Omega/a =$ binormal, atunci $b/a =$ binormal pentru acei b, astfel că Ω este (cel puțin) β-normal și finit accesibil din b (binormalitatea este o retronormalitate *relativă*).

Anexa I

Revenim, în cele ce urmează, asupra exemplelor de conexiune monotonă date în lucrarea noastră [1], adăugând acestora un exemplu important de natură grupală.

1°. Fie $\mathcal{G}$ și $\mathcal{G}'$ două grupuri, astfel că există o homomorfie χ dela $\mathcal{G}$ la $\mathcal{G}'$ (așa dar, o corespondență univocă dela $\mathcal{G}$ la $\mathcal{G}'$, eventual lacunară în celălalt sens și care păstrează produsele). Vom arăta că se poate defini în acest caz o conexiune monotonă mixtă între structurile grupale $(\mathcal{G})$ și $(\mathcal{G}')$; această conexiune posedă un număr de proprietăți remarcabile, mai cu seamă prin aceea că ele pun în evidență pe de o parte analogia care există între conexiunea de care este vorba, și anume, conexiuni monotone din teoria structurilor (acelea care intervin în studiul α-normalității suprainvariante, seminormalității, binormalității, etc.), iar pe de altă parte, analogia care există între aceeași conexiune și conexiunea *galoisiană* (perfectă) între o extindere normală separabilă finită și grupul său al lui Galois.

2°. Dacă $G \in (\mathcal{G})$, notăm prin $\chi(G)$ totalitatea elementelor din $\mathcal{G}'$ care sunt de forma $\chi(a)$ cu $a \in G$; firește că $\chi(G) \to (\mathcal{G}')$.

Dacă $G' \in (\mathcal{G}')$, notăm prin $\varphi(G')$ mulțimea tuturor acelor elemente a din $\mathcal{G}$ pentru care $\chi(a) \to G'$; evident că această mulțime $\varphi(G')$ nu este deșartă, căci $\chi(e) = e'$ (e respectiv e' fiind elementul unitate al lui $\mathcal{G}$, respectiv $\mathcal{G}'$), iar $e' \to G'$. Se arată de altfel, fără nicio dificultate că $\varphi(G') \to (\mathcal{G})$.

Corespondența astfel stabilită între structurile grupale $(\mathcal{G})$, $(\mathcal{G}')$ posedă următoarele proprietăți ușor de verificat:

A. Dacă $(G_1 \supset G_2) \in (\mathcal{G})$ atunci $\chi(G_1) \supset \chi(G_2)$; dacă $(G_1' \supset G_2') \in (\mathcal{G}')$, atunci $\varphi(G_1') \supset \varphi(G_2')$.

B. Dacă $G \in (\mathcal{G})$, atunci $\varphi\chi(G) \supset G$; dacă $G' \in (\mathcal{G}')$, atunci $\chi\varphi(G') \subset G'$.

Proprietățile A, B arată că între structurile grupale $(\mathcal{G})$, $(\mathcal{G}')$ s'a stabilit o relație de conexiune monotonă mixtă; cu notațiile noastre, aceasta se scrie:

$$(\mathcal{G}') \rightleftarrows (\mathcal{G}) \qquad (\text{mod } \varphi, \chi) \tag{1}$$

Normalitatea grupală ordinară este un covariant al acestei conexiuni (1); aceasta înseamnă că:

Dacă $(G_1 \supset G_2) \to (\mathcal{G})$ este un interval normal (G_2 divizor normal în G_1), atunci $\chi(G_1) \supset \chi(G_2)$ este de asemenea normal.

Dacă $(G_1' \supset G_2') \to (\mathcal{G}')$ este un interval normal (G_2' divizor normal în G_1'), atunci $\varphi(G_1') \supset \varphi(G_2')$ este de asemenea normal. Proprietatea de covarianță de mai sus a normalității grupale ordinare este binecunoscută și se demonstrează

[1]) Este clar ce se înțelege prin șir binormal.

de obiceiu în cazul când χ este un homomorfism dela $\mathcal{G}$ la $\mathcal{G}'$, caz în care conexiunea (1) este perfectă în structura $(\mathcal{G}')$.

Mai general, se poate arăta că *quasi-normalitatea lui Ore este de asemenea un covariant al conexiunii monotone mixte* (1). Faptul se verifică, ținând seama de criteriul lui Ore, al subgrupurilor quasi-normale: subgrupurile permutabile cu toate subgrupurile ciclice ale grupului total.

In ceea ce privește elementele perfecte ale conexiunii (1), așa dar subgrupurile $G \to (\mathcal{G})$ cu $\varphi\chi(G)=G$ și subgrupurile $G' \to (\mathcal{G}')$ cu $\chi\varphi(G') = G'$, se poate demonstra propoziția următoare:

Pentru orice G *cu* $\mathcal{G} \supset G \supset \varphi(E')$ *avem* $\varphi\chi(G) = G$, *și reciproc*; *pentru orice* G' *cu* $\chi(\mathcal{G}) \supset G' \supset E'$ *avem* $\chi\varphi(G')=G'$ *și reciproc.* Aici E' înseamnă subgrupul identic al lui $\mathcal{G}'$.

Aceasta înseamnă că între structura câtului $\mathcal{G}/\varphi$ (E') și structura câtului $\chi(\mathcal{G})/E'$ avem o conexiune monotonă perfectă, așa dar un isomorfism de structură.

Anexa II

Observațiile de mai jos constitue explicații suplimentare cu privire la teorema noastră Jordan-Hölder asupra șirurilor latero-α- normale stabilită în lucrarea [1].

1°. Noțiunea de șiruri latero-α-normale nu se află în nicio relație de incluziune logică cu noțiunea de șiruri α-*principale*; este clar, într'adevăr, că două șiruri latero-α-normale nu sunt numaidecât și α-principale (afară de o cerere suplimentară în acest sens), iar două șiruri α-principale nu sunt neapărat șiruri latero-α- normale (dar sunt evident, *lanțuri* latero-α-normale). Aceeași observație este valabilă pentru șirurile principale grupale și șirurile latero-normale grupale.

2°. Având în vedere cele din 1°, se poate spune că teorema Jordan-Hölder asupra șirurilor latero-α-normale este o teoremă de descompunere de o factură nouă și care poate fi privită ca o generalizare a teoremei lui Dedekind din structuri modulare. Intre aceasta din urmă și teorema noastră Jordan-Hölder în chestiune se intercalează, într'adevăr, următoarea propoziție:

D_α. Două șiruri *absolute* α-*principale* cu extremități comune, au aceeași lungime.

Această propoziție este, de sigur, mai particulară decât teorema asupra șirurilor absolute α-normale stabilită de Prof. D. Barbilian în lucrarea [4]. Cu toate acestea, teorema D_α prezintă un dublu interes, ea fiind, pe de o parte, partea comună teoremei Prof. D. Barbilian menționată mai sus, și teoremei noastre asupra șirurilor latero-α-normale, iar pe de altă parte, ea constitue împreună cu complementul său (firesc oarecum) pe care îl vom enunța mai jos, adevărata urmă pe care teorema lui Dedekind o lasă în structurile arbitrare. Complementul propoziției D_α este următorul:

D_β. Două șiruri *absolute* β- *principale*, cu extremități comune au aceeași lungime.

Propoziția D_β, împreună cu unele variante ale sale, au fost stabilite foarte recent de Prof. D. Barbilian.

О ТЕОРЕМАХ РАЗЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРЫ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В первой части работы (I) автор изучил разложение алгебраических систем при помощи главных рядов; при этом он ввел понятие *цепей* соответственно понятие *боково-α-нормальных* рядов и показал, что классические теоремы Жордана-Гельдера, касающиеся главных ря ов, могут быть отнесены к нормальности α. Автор указал, что результаты действительны и для более общего случая *цепей* соответственно *α-модулярных* рядов.

В представляемой теперь второй части работы автор углубляет анализ задачи разложения алгебраических систем; речь идет теперь о разложениях при помощи *нормальных* рядов (но не обязательно главных).

Автор приводит два из полученных им результатов, которые имеют, по его мнению, значение:

А. Изоморфизм (структуры) сопряженных частных, о которых идет речь в классических теоремах Шрейера-Цассенхауза, вытекает из того, что *цепи в них являются α-нормальными.*

Б. Теорема полунормальности Шрейера-Цассенхауза в том виде, как ее дополнил А. Галаней (2), остается действительной для более широкой нормальности, чем полунормальность, а именно, для двунормальности; как и первая, эта последняя является подвидом нормальности β; отсюда следует:

Полунормальность $\subset$ двунормальность $\subset$ β-нормальность.

Используемый автором метод — метод монотонных связностей, принцип которого, как и первые попытки его применения в теории разложений, были изложены (1).

I. Автор указывает раз навсегда, что когда он упоминает о смешанной монотонной связности $a \cup b \mid a \rightleftarrows b \mid a \cap b$ (a, b — произвольные элементы структуры S), речь идет всегда о связности, определенной вычислениями $x(p) = b \cap p$ при $p \in a \cup b \mid a$ и $\varphi(p') = a \cup p'$ при $p' \in b \mid a \cap b$.

Пусть $\Omega \supset x$ интервал S; мы говорим, что α - *нормально и финитно доступно* x при знаках $\Omega \parallel x = \alpha$-норм., если существует финитная α - нормальная цепь, связывающая $\Omega \subset x$.

Основная лемма. Пусть в произвольной структуре S будет интервалом $\Omega \supset a$, $\Omega \supset x$ при $\Omega \mid a = \alpha$-норм. и $\Omega \parallel x = \alpha$-норм., тогда имеем совершенно монотонную связность (и, следовательно, структурный изоморфизм): $a \cup x \mid a \rightleftarrows x \mid a \cap x$.

Для доказательства автор пользуется полной индукцией. Пусть $\Omega \supset b_1 \supset b_2 \supset \ldots\ldots \supset b_{s-1} \supset b_s = x$, причем α - нормальная цепь связывает Ω и x; S — натуральное число > 0; можно предположить, *что оно дано произвольно.*

Лемма, очевидно, справедлива при $s = 1$ ([1] гл. II, 8); предположим, что она также справедлива для 2, 3 ... $s - 1$ ($s > 1$), и докажем ее действительность для s.

В силу того что $b_{s-1} \mid a \cap b_{s-1} = \alpha$ - норм. и $b_{s-1} \mid b_s = \alpha$ - норм., можно написать.

$$(a \cap b_{s-1}) \cup b_s \mid a \cap b_{s-1} \rightleftarrows b_s \mid a \cap b_s. \qquad (1)$$

С другой стороны, из $a \cup b_{s-1} \mid a \underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{\leftrightarrows}} b_{s-1} \mid a \cap b_{s-1}$ (рекурентность) из (6)

$$a \cup b_{s-1} \supset a \cup b_s \supset a$$
$$b_{s-1} \supset (a \cap b_{s-1}) \cup b_s \supset a \cap b_{s-1}.$$

легко выводим $a \cup b_s \mid a \underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{\leftrightarrows}} (a \cap b_{s-1}) \cup b_s \mid {}^{a} \cap b_{s-1}$. (2)

Из (I) и (2) следует

$$a \cup b_s \mid a \underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{\leftrightarrows}} b_s \mid a \cap b_s \qquad (3)$$

Остается доказать (в этом заключается существенная часть доказательства), что структурный изоморфизм (3) индуцирован вычислениями, определяющими смешанную монтонную связность $a \cup b_s \mid a \underset{\rightarrow}{\overset{\leftarrow}{\rightleftarrows}} b_s \mid a \cap b_s$.

Монотонная (совершенная) связность (2) явно определена следующими вычислениями:

$$\begin{cases} x\ (p) = b_{s-1} \cap p,\ p \in a \cup b_s \mid a \\ \varphi\ (p'') = a \cup p'',\ p'' \in (a \cap b_{s-1}) \cup b_s \mid a \cap b_{s-1} \end{cases} \qquad (2')$$

Монотонная связность (1) определена также вычислениями

$$\begin{cases} \sigma\ (p'') = b_s \cap p'',\ p'' \in (a \cup b_{s-1}) \cup b_s \mid {}^{a} \cap b_{s-1} \\ \tau\ (p') = (a \cap b_{s-1}) \cup p',\ p' \in b_s \mid a \cap b_s \end{cases} \qquad (1')$$

Состав связностей (2) и (1) приводит, как это легко проверить, к вычислениям

$$\begin{cases} \theta\ (p) = \sigma\chi\ (p) = b_s \cap (b_{s-1} \cap p) = b_s \cap p,\ p \in a \cup b_s \mid a \\ \psi\ (p') = \psi\tau\ (p') = a \cup [(a \cap b_{s-1}) \cup p'] = a \cup p',\ p' \in b_s \mid a \cap b_s, \end{cases}$$

то есть именно к операциям, определяющим монотонную связность $a \cup b_s \mid a \underset{\rightarrow}{\overset{\leftarrow}{\rightleftarrows}} b_s \mid a \cap b_s$; очевидно, что состав двух совершенных монотнных связностей является также совершенным (монотонной связностью), следовательно можно писать.

$$a \cup b_s \mid a \underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{\leftrightarrows}} b_s \mid a \cap b_s \quad (\theta, \psi).$$

Лемма доказана.

2. Пусть в структуре S

$$\begin{cases} a_0 \supset a_1 \supset \ldots \supset a_{i-1} \supset a_i \ldots \supset a_r \\ b_0 \supset b_1 \supset \ldots \supset b_{j-1} \supset b_j \supset \ldots \supset b_s \end{cases} \qquad (4)$$

две α— нормальные цепи с общими концами: $a_0 = b_0$, $a_r = b_s$.

Нижеследующие формулы определяют цассенгаузовы утончения цепей:

$$c_{ij} = a_i \cup (a_{i-1} \cap b_j),\ (i = 1, 2 \ldots, r;\ j = 0, 1, 2, \ldots, s);$$
$$b_{ji} = b_j \cup (b_{j-1} \cap a_i),\ (i = 0, 1, 2 \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s).$$

Теорема Шрейера-Цассенгауза для нормальности α. Две цепи (4) преобразуются путем цассенгаузовых утончений в две цепи, таким образом, чтобы.

A) Сопряженные частные были подобны (Оре), (Б) были одной настоящей длины (Барбилиан), В) обладали изоморфными структурами, Г) каждое включение a_{ij}, соотв. b_{ji} было α — нормальным относительно структуры частного $a_{i,\,j-1} \mid a_i$, соотв. $b_{j,\,i-1} \mid b_j$.

Автор стремится указать лишь пункты В) и Г) этой теоремы. По обыкновению,

$$a_{i-1} = M,\ a_i = m,\ b_{j-1} = N,\ b_j = n$$
$$S = M \cap N,\ T = (M \cap n) \cup (N \cap m).$$

Следовательно, получаем $a_{i,\,j-1} \mid a_{ij} = m \cup S \mid m \cup T$, $b_{j,\,i-1} \mid b_{ji} = n \cup S \mid n \cup T$ Если $M \parallel S = \alpha$ — норм. $N \parallel S = \alpha$ — норм. (в чем непосредственно можно убедиться), то можно написать (лемма 1^0).

$$m \cup s \mid m \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}} S \mid m \cap S,\ n \cup S \mid n \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}} S \mid n \cap S. \qquad (5)$$

Из изоморфизмов (5), учитывая $S \supset T \supset m \cap S$ и $S \supset T \supset n \cap S$, легко выводим $m \cup S \mid m \cup T \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}} S \mid T \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}} n \cup S \mid n \cup T$.

Таким образом доказан пункт В) вышеизложенной теоремы. Что касается пункта Г), достаточно отметить, что T — α - нормально в структуре частного $S \mid m \cap S$, соотв. частного $S \mid n \cap S$, следовательно $m \cup T = a_{ij}$ будет α-нормальным в структуре частного $m \cup S \mid m = a_{i,\,j-1} \mid a_1$ и т.д. (5),

Предыдущая теорема, в частности, пункт Г) этой теоремы позволяет ввести понятие относительной α — нормальной последовательности и изложить связанную с ним теорему Жордана-Гельдера.

3. В дальнейшем автор вкратце упоминает о двунормальности. Пусть $\Omega \supset x$ есть интервал S; говорят, что Ω β — норм. и финитно доступно x, при знаках $\Omega \parallel x = \beta$ — норм. когда существует предельная β — нормальная цепь, связывающая Ω с x.

Пусть, кроме того, $\Omega \supset \beta$; мы говорим, что β—двунормально в структуре R_Ω, когда оно там β — нормально и когда для любого x при $x \supset \Omega$ и такого, что $\Omega \parallel x = \beta$ — нормально, имеем $\beta \cup x \mid \beta \underset{\sim}{\overset{\sim}{\rightleftarrows}} x \mid \beta \cap x$.

При помощи аналогичных с приведенными (1, 2) соображений, автор доказывает ряд лемм, из которых можно вывести теорему Шрейера-Цассенгауза для двунормальностй, а именно:

Две двунормальные цепи с общими концами преобразуются при помощи цассенгаузовых включений в две всегда двунормальные цепи и такие, чтобы их сопряженные частные обладали изоморфными структурами.

Отсюда непосредственно вытекает теорема *двунормальных последовательностей* Жордана-Гельдера.

SUR LES THÉORÈMES DE DÉCOMPOSITION DE L'ALGÈBRE

(RÉSUMÉ)

Dans la première partie de ces recherches [1], on a étudié les décompositions des systèmes algébriques, moyennant les séries principales; à cette occasion, on a introduit la notion de *chaînes* resp. *séries latéro-α-normales* et montré que les théorèmes Jordan-Hölder classiques, sur les séries principales, peuvent être rattachés à la normalité α. On a montré aussi

que les résultats restent encore valables pour le cas plus général des *chaînes* resp. *séries α-modulaires.*

Dans cette seconde partie des recherches, l'analyse du problème de la composition des systèmes algébriques est menée plus à fond ; il s'agit maintenant des décompositions *moyennant les séries normales* (mais non nécessairement principales).

Parmi les résultats obtenus, il convient de citer les suivants.

A. L'isomorphisme (de structure) des quotients conjugués, dont il s'agit dans les théorèmes Schreier-Zassenhaus classiques, vient de ce fait *que les chaînes y sont α-normales.*

B. Le théorème Schreier-Zassenhaus pour la seminormalité qui a été complété par A. H a l a n a y [2], reste encore valable pour une normalité plus large que la seminormalité, à savoir *la binormalité* ; cette dernière est, tout comme la première, *une sous-espèce de la normalité* β et l'on a les implications logiques suivantes:

$$\text{Seminormalité} \sqsubset \text{binormalité} \sqsubset \beta\text{-normalité}.$$

La méthode utilisée est celle des connexions monotones, dont le principe, ainsi que les premiers essais à la théorie des décompositions, du type Jordan-Hölder ont été exposés dans [1].

1°. On rappelle, une fois pour toutes, que lorsqu'on parlera de la connexion monotone mixte $a \cup b/a \rightleftarrows b/a \cap b$ (a, b éléments arbitraires d'une structure S), il s'agira toujours de celle définie par les opérations $x(p) = b \cap p$ avec $p \in a \cup b/a$, et $\varphi(p') = a \cup p'$ avec $p' \in b/a \cap b$.

Soit $\Omega \supset x$ un intervalle de S ; on dira que Ω est α-normalement et finiment accesible de x, en signes $\Omega//x = \alpha$-normal, s'il existe une chaîne α-normale finie, reliant Ω à x.

Lemme fondamental. Soient, dans une structure arbitraire S, les intervalles $\Omega \supset a$, $\Omega \supset x$, avec $\Omega/a = \alpha$-normal et $\Omega//x = \alpha$-normal ; on a alors la connexion monotone parfaite (et, partant, l'isomorphisme de structure):

$$a \cup x/a \rightleftarrows x/a \cap x$$

Pour le démontrer, on appliquera une induction complète. Soit $\Omega \supset b_1 \supset b_2 \ldots \supset b_{s-1} \supset b_s = x$ la chaîne α-normale reliant Ω à x ; s est un nombre naturel > 0 *et que nous pouvons supposer arbitrairement donné.*

Le lemme est évidemment vrai pour $s = 1$ [1] Chap. II, 8°), on suppose donc qu'il en est de même pour $2, 3, \ldots s-1$ ($s > 1$) et l'on démontre qu'il l'est aussi pour s.

Or, puisque $b_{s-1}/a \cap b_{s-1} = \alpha$-normal et que $b_{s-1}/b_s = \alpha$-normal il sera possible d'écrire:

$$(a \cap b_{s-1}) \cup b_s/a \cap b_{s-1} \rightleftarrows b_s/a \cap b_s \qquad (1)$$

D'autre part, de $a \cup b_{s-1}/a \rightleftarrows b_{s-1}/a \cap b_{s-1}$ (la récurrence !) et de

$$a \cup b_{s-1} \supset a \cup b_s \supset a$$

$$b_{s-1} \supset (a \cap b_{s-1}) \cup b_s \supset a \cap b_{s-1}$$

on tire aisément

$$a \cup b_s/a \rightleftarrows (a \cap b_{s-1}) \cup b_s/a \cap b_{s-1} \tag{2}$$

De (1) et (2) il résulte:

$$a \cup b_s/a \rightleftarrows b_s/a \cap b_s . \tag{3}$$

Reste à montrer (et c'est là l'essentiel de la démonstration) que l'isomorphisme de structure (3) est induit par les opérations qui définissent la connexion monotone mixte

$$a \cup b_s/a \rightleftarrows b_s/a \cap b_s .$$

Or, la connexion monotone (parfaite) (2) est évidemment définie par les opérations que voici:

$$\begin{cases} x(p) = b_{s-1} \cap p, \ p \in a \cup b_s/a \\ \varphi(p'') = a \cup p'', \ p'' \in (a \cap b_{s-1}) \cup b_s/a \cap b_{s-1} . \end{cases} \tag{2'}$$

En second lieu, la connexion monotone (1) est définie par les opérations:

$$\begin{cases} \sigma(p'') = b_s \cap p'', \ p'' \in (a \cup b_{s-1}) \cup b_s/a \cap b_{s-1} \\ \tau(p') = (a \cap b_{s-1}) \cup p', \ p' \in b_s/a \cap b_s . \end{cases} \tag{1'}$$

La composition de connexions (2) et (1) donne les opérations:

$$\begin{cases} \theta(p) = \sigma\chi(p) = b_s \cap (b_{s-1} \cap p) = b_s \cap p, \ p \in a \cup b_s/a \\ \psi(p') = \varphi\tau(p') = a \varphi[(a \cap b_{s-1}) up'] = a \cup p', \ p' \in b_s^{a}/a \cap b_s , \end{cases}$$

c'est-à-dire justement les opérations définissant la connexion monotone $a \cup b_s/a \rightleftarrows b_s/a \cap b_s$; et, puisqu'il est évident que la composition de deux connexions monotones parfaites est elle aussi (une connexion monotone) parfaite, il s'ensuit qu'on peut écrire:

$$a \cup b_s/a \rightleftarrows b_s/a \cap b_s \ (\theta, \ \psi).$$

Le lemme est démontré.

2°. Soient, dans la structure S

$$\begin{cases} a_0 \supset a_1 \supset \dots \supset a_{i-1} \supset a_i \supset \dots \supset a_r \\ b_0 \supset b_1 \supset \dots \supset b_{j-1} \supset b_j \supset \dots \supset b_s \end{cases} \tag{4}$$

deux chaînes *α-normales aux extrémités communes:* $a_0 = b_0$, $a_r = b_s$.

Les raffinements de Zassenhaus des chaînes (4) sont définis par les formules suivantes:

$$a_{ij} = a_i \cup (a_{i-1} \cap b_j), \quad (i = 1, 2, \dots, r \ ; j = 0, 1, 2 \dots, s)$$
$$b_{ji} = b_j \cup (b_{j-1} \cap a), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s).$$

Théorème Schreier — Zassenhaus pour la normalité α. Deux chaînes (4) se transforment par les raffinements de Zassenhaus en deux chaînes telles que:

A) Les quotients conjugués soient semblables (O r e)

B) Elles aient la même longueur véritable (B a r b i l i a n).

C) Les quotients conjugués soient aux structures isomorphes.

D) *Chaque intercalaire* a_{ij} *resp.* b_{ji} *soit* α *— normal relativement à la structure du quotient* $a_i, {}_{j-1}/a_i$ *resp.* b_{jm-1}/b_j.

Ce sont seulement les points *C)* et *D)* de cet énoncé que l'on va justifier. On pose, comme à l'ordinaire:

$$a_{i-1} = M,\ a_i = m,\ b_{j-1} = N,\ b_j = n$$
$$S = M \cap N,\ T = (M \cap n) \cup (N \cap m).$$

Or, puisque $M//S = \alpha$-normal, $N//S = \alpha$-normal (ce dont on se rend compte immédiatement), on pourra écrire (lemme de 1°)

$$m \cup S/m \rightleftarrows S/m \cap S,\quad n \cup S/n \rightleftarrows S/n \cap S \tag{5}$$

De ces isomorphismes (5), on tire facilement

$$m \cup S/\, m \cup T \rightleftarrows S/T \rightleftarrows n \cup S/\, n \cup T$$

Ainsi, le point *C)* du théorème ci-dessus, est démontré. Quant au point *D)*, il suffit de remarquer que T est α-normal dans la structure du quotient $S/m \cap S$ resp. du quotient $S/n \cap S$; par conséquent, $m \cup T = a_{ij}$, sera α-normal dans la structure du quotient $m \cup S/m = a_{i,j-1}/a_i$, etc. (voir les relations (5)).

Le théorème précédent et, plus particulièrement, le point *D)* de ce théorème, permet d'introduire la notion de *série* α*-normale relative* et d'énoncer le théorème Jordan-Hölder qui s'y rattache.

3°. Dans ce qui suit, on dira quelques mots sur la binormalité. Soit $\Omega \supset x$ un intervalle de S; nous dirons que Ω est β-normalement et finiment accessible de x, en signes $\Omega//x = \beta$-normal, lorsqu'il existe une chaîne β-normale finie, reliant Ω à x.

Soit de plus $\Omega \supset \beta$; on dit que β est binormal dans la structure $R\Omega$ lorsqu'il y est β-normal et lorsque pour tout x avec $x \subset \Omega$ et tel que $\Omega// x = \beta$-normal, on a

$$\beta \cup x/\beta \rightleftarrows x/\beta \cap x$$

Par des considérations pareilles à celles qui ont déjà été développées (1°, 2°), on démontre une série de lemmes propres à en déduire le théorème Schreier-Zassenhaus pour la binormalité, à savoir:

Deux chaînes binormales, aux extrémités communes, se transforment par les intercalaires de Zassenhaus en deux chaînes toujours binormales et telles que leurs quotients conjugués soient aux structures isomorphes.

Le théorème Jordan-Hölder sur les *séries binormales* en résulte immédiatement.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Benado, *Noțiunea de normalitate și teoremele de descompunere ale Algebrei.* Studii și Cercetări Matematice, vol. I, fasc. 2, 1950, p. 282—305.
2. A. Halanay, *Le théorème Jordan-Hölder dans la théorie des structures* Disquisit. Math. et Phys., t. VII, fasc. 1—4, 1948, p. 3—23.
3. O. Ore, *On the theorem of Jordan-Hölder.* Transact. of the Amer. Math. Soc., vol. 41, 1937, p. 266—275.
4. D. Barbilian, *Metrisch-konkave Verbände.* Disquisit. Math. et Phys., t. V, fasc. 1—4, 1946, p. 3—63.
5. A. I. Uzkov, *On the Jordan-Hölder theorem.* Recueil Math. de Moscou, nouvelle série, t. 4, 1938, p. 31—43.

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

F 762
51(498)
KAT

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

ELLENŐRIZVE
1953

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

3—4
ANUL III
IULIE—DECEMBRIE
1952

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

3—4
ANUL III
IULIE—DECEMBRIE
1952

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Academician S. STOILOV — Redactor responsabil; Academician GR. C. MOISIL; GH. MIHOC; G. VRĂNCEANU; MIHAIL NECULCEA

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÂNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul III, Nr. 3—4 Iulie—Decembrie 1952

SUMAR

	Pag.
SERGIU VASILACHE, O nouă ecuaţie a telegrafiştilor	295
ALEXANDRU FRODA, Asupra fundamentelor mecanicei mişcărilor realizabile ale punctului material.	321
I. P. ELIANU, Problema lui Cauchy pentru ecuaţiile cu derivate parţiale lineare polihiperbolice normale	367
D. BARBILIAN, Asupra grupurilor fără torsiune ale lui A. I. Malţev . .	475
GH. TH. GHEORGHIU, Asupra unei clase de suprafeţe (II)	499
ŞT. PETRESCU, Consideraţii privind spaţiile cu conexiune proiectivă P_2 .	529

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMANE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome III, Nos 3—4 Juillet—Décembre 1952

SOMMAIRE

	Page
SERGIU VASILACHE, Une nouvelle équation des télégraphistes . . .	295
ALEXANDRU FRODA, Sur les fondements de la mécanique des mouvements réalisables du point matériel	321
I. P. ELIANU, Le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles linéaires et polyhyperboliques normales	367
D. BARBILIAN, Sur les groupes sans torsion de A. I. Maltsev	475
GH. TH. GHEORGHIU, Sur une classe de surfaces (II)	499
ŞT. PETRESCU, Considérations concernant les espaces à connexion projective P_2	529

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том. III, № 3-4 Июль-декабрь 1952

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

С. ВАСИЛАКЕ, Новое уравнение телеграфистов 295
А. ФРОДА, Об основаниях механики осуществимых движений материальной точки 321
И. ЕЛЬЯНУ, Задача Коши для уравнений с нормальными полигиперболическими линейными частными производными 367
Д. БАРБИЛИАН, О группах без кручения Мальцева 475
Г. ГЕОРГИУ, Об одном классе поверхностей (II) 499
Ш. ПЕТРЕСКУ, Относительно пространств с проективной связностью P_2 . 529

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

O NOUĂ ECUAŢIE A TELEGRAFIŞTILOR *)

DE

SERGIU VASILACHE

1. Se ştie că în liniile de transmisie a energiei electrice, intensitatea de curent electric $i(z, t)$ şi tensiunea $V(z\ t)$, la distanţa z de un punct O luat ca origine, sunt date de sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\begin{aligned} Li_t + Ri &= -V_z \text{ [1]} \\ CV_t + gV &= -i_z \end{aligned} \tag{1}$$

unde L, C, R, g sunt constantele de repartizare ale liniei de transmisie, adică inductanţa, capacitatea, rezistenţa şi perditanţa pe unitatea de lungime a liniei.

Ecuaţiile (1) sunt obţinute pornind dela ipoteza că L, C, R, g sunt constante de-a-lungul liniei de transmisie, iar soluţia lor matematică în cazul unei linii semiinfinite a fost dată de E. Picard, H. Poincaré, etc.

Pentru alte condiţii la limită, ca: linie de lungime finită, deschisă, sau în scurt-circuit la extremitatea receptrice; linie închisă pe o impedanţă Z la extremitatea receptrice, etc., ecuaţiile de mai sus se pot integra cu ajutorul calculului simbolic (transformata lui Laplace). Nu vom insista mai mult asupra acestor probleme şi metode devenite clasice.

Vom reaminti, în prealabil, că o expresie diferită a ecuaţiei telegrafiştilor a fost propusă recent de matematicianul sovietic Rozovschi [1], ţinând seamă de fenomenele de ereditate magnetică şi dielectrică. In aceste condiţii, formulele clasice:

$$B = \mu H \quad \text{şi} \quad D = \varepsilon E$$

ale inducţiei magnetice şi electrice sunt înlocuite prin relaţiile mai puţin simple:

$$B = \mu H + \int_{-\infty}^{t} \mu_1(t-s)\, H(s)\, ds; \quad D = \varepsilon E + \int_{-\infty}^{t} \varepsilon_1(t-s)\, E(s)\, ds$$

---

*) Comunicare prezentată la Institutul de Matematică al Academiei R.P.R. în Octombrie 1950.

[1]) Pentru simplificarea notaţiilor, vom însemna, în cele ce urmează, derivatele parţiale, punând variabilele de derivare în indici. De exemplu:

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}\,;\ V_z = \frac{\partial V}{\partial z}\,;\ V_{zz} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\,;\ V_{tz} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial t}\,.$$

care conduc la ecuațiile integro-diferențiale:

$$Ri + Li_t + \int_{-\infty}^{t} h(t-s)\, i_s(z, s)\, ds = -V_z$$

$$gV + CV_t + \int_{-\infty}^{t} G(t-s)\, V_s(z, s)\, ds = -i_t$$

pe care autorul, neglijând fenomenele de ereditate pentru $t < 0$, le aduce la forma mai simplă:

$$Ri + Li_t + \int_{0}^{t} h(t-s)\, i_s(z, s)\, ds = -V_z$$

$$gV + CV_t + \int_{0}^{t} G(t-s)\, V_s(t, s)\, ds = -i_z$$

Eliminând $i(z, t)$ între aceste două ecuații, se obține o ecuație integro-diferențială de speța a doua în V, pentru care autorul caută o soluție periodică particulară de forma:

$$V = \sum_{0}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{kxz}{l},$$

și obține pentru funcțiile $T_k(t)$ ecuații integro-diferențiale cu coeficienți constanți și cu nucleul de forma $K(t-s)$. Aceste ecuații se pot rezolva, de exemplu, cu ajutorul transformatei lui Laplace.

2. Să revenim la ecuațiile (1). Ipoteza că L, C, R, g sunt constante, nu este decât un caz particular. In realitate, acești parametri variază în timp, după condițiile fizice ale mediului ambiant (temperatură, umiditate, etc.).

Aceste variații sunt mai ales importante în cazul liniilor aeriene.

Se știe, de exemplu, că echilibrajul liniilor aeriene este imposibil de realizat tocmai din cauza variației acestor parametri. Mai mult, suspensia liniilor aeriene pe stâlpi se face lăsând liniei o săgeată între doi stâlpi consecutivi, de unde rezultă posibilitatea de oscilații a conductorilor lineari, sub influența vânturilor, a trepidației solului, etc.

Aceste oscilații fac să varieze parametrii L și C, producând astfel o modulație în fază și în amplitudine a curenților electrici transmiși.

Lucrarea de față este consacrată studiului propagării energiei electrice pe linii cu parametrii L și C funcții de timp.

Variațiile parametrilor R și g fiind mult mai lente în timp, le vom considera, în studiul nostru, ca fiind constante.

Pe de altă parte, ne mărginim la cazul când L și C sunt funcții periodice de timp, și tratăm în special cazul unei variații sinusoidale. Neglijăm, de asemenea, fenomenele de ereditate magnetică și electrică.

In aceste ipoteze, intensitatea $i(z, t)$ și tensiunea $V(z, t)$ sunt date de ecuațiile:

$$\begin{aligned} (Li)_t + Ri &= -V_z \\ (CV)_t + gV &= -i_z \end{aligned} \tag{2}$$

sau

$$\begin{aligned} (L_t + R)i + Li_t &= -V_z \\ (C_t + g)V + CV_t &= -i_z \end{aligned} \tag{3}$$

Eliminând pe $i(z, t)$ între ecuațiile (3), găsim pentru $V(z, t)$ ecuația cu derivate parțiale de tip hiperbolic

$$V_{zz} = LCV_{tt} + Lg + (L_t + R)\,C + 2LC_tV_t + (L_t + R)\,(C_t + g) + LC_{tt}\,V. \quad (4)$$

3. Soluțiile ecuației (4) care interesează sunt soluțiile particulare care verifică condițiile inițiale și condițiile la limită următoare:

a) Linie semiinfinită, în repaus pentru $t < 0$, și căreia i se aplică în momentul $t = 0$, o f. e. m. $E(t)$.

Trebue deci să avem:

$$\begin{gathered} i(z, 0) = 0, \quad V(z, 0) = 0, \quad V(0, t) = E(t) \quad \text{pentru} \quad t \geqslant 0, \\ i_t(z, 0) = 0, \quad V_t(z, 0) = 0 \end{gathered} \quad (5)$$

b) Linie de lungime l, închisă pe o impedanță Z, de unde condițiile:

$$\begin{gathered} i(z, 0) = 0, \quad V(z, 0) = 0, \quad V(0, t) = f(t) \\ i_t(z, 0) = 0, \quad V_t(z, 0) = 0, \quad V(l, t) = Z.\, i(l, t). \end{gathered} \quad (6)$$

Dacă $Z = \infty$, avem $i(l, t) = 0$, adică suntem în cazul unei linii de lungime l, deschisă la extremitatea receptrice.

c) Linie de lungime l, în scurt-circuit la extremitatea receptrice, ceea ce conduce la condițiile:

$$\begin{gathered} i(z, 0) = 0, \quad V(z, 0) = 0, \quad V(0, t) = f(t) \quad \text{pentru} \quad t \geqslant 0 \\ i_t(z, 0) = 0, \quad V_t(z, 0) = 0, \quad V(l, t) = 0. \end{gathered} \quad (7)$$

In toate cazurile trebue să avem $f(0) = f'(0) = 0$.

4. Să revenim la ecuația (4) și să presupunem că L și C sunt funcții sinusoidale de timp:

$$L = L_0(l + m\cos \Omega t) \quad ; \quad C = C_0(l + n\cos \Omega t) \quad 8)$$

de unde

$$LC = L_0C_0\,l + (m + n)\cos \Omega t + mn\cos^2 \Omega t \quad (9)$$

Dacă punem:

$$LC = (\alpha + \beta\cos \Omega t)^2 \quad (10)$$

găsim, făcând toate calculele,

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \sqrt{L_0C_0}\,[\sqrt{l + m + n} + \sqrt{l - m - n}\,] \\ 2\beta &= \sqrt{L_0C_0}\,[\sqrt{l + m + n} - \sqrt{l - m - n}\,]. \end{aligned} \quad (11)$$

Pe de altă parte, avem:

$$\begin{aligned} Lg + (R + L_t)\,C + 2LC_t = {} & gL_0 + RC_0 + (gL_0 + RC_0n)\cos \Omega t - \\ & - L_0C_0\Omega\,(m + 2)\sin \Omega t - 3L_0C_0\,mn\sin \Omega t\cos \Omega t. \end{aligned}$$

Coeficienții de modulație m și n fiind mai mici decât unitatea, termenul în mn poate fi neglijat, și se poate scrie:

$$Lg + (R + L_t)\,C + 2LC_t = a + b\cos \Omega t + c\sin \Omega t,$$

unde

$$a = gL_0 + RC_0$$
$$b = gL_0 = RC_0 n \qquad (11\alpha)$$
$$c = -L_0 C_0 \Omega (m+2).$$

Găsim de asemenea:

$$(L_t + R)(C_t + g) + LC_{tt} = p + q\cos\Omega t + r\sin\Omega t,$$

unde

$$p = Rg + L_0 C_0 mn$$
$$q = -L_0 C_0 n\Omega^2 \qquad (11\beta)$$
$$r = -(L_0 gm + RC_0)n\Omega.$$

Ecuația (4) ia deci forma:

$$V_{zz} = (\alpha + \beta\cos\Omega t)^2 V_{tt} + (a + b\cos\Omega t + c\sin\Omega t) V_t + \\ + (p + q\cos\Omega t + r\sin\Omega t) V. \qquad (12)$$

Vom remarca, cu această ocazie, că ecuațiile cu derivate parțiale de tip hiperbolic, de forma:

$$Z_{yy} = y^\alpha K^2(x, y) Z_{xx} + a(x, y) Z_x + b(x, y) Z_y + c(x, y) Z + f(x, y),$$

au fost studiate, în cazul problemei lui Cauchy, de către Berezin [2]. Să revenim la ecuația (12). Ecuațiile caracteristicelor sunt date de:

$$dt = \pm(\alpha + \beta\cos\Omega t)\, dz \qquad (13)$$

care pentru $\alpha > \beta$ admit ca soluție:

$$\frac{1}{\Omega}\int \frac{d(\Omega t)}{\alpha + \beta\cos\Omega t} = \frac{2}{\Omega\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \operatorname{tg}\frac{\Omega t}{2}\right) + K,$$

de unde, pentru caracteristice,

$$z - \frac{2}{\Omega\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \operatorname{tg}\frac{\Omega t}{2}\right) = x(z, t)$$
$$z + \frac{2}{\Omega\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \operatorname{tg}\frac{\Omega t}{2}\right) = y(z, t). \qquad (14)$$

Luând ca noi variabile x și y, găsim:

$$V_z = V_x x_z + V_y y_z$$

Dar din (14) rezultă că $x_z = y_z = 1$, deci:

$$V_z = V_x + V_y$$

și

$$V_{zz} = V_{xx} + 2V_{xy} + V_{yy}.$$

Pe de altă parte,

$$V_t = V_x x_t + V_y y_t$$

dar

$$x = -\frac{2}{\Omega\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\frac{d}{dt}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\operatorname{tg}\frac{\Omega t}{2}\right)=\frac{-1}{\alpha+\beta\cos\Omega t}\right].$$

De asemenea,

$$y_t = \frac{+1}{\alpha+\beta\cos\Omega t} \tag{16}$$

de unde

$$\begin{aligned} x_{tt} &= \frac{\beta\Omega\sin\Omega t}{(\alpha+\beta\cos\Omega t)^2} \\ y_{tt} &= \frac{-\beta\Omega\sin\Omega t}{(\alpha+\beta\cos\Omega t)^2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Obținem astfel:

$$\begin{aligned} V_{tt}(\alpha+\beta\cos\Omega t)^2 &= (V_{xx}+V_{yy})-2V_{xy}+(V_x-V_y)\beta\Omega\sin\Omega t \\ V_t &= (V_y-V_x)\frac{1}{\alpha+\beta\cos\Omega t}. \end{aligned} \tag{18}$$

Inlocuind în (12), obținem până la urmă ecuația:

$$\begin{aligned} 4V_{xy} = (V_x-V_y)\left[\beta\Omega\sin\Omega t-\frac{a+b\cos\Omega t+c\sin\Omega t}{\alpha+\beta\cos\Omega t}\right]+ \\ +(p+q\cos\Omega t+r\sin\Omega t)\,V. \end{aligned} \tag{19}$$

Ne mai rămân de calculat $\sin\Omega t$ și $\cos\Omega t$ în funcție de x și de y. Pentru aceasta, revenim la ecuațiile (14) care ne dau:

$$x-y=\frac{4}{\Omega\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\operatorname{tg}\frac{\Omega t}{2}\right)$$

de unde

$$\operatorname{tg}\frac{\Omega t}{2}=\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}\operatorname{tg}\left(\frac{\Omega}{4}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,(x-y)\right)$$

și

$$\begin{aligned} \cos\Omega t &= \frac{\alpha\cos a_0(x-y)-\beta}{\alpha-\beta\cos a_0(x-y)} \\ \sin\Omega t &= \frac{\sin a_0(x-y)}{\alpha-\beta\cos a_0(x-y)} \end{aligned} \tag{20}$$

cu

$$a_0 = \frac{\Omega}{2}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Inlocuind în (19), obținem o ecuație de forma:

$$4V_{xy} = (V_x - V_y)\,A(x, y) + B(x, y)V$$

unde s'a pus:

$$A(x, y) = \beta\Omega\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\,\frac{\sin a_0(x-y)}{\alpha - \beta\cos a_0(x-y)} -$$

$$- \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2}[a\alpha - b\beta + (b\alpha - a\beta)\cos a_0(x-y) + c\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\sin a_0(x-y)]$$

și

$$B(x, y) = \frac{p\alpha - q\beta + (q\alpha - p\beta)\cos a_0(x-y) + r\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\sin a_0(x-y)}{\alpha - \beta\cos a_0(x-y)}.$$

Dar β fiind mai mic decât α, putem scrie:

$$A(x, y) = \frac{1}{\alpha - \beta\cos a_0(x-y)}[\alpha\beta\Omega - c)\sin a_0(x-y) + b\cos a_0(x-y) - a].$$

De unde noua ecuație

$$\begin{aligned} 4V_{xy}[\alpha - \beta\cos a_0(x-y)] &= [(\alpha\beta\Omega - c)\sin a_0(x-y) + \\ &+ b\cos a_0(x-y)](V_x - V_y) + [(p\alpha - q\beta) + \\ &+ (q\alpha - p\beta)\cos a_0(x-y) + r\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\sin a_0(x-y)]\,V \end{aligned} \tag{21}$$

pe care o vom scrie sub forma,

$$V_{xy} + a_1(x, y)(V_x - V_y) + b_1(x, y)\,V = 0. \tag{22}$$

5. Vom căuta acum să vedem care sunt condițiile inițiale la care satisface soluția ecuației (22), în cazul unei linii semiinfinite, în repaus pentru $t < 0$. Acestea se vor obține din condițiile (a) dela Nr. 3.

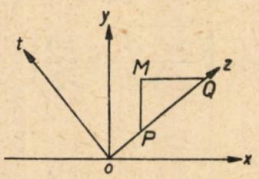

Fig. 1

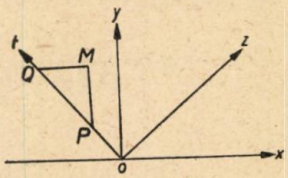

Fig. 2

Vom avea astfel:

$$V(z, t) = V\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x-y}{2}\right)$$

de unde, pentru $t = 0$, $x = y = z$,

$$V(z, 0) = V(x, 0) = V(y, 0) = 0.$$

Pe de altă parte, avem:

$$V_y = V_z z_y + V_t t_y = V_z + V_t t_y. \tag{23}$$

Dar pentru $t = 0$, avem:

$$V_t(z, 0) = 0,$$

de unde

$$(V_y)_{t=0} = V_z(z, 0),$$

și cum

$V(z, 0) = 0$, vom avea de asemenea $V_z(z, 0) = 0$, deci

$$(V_y)_{t=0} = 0.$$

Prin calcule analoage vom găsi, de asemenea,

$$(V_x)_{t=0} = 0.$$

In rezumat, curba care poartă datele problemei este dreapta $t = 0$ în sistemul de axe (Oz, Ot) și dreapta $y = x$ în sistemul de axe (Ox, Oy).

Luând dispoziția axelor după cum este arătat în figura 1, vom avea de-a-lungul axei Oz, $t = 0$, și luând ca variabile de integrare ξ și η:

$$V(z, 0) = 0, \quad (V_\xi)_{\eta=\xi} = (V_\eta)_{\eta=\xi} = 0. \tag{I}$$

Condițiile (I) fiind condițiile lui Cauchy pe curba $t = 0$, metoda lui Riemann ne dă o soluție nulă în unghiul xoy.

Pentru $t \geqslant 0$, se dă valoarea tensiunii pentru $z = 0$, și anume:

$$V(0, t) = E(t)$$

De-a-lungul axei Ot (fig. 2) avem $\xi = \eta$, iar din relația (20) deducem:

$$V(0, t) = E\left[\frac{1}{\Omega} \arccos \frac{\cos a_0 2\eta - \beta}{\alpha - \beta \cos a_0 2\eta}\right] = \varphi(\eta).$$

Pe de altă parte, pe axa Oy avem $V(y, 0) = 0$.

Problema pe care trebue s'o rezolvăm este deci problema a treia după clasificarea făcută de E. Picard, și anume:

Să se găsească soluția ecuației (22), când se dau valorile funcției necunoscute:

a) Pe un arc de curbă ce nu este intersectact decât într'un singur punct de către caracteristice;

b) Pe una din caracteristice.

Se știe că rezolvarea acestei probleme prin metoda lui Riemann conduce la o ecuație integrală de prima speță. A se vedea de exemplu la E. Picard [3].

Fie M punctul de coordonate (x, y), situat în unghiul toy.

Formula generală a lui Riemann ne dă pentru valoarea funcției V în punctul M (E. Goursat [4]):

$$V(M) = \frac{(uV)_Q + (uV)_P}{2} + \int_{PQ} Vua_1(d\xi + d\eta) + \tag{24}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{PQ} u(V_\eta\, d\eta - V_\xi\, d\xi) + \frac{1}{2}\int_{PQ} V(u_\xi\, d\xi - u_\eta\, d\eta).$$

Dar pe bisectoarea Ot avem $d\xi + d\eta = 0$, de unde deci,

$$V(M) = \frac{(uV)_Q + (uV)_P}{2} + \frac{1}{2}\int_{PQ} u\,(V_\eta + V_\xi)_{\xi=-\eta}\,d\eta - \tag{25}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{PQ} V\,(u_\xi + u_\eta)_{\xi=-\eta}\,d\eta.$$

Dacă punctul M vine în punctul $A\,(0, y)$ de pe axa Oy, relaţia de mai sus ne dă:

$$V(A) = V(0, y) = 0 = \frac{(uV)_Q}{2} + \tag{25'}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^y u\,(V_\eta + V_\xi)_{\xi=-\eta}\,d\eta - \frac{1}{2}\int_0^y V\,(u_\xi + u_\eta)_{\xi=-\eta}\,d\eta$$

In această formulă totul este cunoscut, afară de termenul

$$\int_0^y u\,(V_\xi + V_\eta)_{\xi=-\eta}\,d\eta$$

care conţine funcţia necunoscută

$$(V_\eta + V_\xi)_{\xi=-\eta} = \psi(\eta) \tag{25''}$$

şi care satisface ecuaţiei integrale de prima speţă, de tip Volterra, dată de relaţia (25) de mai sus.

Această ecuaţie fiind verificată pentru $y = 0$, putem s'o derivăm în raport cu y, ceea ce ne conduce la o ecuaţie integrală de speţa a doua, de tip Volterra, pe care o putem rezolva prin metodele clasice.

Pe de altă parte, cum de-a-lungul axei Ot avem $V = \varphi(\eta)$, rezultă că

$$dV = V_\xi\,d\xi + V_\eta\,d\eta = (V_\eta - V_\xi)_{\xi=-\eta}\,d\eta$$

de unde

$$\varphi'(\eta) = (V_\eta - V_\xi)_{\xi=-\eta} \tag{25'''}$$

Din relaţiile (25'') şi (25''') deducem valorile derivatelor V_ξ şi V_η, de-a-lungul axei Ot, şi suntem astfel conduşi la problema lui Cauchy.

Funcţia lui Riemann, $u\,(x, y; \xi, \eta)$, considerată ca funcţie de ξ, η este soluţia ecuaţiei adjuncte,

$$u_{\xi\eta} - a_1(\xi, \eta)\,(u_\xi - u_\eta) + (b_1 + a_{1\eta} - a_{1\xi})\,u = 0 \tag{26}$$

care verifică condiţiile iniţiale:

$$u(x, y; x, \eta) = e^{\int_y^\eta a_1(x, \nu)\,d\nu}$$

$$u(x, y, x, y) = e^{-\int_x^\xi a_1(s, y)\,ds}.$$

Această soluţie poate fi determinată cu ajutorul unei ecuaţii integrale.

In adevăr, integrând ecuația (26) dela y la η, obținem:

$$u_s(x, y; s, \eta) - u_s(x, y; s, y) - \int_y^\eta a_1(s, \rho)\,(u_s - u_\rho)\,d\rho + \tag{29}$$
$$+ \int_y^\eta (b_1 + a_{1\rho} - a_{1s})\,u(s, \rho)\,d\rho = 0$$

O nouă integrare dela x la ξ ne dă:

$$u(x, y; \xi, \eta) - u(x, y; x, \eta) - u(x, y; \xi, y) + u(x, y; xy) - \tag{30}$$
$$- \int_x^\xi \int_y^\eta a_1(s, \rho)\,(u_s - u_\rho)\,ds d\rho + \int_x^\xi \int_y^\eta (a_{1\rho} - a_{1s} + b_1)\,u(s, \rho)\,ds d\rho = 0.$$

Dar

$$- \int_x^\xi \int_y^\eta a_1(s, \rho)\,u_s\,ds d\rho = - \int_y^\eta a_1(\xi, \rho)\,u(x, y; \xi, \rho)\,d\rho +$$
$$+ \int_y^\eta a_1(x, \rho)\,u(xy; x, \rho)\,d\rho + \int_x^\xi \int_y^\eta a_{1s}(s, \rho)\,u(x, y; s\rho)\,ds d\rho$$

De asemenea

$$\int_x^\xi \int_y^\eta a_1(s, \rho)\,u_\rho\,ds d\rho = \int_x^\xi a_1(s, \eta)\,u(x, y; s, \eta)\,ds -$$
$$- \int_x^\xi a_1(s, y)\,u(x, y; s, y)\,ds - \int_x^\xi \int_y^\eta a_{1\rho}(s, \rho)\,u(x, y; s, \rho)\,ds d\rho,$$

iar ecuația (30) se transformă în ecuația integrală:

$$u(x, y; \xi, \eta) = e^{-\int_x^\xi a_1(s, y)\,ds} + e^{\int_y^\eta a_1(x, \rho)\,d\rho} - 1 +$$
$$+ \int_x^\xi a_1(s, y)\,e^{\int_x^s a_1(s_1, y)\,ds_1}\,ds -$$
$$- \int_y^\eta a_1(x, \rho)\,e^{\int_y^\rho a_1(x, \rho_1)\,d\rho_1}\,d\rho - \int_x^\xi a_1(s, \eta)\,u(x, y; s, \eta)\,ds + \tag{31}$$
$$+ \int_y^\eta a_1(\xi, \rho)\,u(x, y; \xi, \rho)\,d\rho - \int_y^\xi \int_y^\eta b_1(s, \rho)\,u(x, y; s, \rho)\,ds d\rho$$

care se poate scrie formal:

$$u(x, y; \xi, \eta) = g(x, y; \xi, \eta) - \int_x^\xi a_1(s, \eta)\,u(x, y; s, \eta)\,ds +$$
$$+ \int_y^\eta a_1(\xi, \rho)\,u(x, y; \xi, \rho)\,d\rho - \tag{32}$$
$$- \int_x^\xi \int_y^\eta b_1(s, \rho)\,u(x, y; s, \rho)\,ds d\rho.$$

Inlocuind în (25) pe u prin soluţia ecuaţiei (32), obţinem soluţia ecuaţiei (22).

Relaţiile (14) ne permit apoi să găsim expresia funcţiei V în raport cu variabilele z şi t, şi deci soluţia ecuaţiei (12), care verifică condiţiile iniţiale (5).

Problema transmisiei de-a-lungul unei linii semiinfinite, iniţial în repaus, când i se aplică o tensiune $E(t)$ la extremitatea $z = 0$, este astfel rezolvată.

6. Să trecem acum la cazul unei linii de lungime l, închisă la extremitatea receptrice pe o impedanţă Z.

Problema revine la a căuta o soluţie a ecuaţiei (12), cu condiţiile la limită (6). Ne găsim astfel în cazul unei probleme mixte, a cărei soluţie V trebue să verifice condiţiile iniţiale

$$V(z, 0) = 0, \quad V_t(z, 0) = 0 \text{ pentru } t \leqslant 0, \tag{33}$$

şi condiţiile la limită

$$V(0, t) = f(t) \tag{34}$$

$$V(l, t) = Zi(l, t), \tag{35}$$

pentru $t > 0$.

In relaţia (35) vedem că figurează intensitatea de curent $i(l, t)$ care traversează impendanţa Z. Vom elimina această funcţie după cum urmează:

Făcând în a doua ecuaţie (2) $z = l$, obţinem:

$$[CV(l, t)]_t + gV(l, t) = -i_t(l, t) \tag{36}$$

Dar din (35) deducem

$$\frac{1}{Z} V_l(l, t) = i_l(l, t), \tag{37}$$

de unde, pentru $V(l, t)$ ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâiu, în raport cu variabilele l şi t:

$$C(t)\, V_t(l, t) + V(l, t)\,(C_t + g) + \frac{1}{Z} V_l(l, t) = 0, \tag{38}$$

şi cu condiţia la limită (34).

Integrând ecuaţia (38) dela 0 la l, găsim pentru $V(l, t)$ ecuaţia integro-diferenţială:

$$V(l, t) + ZC(t) \int_0^l V_s(s, t)\, ds + Z(C_t + g) \int_0^l V(s, t)\, ds = f(t). \tag{39}$$

Dacă notăm prin $F(t)$ soluţia ecuaţiei (39), problema mixtă de rezolvat revine la a găsi soluţia ecuaţiei (12) care să verifice condiţiile iniţiale (33) şi condiţiile la limită:

$$V(0, t) = f(t); \text{ pentru } z = 0, \text{ şi } V(l, t) = F(t), \tag{40}$$

pentru $z = l$.

Pentru aceasta, să ducem (fig. 3) bisectoarele Oz şi Ot, iar prin punctul A, $(OA = l)$, paralela AA' la Ot, care în sistemul de axe Oxy are ca ecuaţie:

$$x + y = l\sqrt{2}$$

Pe dreapta OA a cărei ecuație este $y = x$, avem:

$$(V_x = V_y)_{x=y} = 0, \text{ și } V(x, 0) = 0. \tag{25$_1$}$$

Fie A_1 punctul de intersecție a dreptei AA' cu axa Oy, și C_1 punctul de intersecție a paralelei la axa Ox, dusă prin punctul A_1.

Dreapta A_1C_1 este paralelă cu OA, iar cuadrilaterul OAA_1C_1 este un pătrat, ale cărui diagonale se întretaie în punctul B_1.

Datele lui Cauchy pe dreapta OA, exprimate prin relațiile (25′), determină soluția în triunghiul OAB_1. Metoda lui Riemann ne arată că această soluție este nulă, atât în interiorul triunghiului OAB_1, cât și pe laturile OB_1 și AB_1.

Cunoscând valorile funcției V pe segmentul de caracteristică OB_1 și pe segmentul de bisectoare OC_1, putem (problema a treia a lui Picard) să determinăm soluția în triunghiul OB_1C_1.

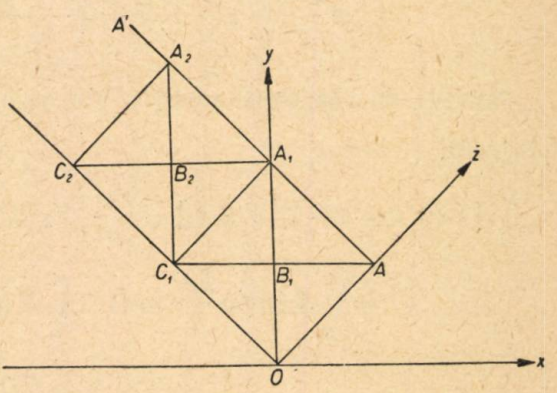

Fig. 3

Pe de altă parte, V fiind cunoscută pe segmentul de caracteristică AB_1 și pe segmentul de dreaptă AA_1, este determinată în triunghiul AA_1B_1.

Cunoscând V pe segmentele de caracteristică B_1A_1 și B_1C_1, soluția va fi determinată în pătratul $A_1B_1C_1B_2$.

Cunoscând valorile lui V pe segmentele A_1B_2 și A_1A_2, determinăm soluția în triunghiul $A_1B_2A_2$. De asemenea, fiind date valorile lui V pe segmentele B_2C_1 și C_1C_2, obținem soluția în triunghiul $C_1C_2B_2$.

Continuând astfel, obținem din aproape în aproape, soluția V în toată regiunea cuprinsă între paralelele Ot, $A\,A'$ și segmentul OA.

7. Metoda de mai sus este metoda generală de rezolvare. In practică însă, ceea ce interesează mai ales, sunt soluțiile particulare periodice ale ecuației (12), care satisfac condițiile inițiale (33) și (40) sau undele staționare.

Ne vom ocupa acum de aceste unde staționare. Pentru aceasta, vom scrie ecuația (12) sub forma:

$$V_{zz} = A(t)\, V_{tt} + B(t)\, V_t + C(t)\, V \tag{46}$$

și vom căuta o soluție a acestei ecuații care să satisfacă condițiile inițiale (33) și (40). In ceea ce privește studiul soluțiilor periodice ale ecuațiilor lineare cu derivate parțiale de ordinul doi, a se vedea M. Picone [5].

Fie

$$V(z, t) = \frac{2}{l} \sum_0^\infty{}_k V_k(t) \sin \frac{k\pi z}{l} + V(l_1 t) \tag{47}$$

soluția căutată.

Integrând (47) dela 0 la l, obținem:

$$V_k(t) = \int_0^l V(z,t) \sin\frac{k\pi z}{l}\,dz - V(l_1 t)\frac{l}{k\pi}[(-1)^k - 1] \tag{48}$$

Pe de altă parte, găsim:

$$\int_0^l V_{zz} \sin\frac{k\pi z}{l}\,dz = \left[V_z \sin\frac{k\pi z}{l}\right]_0^l - \int_0^l V_z \frac{k\pi}{l}\cos\frac{k\pi z}{l} = -\frac{k\pi}{l}\left[V\cos\frac{k\pi z}{l}\right]_0^l +$$

$$+\int_0^l \frac{k^2\pi^2}{l^2} V(z,t)\sin\frac{k\pi z}{l}\,dz = \frac{k\pi}{l}[V(0,t) - (-1)^k V(l,t)] -$$

$$-\frac{k^2\pi^2}{l^2}\left[V_k(t) + V(l,t)\cdot\frac{l}{k\pi}(-1)^k - 1)\right].$$

Se vede deci că, dacă înmulțim (46) prin $\sin\frac{k\pi z}{l}$ și integrăm dela 0 la l, obținem:

$$\frac{k\pi}{l}[V(0,t) - (-1)^k V(l,t)] - \frac{k^2\pi^2}{l^2}\left[V_k(t) + V(l,t)\frac{l}{k\pi}(-1)^k - 1)\right] =$$

$$= \int_0^l A(t)\sin\frac{k\pi z}{l} V_t\,dz + \int_0^l B(t)\sin\frac{k\pi z}{l} V_t\,dz + \tag{49}$$

$$+\int_0^l C(t)\, V(z,t)\sin\frac{k\pi z}{l}\,dz.$$

Pe de altă parte, din (48) deducem:

$$\int_0^l \sin\frac{k\pi z}{l} V_{tt}\,dz = \frac{d^2 V_k}{dt^2} + V_{tt}(l,t)\frac{l}{k\pi}[(-1)^k - 1]$$

și

$$\int_0^l \sin\frac{k\pi z}{l} V_t\,dz = \frac{dV_k}{dt} + V_t(l,t)\frac{l}{k\pi}[(-1)^k - 1]$$

ceea ce ne permite să obținem pentru funcția $V_k(t)$ ecuația diferențială:

$$A(t)\, V_k'' + B(t)\, V_k' + \left[C_1(t) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\right] V_k = F_k(t), \tag{50}$$

unde s'a pus

$$F_k(t) = \frac{k\pi}{l}[V(0,t) - (-1)^k V(l,t)] - \frac{l}{k\pi}[(-1)^k - 1]\left[\frac{k^2\pi^2}{l} V(l,t) +\right.$$

$$\left. + A(t)\, V_{tt}(l,t) + B(t)\, V\ (l,t) + C_1(t)\, V(l,t)\right] \tag{51}$$

și unde, în plus,

$$A(t) = (\alpha + \beta \cos \Omega t)^2$$
$$B(t) = a + b \cos \Omega t + c \sin \Omega t \tag{52}$$
$$C_1(t) = p + q \cos \Omega t + r \sin \Omega t,$$

cu $\alpha, \beta, a, b, c, p, q, r$, date respectiv de relațiile (11), (11α) și 11β).

Pentru $t = 0$ trebue să avem: $V(z, 0) = 0$, $V_t(z, 0) = 0$, de unde, pentru $V_k(t)$, condițiile inițiale:

$$V_k(0) = 0 \quad \text{și} \quad \frac{dV_k}{dt} = 0. \tag{53}$$

Punând ecuația (50) sub forma

$$\frac{d^2V_k}{dt^2} + P(t)\frac{dV_k}{dt} + Q(t)V_k = R_k(t) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{54}$$

și utilizând transformările clasice

$$S_k(t) = \int_0^t P_k(t)\, dt$$
$$H(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t P(s)\, ds} \tag{55}$$
$$V_k(t) = H(t)\, W(t),$$

ecuația (54) se transformă într'o ecuație de forma

$$\frac{d^2W_k}{dt^2} + D_k(t)\, W_k = G_k(t). \tag{56}$$

Ținând seama de relațiile (52), obținem:

$$P(t) = (a + b\cos\Omega t + c\sin\Omega t)(\alpha + \beta\cos\Omega t)^2 = a_1 + b_1\cos\Omega t + c_1\sin\Omega t$$

$$Q(t) = (p + q\cos\Omega t + r\sin\Omega t)\,\alpha^2\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\cos\Omega t\right)^{-2} =$$

$$= p_1 + q_1\cos\Omega t + r_1\sin\Omega t$$

și:

$$R_k(t) = \frac{k\pi}{l}[V(0, t) - (-1)^k V(l, t)]\,\alpha^2\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\cos\Omega t\right)^{-2} -$$

$$-\frac{l}{k\pi}[(-1)^k - 1]\left[\frac{k^2\pi^2}{l^2}V(l, t) + A(t)V_u(l, t) + B(t)\,V_t(l, t) + C_1(t)V(l, t)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[1 + \frac{\beta}{\alpha}\cos\Omega t\right]^{-2}\cdot\alpha^2.$$

Dar

$$D_k(t) = Q(t) - P_k^1(t) - \frac{P^2(t)}{4} \tag{58}$$

şi:

$$G_k(t) = R_k(t)\, e^{\frac{1}{2}\int_0^t P(s)\,ds} \tag{59}$$

Făcând toate calculele şi ţinând seama de relaţia $\alpha > \beta$, obţinem:

$$D_k(t) = \delta^2 + q_2 \cos\Omega t + r_2 \sin\Omega t \tag{60}$$

unde δ, q_2, r_2, sunt constante pozitive.

Ecuaţia (56) este deci de forma:

$$\frac{d^2W_k}{dt^2} + (\delta^2 + q_2 \cos\Omega t + r_2 \sin\Omega t)\, W_k = G_k(t) \tag{61}$$

Să căutăm condiţiile iniţiale la care trebue să satisfacă soluţia ecuaţiei (61). Din relaţiile (55) deducem:

$$\frac{dV_k}{dt} = H(t)\frac{dW_k}{dt} + W_k \frac{dH}{dt}$$

de unde se vede imediat că

$$W_k(0) = 0, \quad \left(\frac{dW_k}{dt}\right)_{t=0} = 0. \tag{62}$$

Pentru a rezolva ecuaţia (61), adică pentru a găsi soluţia care să verifice condiţiile iniţiale (62) (acestea sunt condiţiile lui Cauchy), vom utiliza o metodă bazată pe calculul simbolic, metodă pe care am mai aplicat-o în studiul reţelelor electrice cu parametri variabili [6].

Fie $\varphi_k(p)$ şi $g_k(p)$, respectiv imaginile funcţiilor $W_k(t)$ şi $G_k(t)$, adică

$$\varphi_k(p)\ \mathfrak{L} W_k(t) \quad , \quad g_k(p)\ \mathfrak{L} G_k(t).$$

Ţinând seama de condiţiile (62), obţinem pentru imaginea derivatei a doua a funcţiei $W_k(t)$ expresia:

$$W_k''(t)\ \mathfrak{L}^{-1}\ p^2\, \varphi_k(p) - pW_k'(0) - W_k(0),$$

adică

$$W_k''(t)\ \mathfrak{L}^{-1}\ p^2\, \varphi_k(p).$$

Inlocuind în ecuaţia (61), găsim:

$$\varphi_k(p)\,[p^2 + \delta^2] + \int_0^\infty e^{-pt}\, N(t)\, W_k(t)\, dt = g_k(p), \tag{63}$$

unde s'a pus

$$N(t) = q_2 \cos\Omega t + r_2 \sin\Omega t. \tag{64}$$

Luând pentru $\varphi_k(p)$ şi $W_k(t)$ desvoltările sub formă de serii

$$\varphi_k(p) = \sum_0^\infty{}_\mu\ \varphi_k^{(\mu)}(p) \tag{65}$$

şi

$$W_k(t) = \sum_0^\infty{}_\mu\ W_k^{(\mu)}(t) \tag{66}$$

unde indicele (μ) este un indice de însumare, vom avea

$$\varphi_k^{(\mu)}(p)\ \mathfrak{L}W_k^{(\mu)}(t). \tag{67}$$

Aplicând ecuației (63) metoda aproximațiilor succesive, obținem pentru funcțiile $\varphi_k^{(\mu)}(p)$ următoarele relații de recurență:

$$\varphi_k^{(0)}(p) = \frac{1}{p^2+\delta^2}\, g_k(p)$$

$$\varphi_k^{(1)}(p) = -\frac{1}{p^2+\delta^2}\int_0^\infty e^{-pt}\, N(t)\ \varphi_k^{(0)}(t)\, dt\ \mathfrak{L}W_k^{(0)}(t)$$

. . . . . .

$$\varphi_k^{(\mu)}(p) = -\frac{1}{p^2+\delta^2}\int_0^\infty e^{-pt}\, N(t)\ \varphi_k^{(\mu-1)}(t)\, dt\ \mathfrak{L}W_k^{(\mu)}(t)$$

. . . . . .

Soluția $W_k(t)$ este astfel determinată sub formă de serie, și se poate arăta că această serie este convergentă, în problemele ce se studiază din punct de vedere practic.

8. Cazul unei linii de lungime l, în scurt-circuit la extremitatea receptrice, se tratează la fel. Este suficient să facem mai sus $V(l,t) = 0$ pentru a avea soluția care corespunde condițiilor (7).

9. Ne mai rămâne de studiat cazul unei linii de lungime l, deschisă la extremitatea receptrice. Dacă se consideră linia în repaus pentru $t \leqslant 0$, trebue să căutăm soluția sistemului (3), care să verifice condițiile inițiale

$$i(z,0) = 0, \qquad i_t(z,0) = 0$$

$$V(z,0) = 0, \qquad V_t(z,0) = 0$$

pentru $t \leqslant 0$,
și condițiile la limită

$$V(0,t) = f(t); \quad i(l,t) = 0, \text{ pentru } t > 0.$$

Pentru ca problema să poată fi rezolvată, este necesar să cunoaștem una din funcțiile $V(l,t)$, sau $i(0,t)$, adică valoarea tensiunii la extremitatea receptrice, sau intensitatea de curent la originea liniei.

Cum pentru $z = l$ avem $i(l,t) = 0$, vom avea, de asemenea,

$$i_t(l,t) = 0.$$

In aceste condiții, făcând $z = l$ în prima ecuație (3), găsim că:

$$V_l(l,t) = 0,$$

deci

$$V(l,t) = V_0,$$

unde V_0 este o constantă arbitrară, care depinde de tensiunea aplicată în origine, $V(0,t) = f(t)$.

Pe de altă parte însă, tensiunea $V(0,t) = f(t)$ corespunde unei intensități de curent $i(0,t)$, ce se poate determina prin aceleași mijloace fizice ca și cele care ne permit să determinăm tensiunea dată $V(0,t)$.

Vom presupune deci că $i(0, t)$ este cunoscută.

In aceste condiţii, vom avea pentru $i(0, t)$

$$\left.\begin{aligned} i(z, 0) &= 0 \quad , \quad i_t(z, 0) = 0 \\ i(0, t) &= f(t), \quad i(l, t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Ecuaţia cu derivate parţiale la care satisface funcţia $i(z, t)$ se obţine eliminând $V(z, t)$ între cele două ecuaţii ale sistemului (3).

Făcând aceste calcule, se obţine pentru $i(z, t)$ ecuaţia:

$$i_{zz} = LCi_{tt} + [(2L_t + R)C + (C_t + g)L]\, i_t + [CL_{tt} + (C_t + g)(L_t + R)]\, i \tag{69}$$

Luând pentru L şi C aceleaşi expresii (8), găsim pentru ecuaţia (69) aceleaşi caracteristice date de ecuaţia (13).

Raportând ecuaţia (69) la caracteristicele ei, vom ajunge la o ecuaţie de aceeaşi formă ca şi ecuaţia (22).

Soluţia acestei ecuaţii care verifică condiţiile (68) se obţine, fie prin metoda generală dela Nr. 6, fie, pentru undele staţionare, prin metoda dela Nr. 7, de mai sus.

A doua ecuaţie (3) ne dă apoi funcţia $V(z, t)$, printr'o ecuaţie diferenţială de ordinul întâiu, care se poate transforma într'o ecuaţie integrală de tip Volterra, de speţa a doua.

In adevăr, integrând această ecuaţie dela 0 la t, obţinem:

$$\int_0^t (C_s + g)\, V(z, s)\, ds + \int_0^t C(s)\, V_s(z, s)\, ds = -\int_0^t i_z(z, s)\, ds.$$

Integrând termenul al doilea al membrului întâiu din ecuaţia de mai sus şi ţinând seama de faptul că $V(z, 0) = 0$, obţinem pentru $V(z, t)$ ecuaţia integrală de tip Volterra, de speţa a doua,

$$V(z, t) + \int_0^t \frac{g}{C(t)}\, V(z, s)\, ds = -\int_0^t i_z(z, s)\, ds. \tag{70}$$

Dacă $G(t, s)$ este nucleul rezolvant al ecuaţiei (70), vom avea:

$$V(z, t) = -\int_0^t i_z(z, s)\, ds - \int_0^t G(t, s)\, ds \int_0^s i_z(z, w)\, dw. \tag{71}$$

Aplicând integralei duble din (71) formula lui Dirichlet, obţinem în cele din urmă pentru $V(z, t)$ următoarea expresie:

$$V(z, t) = -\int_0^t i_z(z, s)\, ds \left[1 + \int_s^t G(t, w)\, dw\right] \tag{72}$$

In cazul când se cunoaşte soluţia $V(z, t)$, intensitatea de curent $i(z, t)$ se obţine cu ajutorul primei ecuaţii din sistemul (3), prin calcule asemănătoare celor de mai sus.

10. Vom termina această lucrare cu un studiu sumar al caracteristicelor (13), pe care le scriem sub forma:

$$z \pm \frac{2}{\Omega\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} \operatorname{tg} \frac{\Omega t}{2}\right) = C^{te}. \tag{73}$$

Punând

$$\delta = \frac{\Omega}{2}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \quad \text{și} \quad \gamma = \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}},$$

ecuația (73) se scrie încă

$$\operatorname{tg}[\delta(z - C_0)] = \mp \gamma \operatorname{tg}\frac{\Omega t}{2}, \tag{74}$$

unde C_0 este o constantă arbitrară.

Ecuația (74) mai este echivalentă cu

$$\operatorname{tg}[\delta(z - C_0) + k\pi] = \mp \gamma \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega t}{2} + k'\pi\right) \tag{75}$$

unde

$$k, k' = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Curba reprezentată de ecuația (75) este formată dintr'o infinitate numărabilă de ramuri analitice care se deduc prin translații succesive de $\frac{\pi}{\delta}$ de-a-lungul axei Oz, și de $\frac{\pi}{\Omega}$ de-a-lungul axei Ot, a ramurii de caracteristică ce trece prin origine și a cărei ecuație este:

$$\operatorname{tg} \delta z = \gamma \operatorname{tg}\frac{\Omega t}{2}. \tag{76}$$

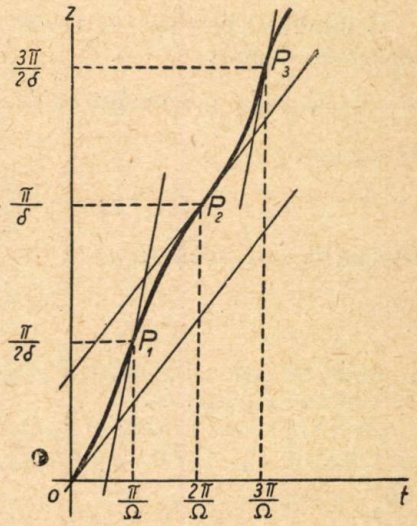

Fig. 4

Ecuația (13) ne dă pentru derivata de primul ordin

$$z_t = \frac{1}{\alpha + \beta \cos \Omega t}$$

și cum $\alpha > \beta > 0$, rezultă că z_t este continuu pozitivă și nu se anulează pentru nicio valoare a lui t.

Funcția $z(t)$ este deci continuu crescătoare.

Calculând derivata a doua, găsim:

$$z_{tt} = \frac{\beta\Omega \sin \Omega t}{(\alpha + \beta \cos \Omega t)^2} \tag{77}$$

Din (77) se vede că z_{tt} se anulează pentru

$$t = \frac{k\pi}{\Omega} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

In punctul $z = 0$, $t = 0$, avem:

$$(z_t)_{t=0} = \frac{1}{\alpha + \beta} > 0 \quad , \quad \text{și } z_{tt} = 0.$$

Punctul O este deci un punct de inflexiune a curbei, şi face cu axa Ot un unghiu $> \frac{\pi}{4}$.

Pe de altă parte, pentru $0 < t < \varepsilon$, cu ε suficient de mic, concavitatea curbei este îndreptată în sus, deoarece $z_{tt} > 0$.

Tangentele în punctele de inflexiune (a căror abscise sunt date de relaţia $\Omega t = k\pi$) au următoarele valori:

$$z_t = \frac{1}{\alpha + \beta} \quad \text{pentru } k = 0, 2, 4, \ldots$$

şi

$$z_t = \frac{1}{\alpha - \beta} \quad \text{pentru } k = 1, 3, 5, \ldots$$

Schimbând pe t în $-t$, z se schimbă în $-z$, deci curba este simetrică prin raport la origine.

Considerând primul punct de inflexiune $P\left(\frac{\pi}{\Omega}, \frac{\pi}{2\delta}\right)$ şi făcând schimbul de variabile

$$t = t_1 + \frac{\pi}{\Omega}, \quad z = z_1 + \frac{\pi}{2\Omega},$$

ecuaţia curbei devine:

$$\operatorname{ctg} \delta z_1 = \operatorname{ctg} \frac{\Omega t_1}{2},$$

de unde se vede că ramura P_1P_2 este simetrica ramurii OP_1, prin raport cu punctul P_1 (fig. 4).

Se vede uşor că ramura P_2P_3 este simetrică cu ramura P_1P_2 prin raport cu punctul P_2. Deci ramura P_2P_3 se obţine printr'o translaţie a ramurii OP_1, de forma $t = t + \frac{2\pi}{\Omega}$, $z = z + \frac{\pi}{\delta}$.

Ramura următoare se obţine printr'o translaţie analoagă a ramurii P_2P_3, etc.

Institutul de Matematică
al Academiei R.P.R., Bucureşti.

НОВОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕЛЕГРАФИСТОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

1.2.3. Автор рассматривает случай распространения электрической энергии вдоль линейных проводников тогда, когда линейные постоянные L и C являются периодическими функциями времени, что приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} (L_t + R)i + Li_t &= -V_z(z, t) \\ (C_t + g)V + CV_t &= -i_z(z, t) \end{aligned} \tag{3}$$

откуда, в результате исключения $i(z,t)$, уравнение с частными производными гиперболического типа для $V(z,t)$ становится

$$V_{zz} = LCV_{tt} + Lg + (L_t + R)\,C + 2LC_t\,V_t + (L_t + R)\,(C_t + g) + L\,C_{tt}\,V \tag{4}$$

4. Если положить для $L(t)$ и $C(t)$ выражения

$$L = L_o\,(l + m\cos\Omega t); \quad C = C_o\,(l + n\cos\Omega t), \tag{8}$$

где $0 < m < 1$ и $0 < n < 1$, уравнение (4) принимает вид

$$V_{zz} = (\alpha + \beta\cos\Omega t)^2\,V_{tt} + (a + b\cos rt + c\sin\Omega t)\,V_t + (p + q\cos\Omega t + r\sin\Omega t)\,V, \tag{12}$$

где
$$2\alpha = \sqrt{L_o\,C_o}\,[\sqrt{l + m + n} + \sqrt{l - m - n}$$
$$2\beta = \sqrt{L_o\,C_o}\,[\sqrt{l + m + n} - \sqrt{l + m + n} \tag{11}$$

$$a = gL_0 + RC_0\ ,\ b = gL_0 + RC_0\,n,\ c = -L_0\,C_0\,\Omega\,(m + 2) \tag{11'}$$

$$p = Rg + L_o\,C_o\,m\,n\Omega^2,\ q = -L_o\,C_o\,n\Omega^2\ r = -(L_o\,g\,m + R\,C_o)\,n\Omega. \tag{11''}$$

Характеристики (12) даны в выражении

$$dt = \pm(\alpha + \beta\cos\Omega t)\,dz, \tag{13}$$

решения которого даны в (14).

Относя (12) к его характеристикам, находим прежде всего уравнение

$$4V_{xy} = (V_x - V_y)\left[\beta\,\Omega\sin\Omega t - \frac{a + b\cos\Omega t + c\sin\Omega t}{\alpha + \beta\cos\Omega t}\right] + (p + q\cos\Omega t + r\sin\Omega t)\,V. \tag{19}$$

С другой стороны, учитывая (14), находим для $\cos\Omega t$ и $\sin\Omega t$ выражения (20), откуда получаем уравнение 21, которому придаем окончательный вид (22).

5. Автор ищет решение в случае полубесконечной линии в состоянии электрического покоя при $t<0$, к которой он прилагает в точке $z=0$ известное напряжение $E(t)$, в исходный момент $t=0$.

Исходные условия этой задачи следующие.

$$i(z,0) = 0,\ i_t(z,0) = 0$$
$$V(z,0) = 0,\ V_t(z,0) = 0,\ V(0,t) = E(t) \tag{5}$$

при $t \leqslant 0$; для (22) им соответствуют условия:

$$V(x,0) = V(y,0) = 0,\ V_x = V_y = 0$$

при $t = 0$ и $V(0,t) = E\left\{\frac{l}{\Omega}\ \arccos\ \frac{\alpha\ cosa_o^2\ h - \beta}{\alpha - \beta\ cosa_o^2\ h} = \varphi(h)\right.$

при $t \geqslant 0$ и $z = 0$.

Кривые, носящие вышеуказанные, данные, суть: биссектрисы $\xi = \eta$ (рис. 1) при $t = o$ (данные Коши) и биссектриса $\xi = \eta$ при $t > 0$, $z = 0$.

Метод Римана дает для решения в любой точке M угла zOy, $V_m(M) = 0$, и для M в углу tOy $(t > 0)$:

$$V(M) = \frac{(uV)_Q + (uV)_P}{2} + \frac{1}{2}\int_{PQ} u(V_\eta + V_\xi)\,d_h - \frac{1}{2}\int_{PQ} V(u_\xi + u_\eta)\,d_\eta, \qquad (25)$$

где $u(x, y;\ \xi, \eta)$ является функцией Римана.

При данных $V = 0$ на характеристике $0y$ и $V = \varphi(\eta)$ на биссектрисе $\xi = -\eta$ (рис. 2), перед нами случай третьей задачи Пикара, который приводится к задаче Коши посредством интегрального уравнения типа Вольтерра первого рода (25 а), полученного путем приведения точки M в A на оси $0y$; его неизвестным является функция $(V_\eta + V_\eta)\,\xi = -h$.

С другой стороны, из соотношения $E(t) = \varphi(\eta)$ выводим $(V_\xi - V_\eta)\,\xi = -\eta = \varphi'(\eta)$, откуда следуют значения V_η и V_ξ при $\xi = -\eta$.

Функция Римана является решением уравнения (26)

$$u_{\xi h} - a,\ (\xi, \eta)\ (u_\xi - u_\eta) + (b, + a, _\eta - a, _\xi)\ u = 0,$$

проверяющего исходные условия:

$$u(x, y:\ \ x, \eta) = e\int_y^\eta a, (x, s)\ ds,\ \ u(x, y;\ \ \xi, y) = e - \int_\xi^x a, (v, y)\ dv.$$

Автор определяет это решение при помощи интегрального уравнения (32), полученного путем интегрирования (26) сначала от y до η и затем от x до ξ, учитывая предшествующие исходные условия.

6. *Вторая задача.* Линия длины l, замкнутая на полном сопротивлении z на рецепторном конце, к которой в момент $t = 0$ в точке $z = 0$ прилагают известное напряженне $f(t)$.

Предполагается, что линия находится в покое при $t < 0$.

Это смешанная задача, решение которой должно проверить исходные условия:

$$V(z, 0) = 0;\quad V_t(z, 0) = 0 \qquad \text{при } t \leqslant 0 \qquad (33)$$

$$V(0, t) = f(t) \qquad (34)$$

$$V(l, t) = Zi(l, t) \qquad \text{при } t > 0 \qquad (35)$$

Положив $z = l$ во втором уравнении (3) и учитывая соотношение

$$\frac{1}{Z} V_l(l, t) = i_l(l, t),$$

выведенное из (35) находим, что $V(l, t)$ является решением интегро-дифференциального уравнения (29).

Далее, автор определяет общее решение (22), которое проверяет условия (33), (34) и (35) при помощи метода Римана.

Данные Коши на CA (рис. 3) определяют решение в треугольнике OAB.

Данные на OB_1 и OC_1 определяют его в треугольнике OB_1C_1, а данные на AB_1 и AA_1 в треугольнике AB_1A_1. Далее, данные на характеристиках B_1A_1 и A_1C_1 дают решение в квадрате $A_1O_1G_1B_2$ и т. д.

Автор определяет таким образом, последовательно решение во всей области, заключенной между параллелями Ot и AA' и отрезком OA.

7. Другой метод стационарных волн предыдущей задачи. Придав (12) вид (46), автор ищет стационарные волны (47) при помощи метода, аналогичного методу Пикона (5) и находит, что функции $V_k(t)$ являются решениями дифференциального уравнения (50), удовлетворяющими исходным условиям $V_k(0) = V_k'(0) = 0$.

Напишем (50) также в виде (54); классические преобразования (55) приводят к уравнению (56), где $D_k(t)$ и $G_k(t)$ даны (58) и (59); это позволяет писать (56) также в виде (61), решение которого отыскивается; последнее проверяет условия Коши:

$$W_k(0) = W_k'(0) = 0.$$

Автор определяет это решение при помощи преобразованной Лапласа.

Принимая ряд (66), в качестве решения (61) и (65) в качестве лапласовского отображения, при

$$\varphi_k^{(r)}(p) \, L \, W_k^{(r)}(t).$$

находим, что отображения даны возвратными соотношениями:

$$\varphi_k^{(0)}(p) = \frac{1}{p^2 + \delta^2} g_k(p)$$

$$\varphi_k^{(r)}(p) = -\frac{1}{p^2 + \delta^2} \int_0^\infty e^{-pt} N(t) \, \varphi_{k-1}^{(r-1)}(t) \, dt \propto W_k^{(r)}(t),$$

где допускаем

$$N(t) = (q_2 \cos \Omega t + r_2 \sin \Omega t)$$

8. *Третья задача.* Линия l в состоянии короткого замыкания в рецепторном конце, в покое при $t<0$, к которой в точке $z=0$ прилагается известное напряжение $V(0, t) = f(t)$. Находят искомое решение, положив $V(l, t) = 0$ в предыдущей задаче.

9. *Четвертая задача.* Линия длины l, открытая в рецепторном конце. Решение соответствует исходным условиям

$$i(z, 0) = 0, \; i_t(z, 0) = 0; \quad V(z, 0) = 0, \; V_t(z, 0) = 0$$

и предельным условиям

$$V(0, t) = f(t); \quad i(l, t) = 0 \qquad \text{при } t > 0.$$

Чтобы решить эту задачу, предполагаем, сверх того, что $i(0, t)$ известно и получаем для $i(z, t)$ уравнение (69), решение которого находим согласно методам §§ 6 и 7.

Второе уравнение (3) дает далее $V(z, t)$ при помощи интегрального уравнения (70).

10. Краткое изучение характеристик. Автор приводит характеристики (14) к виду (74), где C_0 является произвольной постоянной; он доказывает, что кривые (74) получаются в результате бесконечного числа тран-

сляций из ветви кривой, проходящей через происхождение; ее уравнение

$$tg\,\delta z = \gamma\, tg\,\frac{\Omega t}{2}. \tag{76}$$

Кривая (76) постоянно возрастает (ее производная z_t постоянно положительна); она обладает бесконечным числом точек отклонения, абсцисс, данных $\Omega t = k_p$, где касательные к кривой имеют в качестве значений

$$z_t = \frac{1}{\alpha+\beta} \qquad \text{при } k = 0, 2, 4, \ldots$$

$$z_t = \frac{1}{\alpha+\beta} \qquad \text{при } k = 1, 3, 5, \ldots$$

Если 0, P_1, P_2, P_3 — последовательные точки отклонения, то ветвь P_2P_3 симметрична ветви OP_1 относительно P_1; ветвь P_2P_3 симметрична P_1P_2 относительно P_2 и т. д.

UNE NOUVELLE ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

(RÉSUMÉ)

1. 2. 3. L'Auteur considère le cas de la propagation de l'énergie électrique le long des conducteurs linéaires, dans le cas où les constantes linéiques L et C sont fonctions périodiques du temps, ce qui le conduit au système d'équations

$$(L_t + R)\, i + L i_t = -V_z(z,t) \tag{3}$$
$$(C_t + g)\, V + C V_t = -i_z(z,t)$$

d'où, en éliminant $i\,(z,t)$, l'équation aux dérivées partielles de type hyperbolique, pour $V(z,t)$:

$$V_{zz} = LCV_{tt} + Lg + (L_t + R)\,C + 2LC_t\,V_t + (L_t + R)\,(C_t + g) + LC_{tt}\,V \tag{4}$$

4. En prenant pour $L(t)$ et $C(t)$ les expressions

$$L = L_0(1 + m\cos\Omega t); \quad C = C_0(l + n\cos\Omega t) \tag{8}$$

où $$0 < m < 1 \quad \text{et} \quad 0 < n < 1,$$

l'équation (4) prend la forme

$$V_{zz} = (\alpha + \beta\cos\Omega t)^2\, V_{tt} + (a + b\cos\Omega t + c\sin\Omega t)\, V_t + \tag{12}$$
$$+ (p + q\cos\Omega t + r\sin\Omega t)\, V,$$

où

$$2\alpha = \sqrt{L_0 C_0}\,\left[\sqrt{1+m+n} + \sqrt{1-m-n}\right]$$
$$2\beta = \sqrt{L_0 C_0}\,\left[\sqrt{1+m+n} - \sqrt{1-m-n}\right] \tag{11}$$
$$a = g L_0 + R C_0,\ b = g L_0 + R C_0 n,\ \ c = -L_0 C_0 \Omega (m+2) \tag{11'}$$
$$p = Rg + L_0 C_0 mn\Omega^2,\ q = -L_0 C_0 n\Omega^2,\ r = -(L_0 gm + RC_0)\, n\Omega \tag{11''}$$

Les caractéristiques de (12) sont données par

$$dt = \pm (\alpha + \beta \cos \Omega t)\, dz \tag{13}$$

dont les solutions sont données par (14).

En rapportant (12) à ses caractéristiques, on trouve d'abord l'équation

$$4V_{xy} = (V_x - V_y)\left[\beta\Omega \sin \Omega t - \frac{a + b\cos\Omega t + c \sin \Omega t}{\alpha + \beta \cos \Omega t}\right] + \tag{19}$$

$$+ (p + q \cos \Omega t + r \sin \Omega t)\, V.$$

D'autre part, compte tenu de (14), on trouve pour cos Ω t et sin Ωt les expressions (20), d'où l'équation (21) que l'on met finalement sous la forme (22).

5. *Premier problème.* On en cherche la solution dans le cas d'une ligne semi-infinie au repos électrique pour $t < 0$, et à laquelle on applique, au point $z = 0$, une tension connue $E(t)$, au moment initial $t = 0$.

Les conditions initiales de ce problème sont

$$\begin{aligned} &i(z, 0) = 0 \quad , \quad i_t(z, 0) = 0 \\ &V(z, 0) = 0 \quad , \quad V_t(z, 0) = 0 \quad , \quad V(0, t) = E(t) \text{ pour } t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{5}$$

auxquelles correspondent pour (22) les conditions

$$V(x, 0) = V(y, 0) = 0 \quad , \quad V_x = V_y = 0 \quad , \quad \text{pour } t = 0, \text{et}$$

$$V(0, t) = E\left[\frac{1}{\Omega} \arccos \frac{\alpha \cos a_0 2\eta - \beta}{\alpha - \beta \cos a_0 2\eta} = \varphi(\eta)\right]$$

pour $t \geqslant 0$ et $z = 0$.

Les courbes qui portent les données ci-dessus sont:
la bissectrice $\xi = \eta$ (fig. 1) pour $t = 0$ (données de Cauchy), et la bissectrice $\xi = -\eta$, pour $t > 0, z = 0$.

La méthode de Riemann donne pour la solution en tout point M de l'angle zOy, $V_m(M) = 0$, et pour M dans l'angle tOy $(t > 0)$:

$$V(M) = \frac{(uV)_Q + (uV)_P}{2} + \frac{1}{2}\int_{PQ} u\,(V_\eta + V_\xi)_{\xi=-\eta}\, d\eta - \tag{25}$$

$$- \frac{1}{2}\int_{PQ} V\,(u_\xi + u_\eta)_{\xi=-\xi}\, d\eta$$

où $u\,(x, y; \xi, \eta)$ est la fonction de Riemann.

Les données étant: $V = 0$ sur la caractéristique Oy, et $V = \varphi(\eta)$ sur la bissectrice $\xi = -\eta$ (fig. 2), nous sommes dans le cas du troisième problème de Picard, que l'on ramène au problème de Cauchy, par l'intermédiaire d'une équation intégrale de type Volterra, de première espèce (25), obtenue en ramenant le point M en A sur l'axe Oy, et dont l'inconnue est la fonction

$$(V_\xi + V_\eta)_{\xi = -\eta}$$

D'autre part, de la relation $E(t) = \varphi(\eta)$ on tire:

$$(V_\xi - V_\eta)_{\xi=-\eta} = \varphi'(\eta),$$

d'où finalement les valeurs V_ξ et V_η pour $\xi = -\eta$.

La fonction de Riemann est la solution de l'équation (26)

$$u_{\xi\eta} - a_1(\xi,\eta)(u_\xi - u_\eta) + (b_1 + a_{1_\eta} - a_{1_\xi})u = 0,$$

qui vérifie les conditions initiales:

$$u(x,y;x,\eta) = e^{\int_y^\eta a_1(x,s)\,ds}, \quad u(x,y;\xi,y) = e^{-\int_\xi^x a_1(v,y)\,dv}$$

L'Auteur détermine cette solution à l'aide d'une équation intégrale (32) obtenue en intégrant (26) d'abord de y à η et ensuite de x à ξ et en tenant compte des conditions initiales précédentes.

6. *Second problème.* Ligne de longueur l, fermée sur une impédance Z à l'extrémité réceptrice, et à laquelle on applique à l'instant $t = 0$, au point $z = 0$, une tension connue $f(t)$.

La ligne est supposée au repos pour $t < 0$.

C'est un problème mixte dont la solution doit vérifier les conditions initiales:

$$V(z,0) = 0\,;\ V_t(z,0) = 0 \text{ pour } t \leqslant 0, \tag{33}$$

et

$$V(0,t) = f(t) \tag{34}$$

$$V(l,t) = Zi(l,t) \text{ pour } t > 0. \tag{35}$$

En faisant $z = l$ dans la seconde équation (3) et compte tenu de la relation

$$\frac{1}{Z} V_l(l,t) = i_l(l,t)$$

tirée de (35), on trouve que $V(l,t)$ est la solution de l'équation intégro-différentielle (39).

L'Auteur détermine ensuite la solution générale de (22) qui vérifie les conditions (33), (34) et (35), par la méthode de Riemann.

Les données de Cauchy sur OA (fig. 3) déterminent la solution dans le triangle OAB.

Les données sur OB_1 et OC_1 la détermine dans le triangle $OB_1\ C_1$, et les données sur AB_1 et AA_1, dans le triangle $AB_1\ A_1$. Ensuite, les données sur les caractéristiques $B_1\ A_1$ et $B_1 C_1$ donnent la solution dans le carré $A_1\ O_1\ G_1 B_2$, et a.d.s.

On détermine ainsi, de proche en proche, la solution dans toute la région comprise entre les parallèles Ot et AA' et le segment OA.

7. Recherche par une autre méthode des ondes stationnaires du problème précédent.

En mettant (12) sous la forme (46), l'Auteur cherche les ondes stationnaires (47) par une méthode analogue à celle de M. Picone [5], et trouve que les fonctions $V_k(t)$ sont les solutions de l'équation différentielle (50) qui satisfont aux conditions initiales $V_k(0) = V'_k(0) = 0$.

On écrit encore (50) sous la forme (54) et par les transformations classiques (55) on est ramené à l'équation (56) où $D_k(t)$ et $G_k(t)$ sont

données par (58) et (59), ce qui permet d'écrire (56) encore sous la forme (61) et dont on cherche la solution qui vérifie les conditions de Cauchy:

$$W_k(0) = W'_k(0) = 0.$$

L'Auteur détermine cette solution à l'aide de la transformée de Laplace.

En prenant comme solution de (61) la série (66) et pour image laplacienne (65), avec

$$\varphi_k^{(\mu)}(p) \, \mathfrak{L} \, W_k^{(x)}(t),$$

on trouve que les images sont données par les relations de récurrence

$$\varphi_k^{(0)}(p) = \frac{1}{p^2 + \delta^2} g_k(p)$$

. . . . . .

$$\varphi_k^{(\mu)}(p) = -\frac{1}{p^2 + \delta^2} \int_0^\infty e^{-pt} N(t) \, \varphi_{k-1}^{(\mu-1)}(t) \, dt \, \mathfrak{L} \, W_k^{(\mu)}(t),$$

où l'on a mis

$$N(t) = (q_2 \cos \Omega t + r_2 \sin \Omega t)$$

8. *Troisième problème.* Ligne de longueur l en court-circuit à l'extrémité réceptrice, au repos pour $t < 0$, et à laquelle on applique, au point $z = 0$, une tension connue $V(0, t) = f(t)$.

La solution cherchée s'obtient en faisant $V(l, t) = 0$ dans le problème précédent.

9. *Quatrième problème.* Ligne de longueur l ouverte à l'extrémité réceptrice.

La solution correspond aux conditions initiales

$$i(z, 0) = 0, \quad i_t(z, 0) = 0; \quad V(z,0) = 0, \quad V_t(z\ 0) = 0$$

et aux conditions limites,

$$V(0, t) = f(t) \; ; \quad i(l, t) = 0 \quad \text{pour } t < 0.$$

Pour résoudre ce problème, on suppose, de plus, que $i(0, t)$ est connue et on obtient pour $i(z, t)$ l'équation (69) dont on cherche la solution par les méthodes des Nos 6 et 7.

La seconde équation (3) donne ensuite $V(z, t)$ à l'aide de l'équation intégrale (70)

10. *Étude sommaire des caractéristiques.* On ramène les caractéristiques (14) à la forme (74) où C_0 est une constante arbitraire, et l'on montre que les courbes (74) s'obtiennent par une infinité de translations, de la branche de courbe qui passe par l'origine et dont l'équation est

$$\operatorname{tg} \delta z = \gamma \operatorname{tg} \frac{\Omega t}{2}. \tag{76}$$

La courbe (76) est constamment croissante (sa dérivée z_t est constamment positive), possède une infinité de points d'inflexion, d'abscisses données par $\Omega t = k\pi$, et où les tangentes à la courbe ont pour valeurs

$$z_t = \frac{1}{\alpha + \beta} \quad \text{pour } k = 0, 2, 4...$$

et

$$z_t = \frac{1}{\alpha - \beta} \quad \text{pour } k = 1, 3, 5...$$

Si O, P_1, P_2, P_3, sont les points d'inflexion successifs (fig. 4), la branche P_1P_2 est symétrique de la branche OP_1 par rapport à P_1; la branche P_2P_3 symétrique de P_1P_2 par rapport à P_2, et a.d.s.

BIBLIOGRAFIE

1. M. I. Rozovschi, *Sur l'équation des Télégraphistes.* Docladî Acad. Nauc. U.R.S.S., II, 59, 1948, p. 1265—1268.
2. I. S. Berezine, *Sur le problème de Cauchy pour l'équation aux dérivées partielles linéaires du type hyperbolique.* Math. Sbornic, t. 24, 66, Nr. 2, 1949.
3. E. Picard, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles.* Gauthier-Villars, Paris, 1927, p. 152—156.
4. E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, t. III, 1942, p. 150.
5. M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*, cap. VII, p. 684.
6. S. Vasilache, *O nouă metodă de calcul al rețelelor electrice cu parametri variabili. II. Aplicații.* Anal. Acad. R.P.R., Seria: Mat., Fiz., Chim., t. III, Mem. 22, 1950, p. 9.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

ASUPRA FUNDAMENTELOR MECANICEI MIŞCĂRILOR REALIZABILE ALE PUNCTULUI MATERIAL

DE

ALEXANDRU FRODA

INTRODUCERE

In mecanica raţională se presupune că orice punct al unui sistem material în mişcare posedă în fiecare moment o acceleraţie bine definită.

Acest fapt implică ipoteza că funcţiile de timp, care definesc analitic mişcarea fiecărui punct al sistemului, sunt derivabile până la ordinul al doilea inclusiv. Se introduc, astfel, condiţii suplimentare, pe lângă condiţia de continuitate a acelor funcţii, singura necesară definirii mişcării.

Se ştie, însă, că funcţiile continue nu sunt în general derivabile. Câmpul mecanicei raţionale este deci cu mult mai restrâns decât al tuturor mişcărilor continue, care pot fi definite în cinematică.

Se pune în mod firesc întrebarea dacă, impunând funcţiilor care definesc mişcarea mai puţine restricţii, nu s'ar putea lărgi, în acest fel, câmpul mecanicei raţionale, rămânând în cadrul realităţilor fizice [1]).

Urmărind rezolvarea acestei chestiuni, am ajuns la concluzia că restricţiile folosite de mecanica raţională în definirea mişcărilor pe care le studiază, nu pot fi înlăturate, dar că ele pot şi trebue să fie înlocuite cu postulate susceptibile de a fi confruntate cu experienţa.

Ipoteza derivabilităţii mărimilor fizice are, într'adevăr, un caracter aprioric, nereductibil la experienţă. Acest fapt a fost subliniat de G. H a m e l [14] [2]), care, în axiomatizarea sa a mecanicei, introduce direct postulatul existenţei acceleraţiei [15].

In studiul de faţă înlăturăm, dela început, postulatele de existenţă a vitesei şi a acceleraţiei, postulate considerate până astăzi ca indispensabile pentru fundamentarea mecanicei raţionale şi propunem, în schimb, noi postulate sugerate de experienţă, şi care se pot confrunta cu aceasta.

---

[1]) Câmpul mecanicei raţionale este limitat astăzi de mecanica relativităţii generale şi de mecanica cuantică.

[2]) Acest autor arată că « *principiul* » după care « *toate mărimile observabile sunt continue şi continuu diferenţiabile* » nu este « *matematic demonstrabil şi nici empiric, deoarece nicio experienţă nu este destul de fină pentru a coborî până la diferenţiale* ».

Noile postulate au fost alese în așa fel ca ele să nu rezulte din postulatele mecanicei raționale și nici să nu le contrazică atunci când nu se mai admite *a priori* că orice mișcare a unui punct material posedă vitesă și accelerație, în fiecare moment.

Intemeietorii mecanicei au admis dela început aceste ipoteze, care corespundeau pe atunci presupunerii inițiale din analiză că orice funcție continuă este și derivabilă, presupunere dovedită, în cele din urmă, ca neîntemeiată. Răsturnarea acelei presupuneri de către Weierstrass, care a dat în 1875 primul exemplu al unei funcții continue fără derivată, nu a avut însă, contrar primelor așteptări, nicio urmare în fundamentarea paralelă a mecanicei raționale. Cercetând această problemă, Appell și Janaud [1] mai semnalau în 1881 existența funcțiilor continue fără derivată, ca fiind « *un fapt de mare importanță pentru fundamentele fizicei matematice și mecanicei raționale* ». Este evident astăzi că această prevedere, în ceea ce privește mecanica rațională, nu s'a realizat.

Intr'adevăr, studiul de față pune în evidență, pornind dela postulate, faptul că mișcările care posedă vitesă și accelerație [1]), atât de particulare printre mișcările continue, constitue totuși singurele cazuri ce se pot ivi în mișcările punctelor materiale din câmpul mecanicei raționale.

Tot odată, analizând fundamentele mecanicei clasice, din punctul de vedere adoptat, noțiunea de accelerație se precizează, iar caracterul discontinuităților ei, precum și distribuția în timp a acestor discontinuități sunt puse în evidență.

Metoda de cercetare, în problemele de mai sus, constă în folosirea proprietăților funcțiilor vectoriale de timp, care intervin în studiul mișcării unui punct dat.

Aceste proprietăți au fost studiate de noi anterior [8], [9], [10], când am prezentat sistematic, în vederea acestor aplicații la mecanică, câteva definiții și proprietăți generale ale funcțiilor vectoriale de timp, unele extinzând direct proprietăți cunoscute ale funcțiilor de o variabilă reală dela mărimile scalare la cele vectoriale, altele reprezentând proprietăți noi, de care ne vom servi în desvoltările ce urmează.

Prima parte a lucrării (cap. I) cuprinde studiul postulatelor mecanicei mișcărilor realizabile, din punctul de vedere adoptat, precedat de unele preliminarii succinte de cinematică generală, menite a fi folosite mai jos.

Intre altele, stabilim că accelerația unei mișcări poate fi definită în câteva moduri diferite, ea putând fi calculată « prospectiv », « retrospectiv » sau « complet », în raport cu variabila timp [2]).

Mișcările studiate în această parte, având o definiție pur cinematică, nu se exclude posibilitatea ca unele din ele să nu poată fi realizate în niciun mod în mișcarea punctelor materiale.

Pentru a preciza, înțelegem prin *mișcări realizabile*, fie acele mișcări reale de puncte materiale, în care nu intervin rezistențe pasive, fie mișcările care

[1]) Convenim a spune că o mișcare dată « posedă » vitesă (respectiv accelerație) la un moment dat, sau într'un interval de timp dat, atunci când vitesa (respectiv accelerația) « există », adică definiția analitică a mărimii are un sens bine definit. Expresiile rămân deci valabile și în cazurile când vectorii respectivi sunt nuli sau identic nuli, în contradicție cu limbajul comun, în care tocmai forma negativă a aceloraşi expresii ar fi atunci de întrebuințat.

[2]) Această nomenclatură, adaptată succesiunii în timp, înlocuește expresiile care indică sensul « la dreapta », « la stânga » sau « bilateral », pe axa variabilei.

se pot obţine ca limită de mişcări reale, când rezistenţele pasive tind către zero.

Intr'o altă lucrare [7] am arătat că într'o mişcare realizabilă, numai definiţia prospectivă a acceleraţiei la un moment dat, adică aceea care nu ţine seama decât de mişcarea ulterioară [1]) momentului considerat, se dovedeşte a fi compatibilă cu « relaţia fundamentală [2]) a mecanicei raţionale » $\overline{F} = m\overline{\gamma}$, care leagă forţa $\overline{F}$ de massa m şi de acceleraţia $\overline{\gamma}$ a unui punct material în mişcare.

Renunţându-se la ipotezele, uneori implicite, ale mecanicei clasice, după care, orice mişcare posedă totdeauna vitesă şi acceleraţie, vom considera relaţia precedentă ca aplicabilă acelor mişcări realizabile şi în acele momente ale lor, când acceleraţia există.

Modificând, în acelaşi sens, şi celelalte postulate clasice, pentru a le exprima independent de aceleaşi ipoteze, le înlocuim cu un sistem *Rn* de postulate, pe care le numim « *postulatele mecanicei raţionale în noua lor formulare* ».

Completăm, în sfârşit, postulatele *Rn* cu noi postulate *P*, prin care se admite în conformitate cu experienţa că:

a) Intr'un interval finit de timp, ne putem apropia oricât de mult de o mişcare realizabilă dată prin « mişcări regulate » [3]), realizabile, în aşa mod încât forţele care le produc pe acestea din urmă să nu depăşească niciodată ca mărime o limită finită convenabilă (postulatul *P*1);

b) Intr'un interval finit de timp, forţa care produce o mişcare realizabilă dată nu poate schimba niciodată de o infinitate de ori « orientarea în spaţiu » [4]) în momente de timp succesive (postulatul *P*2).

Am rezervat sistemului noilor postulate *P* denumirea de « postulate de finitudine » [5]).

In partea a doua a lucrării (cap. II), se desvoltă consecinţele postulatelor admise (*Rn* şi *P*), dovedindu-se mai întâi că din ele decurge existenţa unei vitese continue şi apoi, aceea a acceleraţiilor prospectivă şi retrospectivă, în fiecare moment al unei mişcări realizabile.

In partea a treia a lucrării (cap. III), se examinează caracterul discontinuităţilor, pe care le poate prezenta acceleraţia (sau forţa) şi distribuţia acestor discontinuităţi în timp, pentru o mişcare realizabilă. Se dovedeşte că acceleraţia, funcţie vectorială de timp, există şi este continuă în fiecare moment al mişcării, înafară de un număr finit de momente de timp excepţionale, izolate în fiecare interval finit de timp. In aceste momente excepţionale, acceleraţiile prospectivă (continuă prospectiv) şi retrospectivă (continuă retrospectiv) sunt vectori diferiţi între ei. In concluzie, găsim că:

« *Orice mişcare realizabilă este o mişcare regulată sau o succesiune de mişcări regulate* », concluzie conformă cu experienţa, la fel ca şi postulatele introduse.

---

[1]) Putem observa că această disimetrie iniţială, între sensul prospectiv şi cel retrospectiv, este legată de ireversibilitatea timpului, proprietate care exprimă ideea succesiunii cauzale implicată în mecanica newtoniană.

[2]) Această relaţie este numită uneori « principiul acţiunii » [21].

[3]) Adică posedând o acceleraţie (completă) continuă în fiecare moment al mişcării (cap. I, 1° f.).

[4]) Cu alte cuvinte: sensul proiecţiei sale pe o axă oarecare [10, 2°].

[5]) Intr'adevăr, deşi socotim că postulatele *P* nu-şi pot avea justificarea decât în experienţă (cap. IV), observăm că ele par a se conforma unui « *principiu* » general de excludere a infinitului din acele manifestări ale mecanicei raţionale, care au loc într'un interval finit de timp, principiu sugerat — în mod larg — de experienţă.

In sfârșit, în ultima parte a lucrării (cap. IV), se examinează posibilitățile de confruntare cu experiența a postulatelor de finitudine și se studiază independența lor.

Problema dacă postulatele admise nu s'ar putea înlocui cu altele mai simple nu este examinată aici. Se poate totuși observa că cele mai multe dificultăți sunt introduse de faptul că, înlăturând ipoteza derivabilității, suntem obligați să considerăm la început mărimile din mecanică în condițiile cele mai generale ale analizei și numai apoi să cercetăm împrejurările care impun existența limitelor în cazul mișcărilor realizabile[1]).

Studiul de față, cu tot uzul inevitabil al postulatelor, nu tinde la o nouă axiomatizare formală a mecanicei raționale, așa cum a fost întreprinsă mai demult de G. Hamel [13] și mai recent de M. Brelot [3]. Ceea ce se caută aici este, în esență, o explicație a faptului că în mecanica rațională se folosesc proprietăți (ale funcțiilor reale și vectoriale) în ipoteze restrictive, care nu pot fi justificate numai prin considerații de așa zisă « continuitate » a fenomenelor fizice, cum se face de obicei [13].

Explicația care se oferă, pe căile indicate în lucrarea de față, deși mai anevoioasă, încearcă să aducă teoria la nivelul experienței din câmpul mecanicei raționale, experiența fiind, în definitiv, singura în măsură să decidă asupra validității acelei explicațiuni[2]).

Cât despre posibilitatea de a se lărgi câmpul mecanicei raționale renunțându-se la restricțiile impuse funcțiilor care definesc mișcarea, dar rămânând în cadrul realităților fizice, singura concluzie sugerată de studiul de față este că aceasta n'ar putea avea loc vreodată, decât în afara postulatelor de finitudine, ale căror consecințe le cercetăm.

CAPITOLUL I

DESPRE POSTULATELE MECANICEI

1°. Preliminarii de cinematică generală

1° a. *Viteză și accelerație.* Fie $\bar{r}$ vectorul de poziție al unui punct mobil P din spațiul tridimensional. Notăm cu $\delta = [t', t'']$ intervalul de timp, în care are loc mișcarea lui P, raportată la sistemul de referință $O\,x\,y\,z$, triedru tridreptunghiu de axe fixe, adică independente de t; t fiind variabila timp. Mișcarea μ a lui P este definită cinematic prin ecuația vectorială

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \tag{1}$$

[1]) Appell și Janaud [1] au încercat să adopte ca punct de plecare relația fundamentală a mecanicei sub forma ei integrală. Aceasta presupune, pe lângă altele, că ipoteza existenței vitesei, în orice mișcare realizabilă, este verificată, ceea ce ar trebui, însă, demonstrat în prealabil. Indicații în acest sens a dat și M. Brelot [5], în introducerea lucrării sale de axiomatică.

[2]) In formularea postulatului $P.1$ se aproximează *nedefinit* o mișcare realizabilă dată prin alte mișcări, ceea ce revine la un proces de trecere la limită. Ar putea exista, deci, teama că vor reapare aici dificultățile semnalate în privința trecerii la limită, implicată în definiția vitesei. Deosebirea este însă esențială. In cazul postulatului $P.1$, existența limitei nu mai poate fi pusă în chestiune, deoarece ea rezultă direct din aplicarea teoremei lui Weierstrass, extinsă de noi la funcțiile vectoriale, care arată că o funcție continuă de t este limită de polinoame [8, 6°, IV]. Condiția postulatului $P.1$, pe care bazăm demonstrația de existență a vitesei mișcărilor realizabile (cap. II, 1°, I) constă, așa dar, nu în posibilitatea trecerii la limită, ci în condiția de mărginire a mărimii forțelor (postulat de « finitudine »).

unde $\bar{r}(t)$ este o funcţie vectorială continuă de t în δ. In t', respectiv t'', continuitatea este prospectivă, respectiv retrospectivă [1]).

Presupunând existenţa limitelor, implicate, conform [8, 4°], în definiţiile respective, punem:

$$\bar{v} = \frac{d}{dt}\bar{r}(t),\ \bar{v}_+ = \frac{d}{dt_+}\bar{r}(t),\ \bar{v}_- = \frac{d}{dt_-}\bar{r}(t), \qquad t \in \delta \tag{2}$$

şi definim astfel *vitesa* (completă) $\bar{v}$, *vitesa prospectivă* $\bar{v}_+$ şi *vitesa retrospectivă* $\bar{v}_-$ ale punctului P la momentul t din δ; iar când $\bar{v}$ are sens, avem $\bar{v} = \bar{v}_+ = \bar{v}_-$.

Presupunând existenţa funcţiei vectoriale $\bar{v}(t)$, continuitatea ei şi existenţa limitelor, implicate conform [8, 4°], în definiţiile derivatelor respective, punem:

$$\bar{A} = \frac{d}{dt}\bar{v}(t),\ \bar{a} = \frac{d}{dt_+}\bar{v}(t),\ \bar{\alpha} = \frac{d}{dt_-}\bar{v}(t), \qquad t \in \delta \tag{2a}$$

şi definim, astfel, *acceleraţia* (completă) $\bar{A}$, *acceleraţia prospectivă* $\bar{a}$ şi *acceleraţia retrospectivă* $\bar{\alpha}$ ale punctului P la momentul t din δ; iar când $\bar{A}$ are sens, avem $\bar{A} = \bar{a} = \bar{\alpha}$.

Observăm că vitesa şi acceleraţia (în sens complet, prospectiv sau retrospectiv) sunt respectiv, pentru $t = t_0$, limita (unică, prospectivă sau retrospectivă) a vectorilor *vitesă mijlocie* $\bar{v}[t_0, t]$ şi *acceleraţie mijlocie* $\bar{A}[t_0, t]$, în intervalul $[t_0, t]$, vectori definiţi astfel:

$$\bar{v}[t_0, t] = \frac{\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)}{t - t_0}; \qquad \bar{A}[t_0, t] = \frac{\bar{v}(t) - \bar{v}(t_0)}{t - t_0}. \tag{3}$$

In cinematica clasică, vitesa şi acceleraţia în t_0, se definesc numai ca limite prospective ($t > t_0$) ale vectorilor vitesă mijlocie şi acceleraţie mijlocie, dar se introduc în calcul ca limite vectoriale unice, atribuindu-li-se, deci, sensul complet [2]).

Definiţiile de mai sus implică pentru fiecare din noţiunile (2) şi (2a) caracterele VA, AV de existenţă şi caracterul VAV al mărimilor vectoriale astfel definite, care rămân invariante la o rotaţie a triedrului $Oxyz$ [8, 4°].

1° b. *Mişcări congruente.* Fie date intervalele de timp *congruente*

$$\delta = [t_0, t_1] \text{ şi } \delta^* = [t^* + t_0, t^* + t_1]. \tag{4}$$

---

[1]) Continuitatea fiind o condiţie esenţială pentru existenţa unei mişcări fizice, ea trebue inclusă în însăşi definiţia cinematică a mişcării.

[2]) Inconvenientele acestui fapt au fost examinate anterior [7, 3°] în ceea ce priveşte noţiunea de acceleraţie din mecanica raţională. Cât despre vitesă, chestiunea este diferită: In condiţiile mecanicei raţionale vom vedea că vitesa $\bar{v}(t)$ există totdeauna, deci:

$$\bar{v}(t) = \bar{v}_+(t) = \bar{v}_-(t). \tag{1 a}$$

Acest fapt permite ca definiţiile (2a) ale acceleraţiei să implice existenţa vitesei, în sensul ei complet, fără a mai fi necesar să studiem cu înţelesul de « acceleraţii » şi derivatele vectoriale (unică, prospectivă sau retrospectivă), atunci când ele există, ale viteselor $\bar{v}_+(t)$ şi $\bar{v}_-(t)$, în cazurile *analitic* posibile, când identităţile (1 a) nu ar fi realizate pentru fiecare t din δ.

Numim momentele τ și $t^* + \tau$ (respectiv τ și $t^* + t_0 + t_1 - \tau$) momente *direct* (respectiv *invers*) *congruente* în δ, δ^*, când $\tau \in \delta$.

Mișcările μ și μ^* de ecuații $r = \bar{r}(t), \bar{r} = \bar{r}^*(t)$ ale unor puncte mobile P, P^* le numim *direct* (respectiv *invers*) *congruente*, când pentru fiecare $\tau \in \delta$

$$\bar{r}^*(t^* + \tau) - \bar{r}(\tau) = \bar{r}_0, \text{ respectiv } \bar{r}^*(t^* + t_0 + t_1 - \tau) - \bar{r}(\tau) = \bar{r}_1, \quad (5)$$

unde vectorii $\bar{r}_0, \bar{r}_1$ sunt constanți în raport cu τ.

Pozițiile punctelor P și P^* coincid în momente congruente, afară de translația $\bar{r}_0$, respectiv $\bar{r}_1$.

Mișcările direct congruente (notate cu indicele d) pe de o parte și mișcările invers congruente (notate cu indicele i) pe de altă parte, ale unei aceleiași mișcări μ date, formează câte o familie cu proprietățile:

$$(\mu_d)_d = (\mu_i)_i = \mu_d; \quad (\mu_d)_i = (\mu_i)_d = \mu_i. \quad (6)$$

Presupunând continuitatea și existența limitelor, de câte ori este necesar, în definițiile vitesei $\bar{v}(t)$ și ale acceleraților $\bar{a}(t)$, $\bar{\alpha}(t)$, $\bar{A}(t)$ în mișcările direct (respectiv invers) congruente μ, μ^* de mai jos, avem în fiecare moment τ din δ, precum este ușor de verificat, relațiile:

$$\begin{aligned} &\bar{v}^*(t^* + \tau) = \bar{v}(\tau) \quad ; \quad \bar{a}^*(t^* + \tau) = \bar{a}(\tau), \\ &\bar{\alpha}^*(t^* + \tau) = \bar{\alpha}(\tau) \quad , \quad \bar{A}^*(t^* + \tau) = \bar{A}(\tau), \end{aligned} \quad (7)$$

în cazul mișcărilor direct congruente și relațiile

$$\begin{aligned} &\bar{v}^*(t^* + t_0 + t_1 - \tau) = -\bar{v}(\tau) \quad ; \quad \bar{a}^*(t^* + t_0 + t_1 - \tau) = \bar{\alpha}(\tau), \\ &\bar{\alpha}^*(t^* + t_0 + t_1 - \tau) = \bar{a}(\tau) \quad , \quad \bar{A}(t^* + t_0 + t_1 - \tau) = \bar{A}(\tau), \end{aligned} \quad (7a)$$

în cazul mișcărilor invers congruente. Totodată, notăm că, din existența mărimii vectoriale dintr'un membru, rezultă existența mărimii din celălalt membru al aceleiași egalități (7) sau (7a).

Relațiile (7), respectiv (7a), arată că în mișcări direct, respectiv invers congrunente și în momente congruente, oricare dintre vectorii acceleraței $\bar{a}, \bar{\alpha}$ se păstrează, respectiv se permută între ei, când trecem dela μ la μ^*, și invers. In aceeași trecere, vitesa $\bar{v}$, când există, păstrează mărimea și direcția în momente congruente, păstrând sau schimbând sensul, după cum μ și μ^* sunt direct, respectiv invers congruente.

Aceste proprietăți au caracterele *VA* și *AV*.

1° c. *Rezultanta a două mișcări oarecare* μ, μ^* ale aceluiași punct mobil P, ocupând în fiecare din ele aceeași poziție $\bar{r}_0$ la momentul t_0 și de ecuații

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \quad , \quad \bar{r} = \bar{r}^*(t), \quad (8)$$

este prin definiție o mișcare μ_* de ecuație $\bar{r} = \bar{r}_*(t)$, astfel ca

$$\bar{r}_*(t) = \bar{r}(t) + \bar{r}^*(t) - \bar{r}_0 \quad ; \quad \bar{r}_0 = \bar{r}(t_0) = \bar{r}^*(t_0). \quad (8a)$$

1° d. *Mișcare polinomială* este o mișcare μ a unui punct mobil P, definită în intervalul $\delta = [t', t'']$ printr'o ecuație $\bar{r} = \bar{r}(t)$, unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție a lui P, iar $\bar{r}(t)$ este un polinom de t în δ.

Polinomul $\bar{r}(t)$ este o funcție vectorială continuă de t, nedefinit derivabilă și posedând derivate vectoriale de ordinul p nule, cu începere dela un p finit.

Se observă imediat că în δ vectorul acceleraţie (completă) există [1]), este mărginit şi nu poate schimba orientarea în spaţiu de o infinitate de ori în $\delta[10, 2°]$.

Intr'adevăr, $\bar{A}(t)$ (respectiv $\bar{a}(t)$, $\bar{\alpha}(t)$) este o funcţie vectorială continuă de t în δ şi deci mărginită, iar proiecţia sa pe o axă oarecare din spaţiu (considerată ca axă de coordonate Ox, de ex.) este un polinom real de t, a cărui valoare nu poate schimba semnul de o infinitate de ori în δ.

1° e. *Aproximarea unei mişcări.* Vom spune că o mişcare dată μ, de ecuaţie $\bar{r} = \bar{r}(t)$, este *aproximată nedefinit în* δ de un şir de mişcări μ_n, de ecuaţii $\bar{r} = \bar{r}_n(t)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, când pentru fiecare $\varepsilon > 0$ dat, există un N, astfel ca, pentru fiecare $n > N$,

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}_n(t)| < \varepsilon, \qquad n > N; \qquad t \in \delta \text{ [2])}. \tag{9}$$

Avem:

I. *Orice mişcare* μ, *definită într'un interval de timp* $\delta = [t', t'']$ *este aproximată nedefinit în* δ *de un şir de mişcări polinomiale* μ_n. Intr'adevăr, dată fiind ecuaţia $\bar{r} = \bar{r}(t)$ a mişcării μ, vectorul de poziţie $\bar{r}(t)$, fiind o funcţie vectorială continuă de t, este limita uniformă în δ, pentru $n = \infty$, a unui şir de polinoame vectoriale $\bar{r}_n(t)$, precum am arătat altădată [8, IV].

1° f. *Mişcări regulate.* Numim *regulată*, în intervalul de timp $\delta = [t', t'']$, o mişcare μ definită cinematic, care posedă în fiecare moment al ei o acceleraţie completă, continuă.

2°. Postulatele de existenţă a vitesei şi acceleraţiei

Mişcările realizabile din câmpul mecanicei raţionale au, în comun, un sistem de postulate, care a fost formulat în diverse moduri, socotite de obicei ca echivalente. Independent însă de formularea lor, acele postulate admit uneori explicit că în orice mişcare realizabilă a unui punct material M [3]), se poate defini în fiecare moment t, atât vitesa, cât şi acceleraţia, ambele luate în sensul lor complet.

Se pot explicita, precum urmează, postulatele corespunzătoare ale mecanicei raţionale [4]):

Când un punct material M *descrie o mişcare realizabilă, există în fiecare moment* [5]) *al mişcării lui* M;

---

[1]) Aici este de făcut observaţia că pentru o mişcare dată numai în intervalul de timp $\delta = [t', t'']$, nu se poate defini în momentele iniţial t' şi final t'' din δ, continuitatea, vitesa sau acceleraţia, decât prospectiv în t' şi retrospectiv în t'', ceea ce vom subînţelege la nevoie.

[2]) Cu alte cuvinte, $\bar{r}$ (t) este limita uniformă a funcţiilor vectoriale $\bar{r}_n(t)$ pentru $n = \infty$ [8, 2°]; am putea întrebuinţa deci şi expresiile. « *Mişcarea* μ *este limita uniformă a mişcărilor* μ_n » sau « *Mişcările* μ_n *tind uniform către mişcarea* μ ».

[3]) Definiţia punctului material, deşi diferită la diverşi autori, ca P. Appell [2] sau M. Planck [19], implică unele dificultăţi, pe care le-am semnalat altădată [8].

[4]) G. Hamel [14], în grupa I-a de axiome, presupune că « *în principiu, mişcarea, ca toate legile fizicei, este continuă şi continuu derivabilă de ori câteori* »; de asemenea, L. Zoretti [24] admite că « *funcţiile care se introduc în consideraţiile de mecanică sunt continue şi nedefinit derivabile* ». Bineînţeles, se precizează totdeauna şi necesitatea analitică *numai* a primelor două derivate, astfel G. Hamel [15] şi L. Zoretti [24], dar principiul derivabilităţii *nedefinite* are un alt sens.

[5]) Se exceptează numai momentele de discontinuitate a acceleraţiei, când se ivesc dificultăţile pe care le-am semnalat [7, 3° şi 4°], relativ la definiţia clasică a acceleraţiei. Astfel de momente sunt « izolate », după cum observă şi L. Zoretti [24].

R. V. *Viteza (în sens complet)* $\overline{v}(t)$ *a punctului* M, *funcție vectorială continuă de* t *și*

R. A. *Accelerația (în sens complet)* $\overline{A}(t)$ *a punctului* M, *funcție vectorială de* t.

Admiterea acestor postulate, în lipsa unei confirmări experimentale a lor, pare greu de justificat [1]).

Definiția cinematică a unei mișcări implică într'adevăr numai condiția de continuitate a vectorului de poziție $\overline{r}(t)$, în timp ce derivabilitatea de ordinele 1 și 2 a lui $\overline{r}(t)$ este legată de condițiile respective, a căror introducere ar trebui intemeiată pe considerații de natură fizică. Ținând seama de acestea, am fost conduși să înlocuim postulatele *RV*, *RA* cu alte postulate *P*, al căror conținut pare mai apropiat de confirmările directe ale experienței.

3°. Postulatele mecanicei raționale în noua lor formulare

Pentru a stabili pe baze logice, sistemul de postulate pe care îl vom folosi, înlăturând ipotezele cuprinse în postulatele *RV*, *RA* am fost nevoiți să dăm o nouă formulare sistemului *R* [2]) al postulatelor clasice ale mecanicei raționale. Această formulare reține din postulatele clasice (și la nevoie din unele implicații [3]) directe ale lor) numai ceea ce nu presupune *a priori* existența vitesei și acceleratiei unei mișcări realizabile oarecare, într'un interval de timp finit dat. Cu acest prilej, am ținut seama și de nevoia de a se aduce unele precizări suplimentare acelor postulate. Notele explicative, care însoțesc textul, indică pe scurt motivele care ne-au condus. Iată noua formulare:

R. 1. *Orice mișcare realizabilă a unui punct material liber se produce în fiecare moment* [4]) *sub efectul unei forțe* $\overline{F}$, *mărime vectorială bine definită, datorită prezenței celorlalte puncte materiale și care satisface postulatele mecanicei raționale.*

Forța $\overline{F}$ *se poate exprima ca funcție vectorială* $\overline{F}(t)$ *de variabila* t (timpul), *când se consideră o mișcare* μ *determinată, având loc într'un interval de timp dat* δ [5]).

R. 2. *Dacă la momentul inițial* t_0 *al unui interval de timp dat* $\delta = [t_0, t_1]$, *un punct material* M *posedă o vitesă retrospectivă, iar asupra lui nu se exercită*

---

[1]) Aceste postulate au putut fi considerate odinioară ca rezultând fără rezerve din experiența fizică, în timp ce astăzi este vădit că procesul infinitesimal al trecerilor la limită, care intervin în definițiile vitesei și acceleratiei este prea departe de constatările finitiste ale fizicei moderne pentru a justifica o asemenea concluzie.

[2]) Vezi G. C. Suslov [23], P. Appell [2], S. Sanielevici [21], J. Chazy [6], pentru diverse formulări ale sistemului *R* al postulatelor clasice.

[3]) Formularea postulatelor implică, în mod clasic, reperajul «absolut» al mișcărilor, în timp și spațiu (P. Painlevé [17]).

[4]) Ipoteza că forța $\overline{F}$, care produce mișcarea, trebue să fie bine definită în fiecare moment al ei, este fundamentală pentru ceea ce urmează. Dacă stricteța acestei condiții ar putea fi înlăturată, după cum se presupune în mod obișnuit, ar rezulta modificări ale teoriei, pe care ne propunem să le examinăm altădată.

[5]) In mecanica clasică, forțele $\overline{F}$ sunt date, în baza unei legi fizice, în funcție de pozițiile punctelor sistemului, de vitesele lor și de timpul *t*. Dacă ne referim, însă, la o anumită mișcare a sistemului, pozițiile și vitesele respective sunt funcții determinate de *t*, deci $\overline{F}$ se poate exprima, *în acest caz*, ca o funcție vectorială *numai* de *t*, $F = \overline{F}(t)$.

în momentele t *din* δ *nicio forță, punctul* M *descrie o mișcare rectilinie și uniformă în* δ, *de vitesă egală cu vitesa retrospectivă din* t_0 [1]).

R. 3. *Dacă două puncte materiale* M, M′ *sunt singure în prezență, fiecare din ele exercită asupra celuilalt câte o forță; aceste două forțe* $\overline{F}$, $\overline{F}'$ *sunt îndreptate după dreapta* MM′ *și reprezentate prin vectori direct opuși* ($\overline{F} = -\overline{F}'$).

R. 4. *Fie* n *puncte materiale în prezență* $M_1, M_2, \ldots M_n$; *dacă în prezența numai a lui* M_i *punctul* M *ar fi supus forței* F_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), *atunci în prezența simultană a celor* n *puncte* M_i, *punctul* M *va fi supus forței* $\overline{F}$ «*rezultanta*» *lor, egală prin definiție cu suma lor vectorială* $\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n$ [2]).

R. 5. *Dacă într'o mișcare realizabilă a unui punct material* M, *care posedă în fiecare moment* t *din* δ *o vitesă completă continuă, există la un moment dat* t_1 [3]) *o accelerație prospectivă* $\overline{a}$ [4]), *iar rezultanta forțelor exercitate atunci asupra lui* M *este* $\overline{F}$, *avem relația*

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a}, \qquad \text{(R. 5.)}$$

unde m *(masa) este un coeficient independent de mișcare* [5]) *și de momentul considerat;* m *poate lua valori diferite numai pentru puncte* M *diferite.*

R. 6. *La momentul inițial* t_0 *al unui interval de timp* $\delta = [t_0, t_1]$ *un punct material* M *poate fi așezat într'o poziție în care posedă o vitesă retrospectivă* [6]),

---

[1]) Se poate admite (ca în cazul principiului inerției) că aceasta se întâmplă când punctul *M* rămâne (respectiv: este) «izolat», adică «infinit depărtat de restul punctelor materiale», ceea ce are un sens limită [17], axioma 3. Numai în acest înțeles se pot formula și aplica celelalte postulate, care presupun «prezența» numai a punctelor a căror influență nu se poate neglija, ele nefiind infinit depărtate.

[2]) Acest postulat nu poate fi considerat ca o consecință numai a caracterului vectorial al forței.

[3]) Nu se face nicio ipoteză asupra vreunei asemenea relații posibile între forță și mișcare la alte momente t din δ ($t \neq t_1$), relație care poate deci să existe sau nu.

[4]) Am pus în evidență, într'o Comunicare anterioară [7], motivele pentru care accelerația trebue considerată numai prospectiv ($\overline{\gamma} = \overline{a}$) în relația fundamentală a mecanicei $\overline{F} = m\overline{\gamma}$ căci:

1°. In baza postulatului *R*2 (sau a principiului inerției) punctul *M* ar avea o mișcare rectilinie și uniformă pentru $t > t_1$, dacă nu ar interveni forța $\overline{F}(t)$, când $t > t_1$. Forța $\overline{F}(t)$ determină deci mișcarea ulterioară momentului t_1 considerat, prin urmare vitesa $\overline{v}(t)$ pentru $t > t_1$ și accelerația prospectivă $\overline{a}(t_1)$, când aceasta din urmă există.

2°. Dacă, prin absurd, relația fundamentală s'ar putea scrie $\overline{F} = m\overline{A}$, pentru orice mișcare realizabilă și pentru fiecare moment t, discontinuitățile lui $\overline{F}(t)$ ar fi de aceeași natură cu ale accelerației complete $\overline{A}(t)$, dar $\overline{A}$ ca funcție vectorială derivată nu admite discontinuități de prima speță [8, III], ceea ce aplicat lui $\overline{F}(t)$ ar contrazice direct experiența, precum reiese, de pildă, din unele cazuri arătate mai jos (cap. IV, 3°).

[5]) Constanța massei m este una din ipotezele care delimitează — prin definiție — câmpul mecanicei raționale [7, 2°]. Pentru o prezentare clasică, care admite și massa m ca variabilă, [22], unde, în loc de relația fundamentală a mecanicei, se folosește egalitatea dintre forță și derivata impulsului, în formularea newtoniană.

[6]) Postulatul clasic al condițiilor inițiale presupune existența vitesei prospective în momentul inițial t_0 al lui δ, ceea ce nu putem admite, deoarece reintroduce o subcondiție (slabă) a postulatului *RV*, înlăturat. Acea presupunere nu corespunde împrejurărilor fizice, deoarece condițiile arbitrare din momentul inițial al mișcării nu se pot efectiv realiza decât dispunând de mișcarea lui *M* într'un interval de timp, oricât de mic, anterior lui t_0. Aceleași motive au fost avute în vedere și la formularea postulatului *R*2 de mai sus.

ambele arbitrar date. Se obține, astfel o mișcare unic [1]) *determinată în* δ *de rezultanta forțelor, care se exercită asupra lui* M *de către punctele materiale în prezență* [2]).

R. 7. *Când fiecare din mișcările* μ *și* μ^* *ale unui punct material* M, *care se află la un moment dat* t_0 *în aceeași poziție, sunt realizabile în intervalul de timp* δ, *rezultanta lor cinematică* μ_* *este de asemenea o mișcare realizabilă în* δ [3]).

Vom nota cu *Rn* sistemul de postulate *R*1 — *R*7 ale mecanicei raționale, în noua lor formulare.

4°. Postulatele de finitudine

Pentru a împlini lipsa produsă de suprimarea postulatelor *RV* și *RA*, a căror introducere în mecanică nu se poate socoti ca fiind suficient legată de experiența fizică, vom introduce mai jos postulatele *P*, susceptibile de a fi confruntate cu experiența [4]):

P. *Când o mișcare dată* μ *este realizabilă într'un interval finit de timp* δ, *sunt satisfăcute următoarele condițiuni:*

P. 1. *Printre șirurile de mișcări regulate și realizabile, care aproximează nedefinit mișcarea dată* [5]), *există un un șir de mișcări* μ_n, *astfel ca forțele* $\overline{F}_n$, *care le produc, să fie mărginite în ansamblul lor în* δ [6]).

P. 2. *Forța* $\overline{F}$, *care produce mișcarea* μ, *nu poate schimba orientarea sa în spațiu de o infinitate de ori, în niciun șir* σ *de momente* t *din intervalul finit de timp* δ *și vom distinge următoarele cazuri:*

P. 2 a. *Șirul* σ *este descrescător,*

P. 2 b. *Șirul* σ *este crescător.*

Postulatele *P*. 1, *P*. 2 a, *P*. 2 b nu pot fi admise *a priori*, fără o confruntare cu experiența fizică. Această confruntare necesită, la rândul ei, cercetarea teoretică prealabilă a consecințelor postulatelor *Rn* și *P*, care face obiectul capitolelor următoare.

Pentru a demonstra că o mișcare μ definită cinematic este realizabilă, folosim uneori direct definiția, arătând însăși modalitatea de a produce mișcarea reală a unui punct material *M*, abstracție făcând de rezistențe pasive. Alteori, în special când mișcarea definită cinematic posedă accelerația prospectivă $\overline{a}(t)$ în fiecare moment *t* dintr'un interval finit de timp δ, ne mulțumim să verificăm dacă postulatele de finitudine *P* sunt satisfăcute, ținând

---

[1]) Ne mulțumim să semnalăm aici dificultățile, încă nerezolvate, legate de chestiunea unicității determinării, în unele cazuri destul de generale [6], [5]. In cele ce urmează, această condiție de unicitate nu este, de altfel, folosită.

[2]) Relațiile acestui postulat cu principiul de cauzalitate și formulările sale au fost studiate de P. Painlevé [17].

[3]) A se compara cu postulatul enunțat de Lagrange în opera sa *Mécanique analytique*, sub numele de « principiu al mișcării compuse » [24].

[4]) A se vedea, pentru noțiunile folosite în această enunțare: [8, 5°], [10, 2°], precum și propoziția cinematică (1° d, I) stabilită mai sus.

[5]) S'a văzut mai sus (1° d, I) că asemenea șiruri există totdeauna, căci fiecare mișcare continuă este aproximată nedefinit de mișcări polinomiale, iar mișcările polinomiale sunt realizabile, după cum arătăm mai jos (6°, II).

[6]) Postulatul implică: *Dacă o mișcare realizabilă este regulată, forța care o produce este mărginită.* Putem lua într'adevăr, în acest caz, $\mu_n = \mu$, oricare ar fi *n* și putem aplica *P*1.

seama de postulatele Rn[1]). Aceasta implică evident un postulat, pe care nu-l mai formulăm, dat fiind caracterul său[2]).

5°. Observaţie

Este clar că vor exista, în general, mai multe şiruri S_i de mişcări realizabile μ_n, aproximând o mişcare μ dată ($i = 0,1, \ldots$). De exemplu, printre şirurile S_i se află şirurile de mişcări regulate obţinute (în mai multe moduri posibile) ca aplicare a extensiei unei teoreme a lui Weierstrass la funcţiile vectoriale de t [8, IV].

Când mişcarea μ este realizabilă, postulatul $P.$ 1 afirmă că printre şirurile S_i există un şir S_0, care satisface condiţia de mărginire a forţelor $\bar{F}_n$, care produc aceste mişcări μ_n în intervalul de timp δ. Postulatul nu afirmă însă că aceeaşi proprietate ar aparţine oricăruia dintre şirurile S_i şi, de fapt, se poate arăta pe un exemplu simplu că odată cu şirul S_0, care satisface condiţia de mărginire impusă de $P.$ 1, mai pot exista şi alte şiruri S_i, pentru care condiţia de mărginire nu este îndeplinită.

Fie, astfel, mişcarea realizabilă μ, rectilinie şi uniformă, de ecuaţie $x = t$, definită în intervalul de timp $\delta = [0,1-\lambda]$; $0 < \lambda < 1$. Şirul S_0 de mişcări rectilinii polinomiale μ_n, definite prin ecuaţiile $x = t + \frac{t^2}{n}$ $(n=1,2,\ldots)$ în δ, satisface evident condiţiei de mărginire. Dar putem a arăta că există un alt şir S_1 de mişcări $\bar{\mu}_n$, polinomiale, deci realizabile, precum vom arăta numaidecât (6°, II) şi care aproximând nedefinit pe μ nu satisfac acea condiţie.

Fie ecuaţia mişcării rectilinii μ_n, $(n = 1,2,\ldots)$, definită pe axa Ox, de vectorul unitar $\bar{i}_x$, dată în δ de

$$x = f_n(t) = t + t\left(t-\frac{1}{n}\right)\left(t-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(t-\frac{n}{n}\right);\ 0 \leqslant t \leqslant 1-\lambda. \tag{10}$$

Este clar că mişcarea μ este limită uniformă de μ_n, deoarece putem defini un N, suficient de mare ca $(1-\lambda)^{N+1} < \varepsilon\,(\varepsilon > 0$ dat), iar din (10) avem $|f_n(t) - t| < t^{n+1}$ în δ şi deci $|f_n(t) - t| < \varepsilon$, pentru $n > N, t \in \delta$.

Forţele respective

$$\bar{F}_n = m\bar{A}_n = m\frac{d^2x}{dt^2}\bar{i}_x = m\left[\frac{d^2}{dt^2}f_n(t)\right]\bar{i}_x \tag{11}$$

sunt nemărginite în ansamblul lor, precum se vede imediat, studiind diagrama mişcărilor $\bar{\mu}_n$, în planul xOt. Într'adevăr, fiecare curbă Γ_n din

---

[1]) Se obţin, astfel, şi alte proprietăţi ale mişcărilor realizabile înafară de existenţa unei vitese continue şi a acceleraţiei prospective în orice moment t din δ (care rezultă — în cap. II — numai din aplicarea postulatelor Rn şi P); în special, se obţin propoziţiile: III din cap. I, şi V—VIII inclusiv din cap. III.

[2]) Postularea de condiţii suficiente ca o mişcare să fie realizabilă, revine de fapt la o definiţie legată de aceea a câmpului mecanicei raţionale. Acest câmp nu poate fi însă delimitat decât în raport cu celelalte fenomene fizice, ceea ce face definiţia sa dependentă de cunoştinţele epocei, aşa cum se poate ilustra prin limitările impuse în secolul nostru, câmpului mecanicei raţionale, de către mecanica relativităţii şi mecanica cuantică.

acest plan, de ecuație $x=f_n(t)$, taie dreapta $x = t$ în $(n + 1)$ puncte P_k de abscise $t_k = \frac{k}{n}$, unde $k = 0,1, \ldots n$. Curbele Γ_n fiind continue, iar toate distanțele $P_k P_{k+1}$ tinzând spre zero, când $n \to \infty$, razele de curbură $R_n(\tau)$ ale curbelor Γ_n într'un același punct de abscisă irațională τ din [0,1] tind spre zero, odată cu $1/n$. Ținând seama, în formula razei de curbură a curbei $x = f_n(t)$,

$$R_n(t) = \frac{\left[1 + \left(\frac{d}{dt} f_n(t)\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2}{dt^2} f_n(t)} \tag{12}$$

de (11), rezultă că

$$|\overline{F}_n(\tau)| > \frac{m}{|R_n(\tau)|}. \tag{13}$$

Forțele $\overline{F}_n(\tau)$ tind deci în valoare absolută spre infinit, când $n \to \infty$ și deci șirul S_1 nu satisface condiția de mărginire a postulatului P 1.

6°. Clase de mișcări realizabile, definite cinematic

II. *Orice mișcare polinomială este realizabilă.* Fie μ o mișcare polinomială (cap. I, 1°d), definită prin ecuația

$$\overline{r} = \overline{r}(t) = \overline{c}_0 + \overline{c}_1 t + \ldots + \overline{c}_n t^n, \tag{14}$$

unde $t \in \delta$, iar $\overline{c}_0, \overline{c}_1, \ldots \overline{c}_n$, sunt vectori constanți dați.

Demonstrația ține seama de faptul că proprietatea enunțată (II) este aditivă în baza postulatului $R7$ și procedează prin inducție completă relativ la mișcările rectilinii $\overline{r} = \overline{c}_i t^i$. Este deci suficient să arătăm că mișcările rectilinii de ecuație $x = t^i$ sunt realizabile în intervalul de timp δ, pentru i oarecare. Pentru $t = 1$, avem mișcarea rectilinie și uniformă $x = t$, care este realizabilă în condițiile postulatului $R2$.

Să presupunem că $x = t^i$ este realizabilă în δ. Vom dovedi că putem realiza efectiv și mișcarea $x = t^{i+1}$, în intervalul de timp δ.

Să facem o observație prealabilă:

Dat fiind un arc material PQ al unei curbe regulate Γ, situată într'un plan orizontal H, pentru a se putea neglija efectul gravitației, vom presupune că punctul material M, de massă m, este obligat a parcurge Γ. Presupunem că mișcarea rectilinie $x=f(t)$ este realizabilă. Putem face ca punctul M să descrie pe curba Γ mișcarea $s = f(t)$, unde s este arcul măsurat pe Γ dela o origine dată. In acest scop, este suficient să se lege punctul M prin câte un fir inextensibil, mai lung decât arcul PQ din Γ, de două puncte materiale M_1, M_2, obligate a parcurge tangentele materializate $P'P$ și QQ' de la extremitățile arcului PQ. Dăm punctelor M_1 și M_2 câte o mișcare rectilinie, de ecuație $x_1 = f(t)$, $x_2 = f(t)$, unde x_1, x_2 sunt deplasările măsurate în același sens, ale punctelor M_1 și M_2 pe tangentele respective. Este clar că legăturile lui M cu Γ și cu M_1, M_2 îl fac să descrie mișcarea $s = f(t)$ pe Γ, care este deci realizabilă odată cu $x = f(t)$.

In particular, fie în planul orizontal H, unde am ales un sistem de axe fixe Oxy și am notat cu q un parametru, o curbă Γ, de ecuații parametrice

$$x = q^{i+1},\quad y = \int_0^q \sqrt{1 - \left(1 + \frac{1}{i}\right)^2 q^2} \cdot i \cdot q^{i-1}\, dq;\quad \left[0 \leqslant q \leqslant 1 - \frac{1}{i+1}\right]. \tag{15}$$

Calculând arcul $s(q)$, astfel ca să avem $s(0) = 0$, rezultă

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = iq^{i-1}\, dq;\quad s = \int_0^q iq^{i-1}\, dq = q^i. \tag{16}$$

Alegând convenabil originea și unitatea de măsură a timpului, intervalul δ se poate scrie $\left[0{,}1 - \frac{1}{i+1}\right]$ și este suficient să dăm lui M pe Γ mișcarea $\bar{\mu}$ de ecuație

$$s = t^i, \tag{17}$$

mișcare, care, în baza observației precedente, este realizabilă odată cu mișcarea rectilinie $x = t^i$, care este realizabilă prin ipoteză. Observăm că obținem mișcarea $\bar{\mu}$, luând $q = t$ în (15), în care caz, proiecția pe Ox a mișcării $\bar{\mu}$ este mișcarea rectilinie μ de ecuație $x = t^{i+1} = q^{i+1}$.

Să considerăm în planul H un arc material de curbă $P'Q'$, simetric al curbei PQ față de axa Ox, aleasă astfel ca să nu întâlnească pe PQ. Pe baza aceluiași raționament, putem face ca un punct material M', de massă egală cu M, să parcurgă $P'Q'$ în intervalul de timp δ, M și M' fiind simetrice față de Ox la orice moment t din δ. Legând bilateral o dreaptă materială de MM', astfel ca aceste puncte să alunece fără frecare pe MM' și legând un punct material M_1 de mijlocul lui MM', punctul M_1 descrie mișcarea rectilinie $x = t^{i+1}$, care este astfel realizabilă. *Q.E.D.*

III. *Când o mișcare* μ, *definită cinematic într'un interval de timp* δ, *posedă o accelerație prospectivă* $\bar{a}$ (t), *continuă în intervalul* $\delta = [t_0, t_1]$ [1]) *și care nu schimbă orientarea de o infinitate de ori în niciun șir de momente din* δ, *mișcarea* μ *este realizabilă în* δ.

Fie

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \qquad t \in \delta, \tag{18}$$

ecuația mișcării date μ, de vitesă $\bar{v}(t)$, care există și este continuă în δ, deoarece accelerația prospectivă

$$\bar{a}(t) = \frac{d}{dt_+}\, \bar{v}(t) \tag{19}$$

există pentru fiecare t din δ, prin ipoteză.

Să considerăm funcția vectorială de t

$$\bar{w}(t) = \bar{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \bar{a}(t)\, dt, \qquad (t \in \delta). \tag{20}$$

[1]) Acest interval este închis.

Folosind proprietăți clasice de analiză și caracterele VA, AV, VAV ale continuității, derivabilității și integrabilității, demonstrate anterior [8,3°], [8,4°], [9,3°] rezultă:

$$\frac{d}{dt}\overline{w}(t) = \overline{a}(t), \qquad (t \in \delta), \tag{21}$$

funcția de sub semnul integral în (20) fiind continuă, iar funcțiile vectoriale $\overline{w}(t)$, $\overline{v}(t)$, având în δ aceeași derivată vectorială prospectivă $\overline{a}(t)$, diferă printr'o constantă.

Dar, din (20),

$$\overline{w}(t_0) = \overline{v}(t_0), \tag{22}$$

deci $\overline{w}(t)$ și $\overline{v}(t)$ sunt aceleași, adică

$$\overline{w}(t) = \overline{v}(t), \qquad t \in \delta. \tag{23}$$

Rezultă că accelerația completă $\overline{A}(t)$ în mișcarea μ există și este continuă

$$\overline{A}(t) = \frac{d}{dt}\overline{v}(t) = \overline{a}(t), \qquad t \in \delta. \tag{24}$$

Dar din

$$\overline{v}(t) = \frac{d}{dt} r(t), \tag{25}$$

rezultă prin integrare

$$\overline{r}(t) = \overline{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \overline{v}(t)\, dt, \qquad t \in \delta, \tag{26}$$

sau, cu (20), (23), (24), avem

$$\overline{r}(t) = \overline{r}(t_0) + (t - t_0)\,\overline{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \overline{A}(t)\, dt; \qquad t \in \delta. \tag{27}$$

Să arătăm că mișcarea μ îndeplinește condițiile postulatului P.

Aceasta este clar, prin ipoteză, în ceea ce privește postulatul P. 2. In ceea ce privește postulatul P. 1., observăm că $\overline{A}(t)$ fiind o funcție vectorială continuă de t, există [8, IV] un șir de polinoame vectoriale $\overline{A_n}(t)$ tinzând uniform către $\overline{A}(t)$ în δ, adică fiind dat $\varepsilon > 0$, arbitrar de mic ($\varepsilon < 1$), există N așa ca

$$|\overline{A_n}(t) - \overline{A}(t)| < \varepsilon, \quad \text{când} \quad n > N. \tag{28}$$

Dar $\overline{A}(t)$ este continuă în intervalul închis de timp δ, deci mărginită $|\overline{F}(t)| \leqslant B$, $B > 0$, finit și rezultă

$$|\overline{A_n}(t)| < B + 1. \tag{29}$$

Să definim în δ un șir de mișcări μ_n, regulate și deci realizabile, cu accelerație completă, continuă

$$\bar{r} = \bar{r}_n(t); \quad \bar{r}_n(t) = \bar{r}_0 + (t - t_0)\bar{v}_0 + \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \bar{A}_n(t)\, dt; \quad t \in \delta. \tag{30}$$

Observăm din (18), (27), (28) că avem

$$|\bar{r}_n(t) - \bar{r}(t)| < \frac{\varepsilon (t_1 - t_0)^2}{2}, \qquad t \in \delta. \tag{31}$$

Mișcările μ_n tind deci uniform către μ, iar accelerațiile prospective ale mișcărilor μ_n satisfac:

$$a_n(t) = \bar{A}_n(t) \tag{32}$$

și sunt deci continue și mărginite în ansamblul lor în δ, conform (29).

Postulatul $P.$ 1 este îndeplinit și având $P.1, P.$ 2 satisfăcute, mișcarea μ este realizabilă. *Q. E. D.*

Corolar. *Când o mișcare* μ *este realizabilă și posedă o accelerație prospectivă* $\bar{a}(t)$ *continuă în fiecare moment* t *din* δ, *ea posedă și o accelerație completă* $\bar{A}(t)$ *în aceleași momente.*

Într'adevăr, mișcarea μ fiind realizabilă, postulatul $P.$ 2 este satisfăcut, adică ținând seama de $R5$, rezultă că $\bar{a}(t)$ îndeplinește condițiile teoremei III și deci $\bar{A}(t)$ există și este continuă, fiind egală cu $\bar{a}(t)$, (24).

CAPITOLUL II

DESPRE EXISTENȚA VITESEI ȘI ACCELERAȚIEI

Existența vitesei și a accelerației în orice moment al unei mișcări realizabile, deși admise de mecanica clasică, nu pot fi considerate ca evidente.

Bazându-ne pe sistemele de postulate Rn și P, definite mai sus, ne propunem să demonstrăm această existență.

I. *In orice mișcare realizabilă a unui punct material* M, *există în fiecare moment* t *al mișcării o vitesă completă* $\bar{v}(t)$, *funcție continuă de* t. Fie μ o mișcare realizabilă a unui punct material M de massă m, având loc în intervalul finit de timp $\delta = [t', t'']$ și de ecuație

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{1}$$

In baza postulatului P 1, mișcarea μ este aproximată nedefinit în δ de un șir de mișcări regulate realizabile μ_n de ecuații

$$\bar{r} = \bar{r}_n(t), \tag{2}$$

astfel ca

$$\bar{r}(t) = \lim_{n \to \infty} \bar{r}_n(t), \text{ [1]} \tag{2a}$$

---

[1]) Este de observat că uniformitatea tinderii la limită, cuprinsă în definiția aproximării nedefinite, nu este folosită aici și nici în cele ce urmează. Această condiție ar putea fi lăsată de o parte în formularea postulatului $P.$ 1, fără alte neajunsuri aparente, decât o complicare formală a definițiilor (cap. I, 1° e), care ne-ar îndepărta inutil de înțelegerea concretă a fenomenului fizic.

fiecare mişcare μ_n posedând o acceleraţie completă $\bar{A}_n(t)$, continuă în fiecare moment t din δ. Mişcarea μ_n este produsă în baza postulatului şi relaţiei $R5$ de către o forţă

$$\bar{F}_n(t) = m\bar{A}_n(t), \tag{3}$$

căci $\bar{A}_n(t)$ existând, avem $\bar{a}_n(t) = \bar{A}_n(t)$.

In baza postulatului $P\,1$, forţele $\bar{F}_n(t)$ sunt mărginite în ansamblul lor în δ, ceea ce se scrie:

$$\bar{F}_n(t) \leqslant B, \quad (n = 1,2\ldots; \quad t \in \delta). \tag{4}$$

Ţinând seama de definiţia acceleraţiei complete de mai sus (cap. I, 2a), precum şi de (3), (4), rezultă

$$|\bar{A}_n(t)| = \left|\frac{d^2}{dt^2}\bar{r}_n(t)\right| \leqslant \frac{B}{m}, \quad (n = 1,2\ldots; \quad t \in \delta). \tag{5}$$

Ţinând seama că $\bar{r}(t)$ este limită de $\bar{r}_n(t)$ în δ (2a) şi că derivatele vectoriale (unice) de ordinul al doilea există pentru $\bar{r}_n(t)$ şi sunt mărginite în ansamblul lor în δ (5), rezultă dintr'o propoziţie generală [9, II] că $\bar{r}(t)$ are o derivată vectorială (unică), adică mişcarea μ posedă o vitesă (completă)

$$\bar{v}(t) = \frac{d}{dt}\bar{r}(t) \tag{6}$$

în fiecare moment t din (t', t''). In particular, vor exista în t', t'', vitesa prospectivă $\bar{v}_+(t')$ şi retrospectivă $\bar{v}_-(t'')$, respectiv.

Din aceeaşi propoziţie [9, II] rezultă direct că derivata lui $\bar{r}(t)$ este continuă de t în δ şi satisface o condiţie Lipschitz, astfel că ţinând seama de (6) rezultă:

II. *In orice mişcare realizabilă, având loc într'un interval finit de timp* $\delta = [t', t'']$, *acceleraţia mijlocie într'un interval de timp oarecare* $[t_0, t_1]$ *din* δ *există şi este mărginită.* Intr'adevăr, vitesa $\bar{v}(t)$ existând, fie $\bar{A}[t_0, t_1]$ acceleraţia mijlocie definită în $[t_0, t_1]$, când $t_0 \in \delta$, $t_1 \in \delta$ (cap. I, 1°), avem [9, II]

$$|\bar{A}[t_0, t_1]| = \left|\frac{\bar{v}(t_1) - \bar{v}(t_0)}{t_1 - t_0}\right| \leqslant L, \tag{6a}$$

unde $L > 0$ este constantă în δ.

Aplicând o propoziţie anterioară [9, III] rezultă:

III. *In orice mişcare realizabilă având loc într'un interval finit de timp* δ, *vitesa completă* $\bar{v}(t)$ *este o funcţie vectorială cu variaţie mărginită,* de unde deducem, aplicând definiţiile [8,4°], [9,1°] şi propoziţia [9, III] că,

IV. *In orice mişcare realizabilă, având loc într'un interval finit de timp* δ, *vectorii derivaţi ai vitesei (complete) sunt mărginiţi în ansamblul lor,*

$$|D\bar{v}(t)| \leqslant L, \qquad t \in \delta, \tag{7}$$

unde L are valoarea din (6a).

V. *In orice mişcare realizabilă a unui punct material* M, *având loc într'un interval finit de timp* $[t', t'']$ *există în fiecare moment* t *din interval o acceleraţie prospectivă* $\bar{a}(t)$, *funcţie uniformă de timp.* Fie μ mişcarea realiza-

bilă a punctului material M de massă m, având loc în intervalul $\delta = [t', t'']$ și de ecuație (1).

Conform propoziției (I) există pentru fiecare t din δ vitesa (completă) $\bar{v}(t)$, continuă de t în δ, iar $\bar{v}_+(t')$ există și este continuă prospectiv; acestea au rezultat din postulatul $P1$ (cap. I).

In aceleași condiții, rezultă din (IV) că vectorii derivați ai vitesei, $D\bar{v}(t)$ sunt mărginiți în ansamblul lor în δ, adică pentru orice $t_0 \in [t', t'']$, avem:

$$|D\bar{v}(t_0)| \leqslant L. \tag{8}$$

Vom dovedi că în orice moment t_0 din $[t', t'')$, există o accelerație prospectivă $\bar{a}(t_0)$, reducând la absurd ipoteza contrarie pe baza postulatului $P2a$.

Intr'adevăr, să presupunem că ar exista dimpotrivă în t_0, printre vectorii derivați prospectiv $D_+\bar{v}(t_0)$, ai vitesei $\bar{v}(t)$, doi vectori diferiți $\bar{W}_1, \bar{W}_2$ și să notăm cu $\bar{A}^*$ vectorul

$$\bar{A}^* = -\frac{W_1 + W_2}{2}. \tag{9}$$

Atunci, din (8) și (9) rezultă:

$$|\bar{A}^*| \leqslant L. \tag{10}$$

Să considerăm o mișcare μ^*, de accelerație constantă, egală cu $\bar{A}^*$, a punctului material M, ocupând poziția $\bar{r}' = \bar{r}(t')$ la momentul t' și de ecuație $\bar{r} = \bar{r}^*(t)$. Ca mișcare polinomială, ea este realizabilă, conform unei propoziții de mai sus (cap. I; II). Compusă cu mișcarea μ dată, se obține mișcarea rezultantă μ_* de ecuație $\bar{r} = \bar{r}_*(t)$ a punctului M, iar

$$\bar{r}_*(t) = \bar{r}(t) + \bar{r}^*(t); \qquad \bar{r}(t') = \bar{r}^*(t') = \bar{r}'; \tag{11}$$

mișcarea μ_* este realizabilă, conform postulatului R. 7.

Mișcarea μ_* posedă, în baza relației (11), o vitesă (completă) $\bar{v}_*(t)$, continuă în δ, deoarece μ și μ^* posedă și ele câte o vitesă (completă) $\bar{v}(t), \bar{v}^*(t)$, continue în δ și avem

$$\bar{v}_*(t) = \bar{v}(t) + \bar{v}^*(t). \tag{12}$$

Să notăm cu $\bar{A}_*[t_0, t]$, $\bar{A}[t_0, t]$, $\bar{A}^*[t_0, t]$ accelerațiile mijlocii din intervalul $[t_0, t]$, (cap. I, 1°), în mișcările μ_*, μ, μ^* respectiv. Din (12) rezultă

$$\bar{A}_*[t_0, t] = \bar{A}[t_0, t] + \bar{A}^*[t_0, t]. \tag{13}$$

Putem observa că făcând pe t să tindă către t_0 printr'un șir σ de valori t_j ale lui t din δ, $j = 1, 2, \ldots$, astfel ca vectorul $\bar{A}[t_0, t]$ să tindă către o limită unică, ceea ce este totdeauna posibil [8,2°], rezultă din (13) existența unei limite unice pentru vectorul $\bar{A}_*(t_0)$ și reciproc, căci $\lim \bar{A}^*[t_0, t] = \bar{A}^*$, când $t \to t_0$, există oricare ar fi șirul σ, parcurs de t.

Avem deci,

$$D_\sigma \bar{v}_*(t_0) = D_\sigma \bar{v}(t_0) + \bar{A}^*, \tag{14}$$

unde D_σ este un anumit vector derivat al vitesei, obținut ca limită vectorială, când t parcurge σ. De aici rezultă, ținând seama de (8), (10), că (oricare ar fi σ, pentru care $D_\sigma \bar{v}(t_0)$ există), revenind la notația generală a vectorilor derivați, avem:

$$|D\bar{v}_*(t_0)| \leqslant |D\bar{v}(t_0)| + |\bar{A}^*| \leqslant 2L \tag{15}$$

și aceasta oricare ar fi t_0 în δ.

Să punem, în (14), $D_{\sigma_1}\bar{v}_*(t_0) = \bar{D}_1$, $D_{\sigma_2}\bar{v}_*(t_0) = \bar{D}_2$, adică să notăm cu $\bar{D}_1$, respectiv $\bar{D}_2$, vectorii derivați prospectiv în t_0 ai vitesei $\bar{v}_*(t)$ în mișcarea rezultantă μ_*, care se obțin făcând în $\bar{A}_*[t_0, t]$ pe t să tindă spre t_0 prin șirurile descrescătoare σ_1, σ_2, de momente t_j. Rezultă din (14) că

$$\bar{D}_1 = \bar{W}_1 + \bar{A}^*, \quad \bar{D}_2 = \bar{W}_2 + \bar{A}^* \tag{16}$$

și deci, ținând seama de (9), avem

$$\bar{D}_1 = -\bar{D}_2 = \frac{\bar{W}_1 - \bar{W}_2}{2}, \tag{17}$$

adică vectorii $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$ sunt direct opuși și fac între ei un unghiu geometric nenul (egal cu π).

Se găsesc așa dar, îndeplinite condițiile unei propoziții demonstrate altădată [10,II]; $\bar{v}(t)$ are vectorii derivați mărginiți în ansamblul lor în δ (15), iar printre vectorii derivați prospectiv $D_+\bar{v}(t_0)$ sunt doi vectori $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$, care fac între ei un unghiu nenul.

Rezultă că există vectorul variabil $\frac{d}{dt}\bar{v}_*(t_p)$, definit ca accelerație completă (cap. I, 1°) în mișcarea μ_* a punctului M, de massă m, adică,

$$\bar{A}_*(t_p) = \frac{d}{dt}\bar{v}_*(t_p), \qquad p = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

și care își schimbă de o infinitate de ori orientarea sa în spațiu, când $t_p \in \delta$ tinde descrescând către t_0. Să aplicăm postulatul $R5$ în momentele t_p. Deoarece în t_p, $\bar{a}_*(t_p) = \bar{A}_*(t_p)$, unde $\bar{a}_*(t_p)$ este accelerația prospectivă a mișcării μ_* în momentul t_p, avem ($R5$)

$$\bar{F}(t_p) = m\,\bar{A}_*(t_p), \tag{19}$$

deci, forța $\bar{F}(t_p)$, vector proporțional cu $\bar{A}_*(t_p)$ își schimbă de asemenea orientarea în spațiu de o infinitate de ori, când $t_p \to t_0$ printr'un șir de valori descrescătoare; or, aceasta contrazice postulatul $P2a$, căci μ_* este o mișcare realizabilă.

Urmează că derivata prospectivă $D_+\bar{v}(t_0)$ în mișcarea μ a lui M în t_0 nu posedă doi vectori derivați prospectiv diferiți la momentul t_0, precum s'a presupus prin absurd. Cu alte cuvinte, în t_0 există derivata prospectivă $\bar{a}(t)$. *Q.E.D.*

VI. *In orice mișcare realizabilă a unui punct material* M, *având loc într'un interval finit de timp* (t', t''), *există în fiecare moment* t *din interval o*

acceleraţie retrospectivă $\bar{\alpha}(t)$, *funcţie uniformă de timp.* Demonstraţia precedentă se poate într'adevăr reproduce, schimbând sensul şirurilor σ, σ_1, σ_2 de momente t_j din descrescătoare în crescătoare. In acest caz, vectorii derivaţi prospectiv se înlocuesc cu vectori derivaţi retrospectiv, iar acceleraţia prospectivă $\bar{a}(t)$, cu acceleraţia retrospectivă $\bar{\alpha}(t)$. Demonstraţia prin absurd conduce la contrazicerea postulatului *P*2b, în loc de *P*2a.

CAPITOLUL III

DESPRE DISCONTINUITĂŢILE ACCELERAŢIEI

Sprijinindu-ne pe postulatele *Rn* şi *P*, am văzut că un punct material *M*, care execută în intervalul (t', t'') o mişcare realizabilă din câmpul mecanicei raţionale, posedă o vitesă completă continuă, precum şi acceleraţia, atât prospectivă cât şi retrospectivă, în fiecare moment din t interval.

Deoarece pentru o mişcare realizabilă dată, intervalul (t', t'') poate fi luat arbitrar, proprietăţile menţionate (cap. II; I—V) au loc în orice moment al mişcării [1]). Aşa dar, postulatele *R*2 şi *R*4 (cap. I) se pot aplica presupunând dată vitesa completă $\bar{v}(t_0)$ (sau vitesa prospectivă $\bar{v}_+(t_0)$) în loc de vitesa retrospectivă $\bar{v}_-(t_0)$, care figurează în enunţul noilor formulări ale postulatelor clasice respective. Se revine, astfel, la înţelesul obişnuit dat noţiunii de «condiţie iniţială», căci, la momentul t_0 avem, în baza propoziţiei menţionate (cap. II; I),

$$\bar{v}(t_0) = \bar{v}_+(t_0) = \bar{v}_-(t_0); \tag{1}$$

vitesa (completă) există în fiecare moment al unei mişcări realizabile. Postulatul *RV* (cap. I, 2°) al mecanicei clasice este deci verificat.

In ceea ce priveşte postulatul *RA* al mecanicei clasice (cap. I, 2°), care afirmă existenţa acceleraţiei în fiecare moment al mişcării (cu excepţia, poate, a unor momente izolate), am văzut altădată [7] că această proprietate nu se poate verifica decât examinând în prealabil discontinuităţile acceleraţiei.

Vom proceda la acest studiu bazat pe postulatele *Rn* şi *P*:

1°. Discontinuităţile acceleraţiei

Să dovedim că:

I. *In orice moment al unei mişcări realizabile* μ *a unui punct material* M, *acceleraţia prospectivă* $\bar{a}(t)$ *este continuă sau posedă o discontinuitate de primă speţă.* Fie $\delta = [t', t'']$ un interval de timp în care are loc mişcarea, şi fie t_0 un moment din δ. Acceleraţia prospectivă $\bar{a}(t)$ există în fiecare moment t din $[t', t'']$, (cap. II; I).

Făcând pe t să tindă către t_0 prin valori descrescătoare (respectiv crescătoare), ne propunem să arătăm mai întâi că există limita vectorială prospectivă (respectiv retrospectivă) a acceleraţiei prospective $\bar{a}(t)$.

---

[1]) Se poate observa, mai general, că în propoziţiile pe care le demonstrăm, intervalul $\delta = [t', t'']$, în care are loc mişcarea, nu are decât rolul de a separa, în vederea aplicării postulatelor *Rn* şi *P* un interval de timp finit oarecare; extremităţile intervalului, t', t'', se bucură, deci, întru cât nu sunt caracterizate şi altfel, de aceleaşi proprietăţi ca şi un moment oarecare t interior intervalului δ.

Intr'adevăr, să presupunem prin absurd că există, printre vectorii de acumulare prospectivă (respectiv retrospectivă)

$$\overline{\overline{\lim}}_{+}\, a(t), \qquad (\text{respectiv } \overline{\overline{\lim}}_{-}\, \bar{a}(t)), \tag{2}$$

câte doi vectori diferiți $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ și să notăm cu σ_1, σ_2 ambele șiruri descrescătoare (respectiv crescătoare) de momente t'_j, t''_k ($j=1,2,\ldots$; $k=1,2,\ldots$) tinzând spre t_0, astfel ca să obținem ca limite unice

$$\bar{A}_1 = \lim_{t'_j \to t_0} \bar{a}(t'_j); \quad \bar{A}_2 = \lim_{t''_k \to t_0} \bar{a}(t''_k); \quad (t'_j > t_0, t''_k > t_0). \tag{3}$$

Să compunem mișcarea dată μ, de ecuație $\bar{r} = \bar{r}(t)$ a punctului M, care ocupă poziția $\bar{r}' = \bar{r}(t')$ la momentul t', cu o mișcare μ^* de ecuație $\bar{r} = \bar{r}^*(t)$ și de accelerație constantă

$$\bar{A}^* = -\frac{\bar{A}_1 + \bar{A}_2}{2}, \tag{4}$$

și astfel ca $\bar{r}' = \bar{r}^*(t')$.

Mișcarea μ^* este realizabilă, ca mișcare polinomială (cap. I, 6°, II).

Se obține o mișcare rezultantă μ_*, de ecuație $\bar{r} = \bar{r}_*(t)$ astfel ca,

$$\bar{r}_*(t) = \bar{r}(t) + \bar{r}^*(t) - \bar{r}'; \quad \bar{r}' = \bar{r}(t') = \bar{r}^*(t'), \tag{5}$$

mișcare realizabilă în baza postulatului R 7.

Mișcările μ, μ^*, μ_* au fiecare accelerații prospective, notate respectiv cu $\bar{a}(t)$, $\bar{A}^*$, $\bar{a}_*(t)$, iar între ele există relația:

$$\bar{a}_*(t) = \bar{a}(t) + \bar{A}^*. \tag{6}$$

Făcând pe t să tindă către t_0 prin șirurile descrescătoare (respectiv crescătoare) σ_1, σ_2, obținem, în baza lui (2), printre vectorii de acumulare

$$\overline{\overline{\lim}}_{+}\, \bar{a}_*(t) \qquad (\text{respectiv } \overline{\overline{\lim}}_{-}\, \bar{a}_*(t)), \tag{7}$$

doi vectori L_1, L_2, direct opuși, adică făcând între ei un unghiu nenul (egal cu π), căci din (4), (6), obținem

$$\bar{L}_1 = -\bar{L}_2 = \frac{\bar{A}_1 - \bar{A}_2}{2}. \tag{8}$$

Aplicând o propoziție anterioară [10, I], rezultă că există un vector variabil $\bar{a}_*(t_p)$, aparținând lui $\bar{a}_*(t)$ și care își schimbă de o infinitate de ori orientarea în spațiu când t_p tinde descrescând (respectiv crescând) către t_0 printr'un șir de momente date σ_p. Aceeași proprietate o are deci și forța $\bar{F}_*(t)$, care produce, conform postulatului $R1$, mișcarea realizabilă μ_* și care, în baza postulatului $R5$, este dată de

$$\bar{F}_*(t) = m\bar{a}_*(t). \tag{9}$$

Aceasta contrazice însă postulatul $P2a$ (respectiv postulatul $P2b$). Presupunerea făcută la început, fiind astfel redusă la absurd, rezultă exis-

tența unei limite prospective și a unei limite retrospective a acceleratiei prospective $\bar{a}(t)$ în mișcarea μ, la momentul t_0 considerat:

$$\lim_{t \to t_0 +} \bar{a}(t_0), \qquad \text{respectiv} \quad \lim_{t \to t_0 -} \bar{a}(t_0). \tag{10}$$

Avem continuitate pentru $\bar{a}(t)$ în t_0 numai dacă

$$\bar{a}(t_0) = \lim_{t \to t_0 +} \bar{a}(t_0) = \lim_{t \to t_0 -} \bar{a}(t_0); \tag{11}$$

contrar, existența limitelor unice (10) dovedește numai existența unei discontinuități de prima speță.

2°. Consecințe

Ținând seama de proprietatea vectorială [9, VI], precum și de propoziția precedentă (I), rezultă direct:

II. *Intr'o mișcare realizabilă μ a unui punct material* M, *accelerația prospectivă este prospectiv continuă, în fiecare moment al mișcării.*

Din propozițiile (cap. II; IV), [9, VII] și (II), rezultă:

III. *Intr'o mișcare realizabilă a unui punct material* M, *definită într'un interval de timp* $\delta = (t', t'')$, *accelerația completă* $\bar{A}(t)$ *există în fiecare moment de continuitate prospectivă a acceleratiei retrospective* $\bar{\alpha}(t)$.

IV. *Când mișcarea realizabilă* μ, *dintr'un interval de timp* $[t_0, t_1]$ *posedă o acceleratie retrospectivă* $\bar{\alpha}(t_1)$ *în momentul* t_1, *precum și o acceleratie completă* $\bar{A}(t)$ *într'o vecinătate retrospectivă a lui* t, *accelerația retrospectivă*, $\bar{\alpha}(t)$ *este retrospectiv continuă în* t_1.

In vecinătatea retrospectivă a lui t_1 există $\bar{A}(t)$ pentru fiecare t din acea vecinătate, când ($\varepsilon > 0$ fiind suficient de mic) avem

$$\bar{a}(t) = \bar{\alpha}(t) = \bar{A}(t), \qquad t \in (t_1 - \varepsilon, t_1). \tag{12}$$

In baza propoziției (I) există $\lim_{-} \bar{a}(t)$, când $t \to t_1$ și deci $\lim_{-} \bar{\alpha}(t)$, când $t \to t_1$ există de asemenea (12). Aplicând proprietatea vectorială [9, VI], rezultă că $\bar{\alpha}(t)$, care este derivata vectorială retrospectivă a lui $\bar{v}(t)$, este retrospectiv continuă în t_1.

3°. Distribuția discontinuităților acceleratiei prospective

Să arătăm că,

V. *Intr'o mișcare realizabilă μ a unui punct material, accelerația prospectivă nu poate avea decât un număr finit* [1]) *de momente de discontinuitate într'un interval finit de timp.*

Vom dovedi, într'adevăr, că derivata mulțimii lineare a momentelor de discontinuitate a acceleratiei prospective $\bar{a}(t)$ este vidă, reducând la absurd ipoteza contrarie.

---

[1]) Că nu poate avea mai mult de o infinitate numărabilă, rezultă imediat din faptul că discontinuitățile sunt de prima speță, căci: « *o funcție vectorială* $\bar{V}(t)$ *nu poate poseda mai mult de o infinitate numărabilă de discontinuități de prima speță* ». Aceasta reiese fără dificultate din caracterele acestor discontinuități [8, 3°] și din teorema corespunzătoare pentru funcțiile reale [12].

Să presupunem, într'adevăr, că μ are loc în $\delta' = [t', t'']$ și că momentul $t_0 \in \delta'$ este prin absurd limita unui șir S_j, descrescător sau crescător, de o infinitate de momente $t_j \in \delta'$, $j = 1, 2, \ldots$ de discontinuitate. Notăm $\delta_j = [t_j, t_{j+1})$, $\delta = [t_1, t_0) = \Sigma \delta_j$.

Pentru a fixa ideile, vom presupune S_j crescător, deci $t_j < t_{j+1}$ și $\lim_{j\to\infty} t_j = t_0$, unde t_j este un moment de discontinuitate a lui $\bar{a}(t)$. Discontinuitățile lui $\bar{a}(t)$ sunt de prima speță (I), deci limitele de mai jos există și punem

$$\bar{g}_{1j} = \lim_{t\to t_j -} \bar{a}(t), \quad \bar{g}_{2j} = \lim_{t\to t_j +} \bar{a}(t); \quad \bar{A}_j^* = -\frac{\bar{g}_{1j} + \bar{g}_{2j}}{2}. \tag{13}$$

Putem defini cinematic în δ o mișcare μ^* de ecuație

$$\bar{r} = \bar{r}^*(t), \tag{14}$$

astfel ca punctul M să se afle în momentul $t' = t_1$ în poziția $\bar{r}' = \bar{r}(t')$, fără viteză și ca ea să posede o viteză completă $\bar{v}^*(t)$ și o accelerație prospectivă $\bar{a}^*(t)$, ambele continue în fiecare t din δ, punând (pentru $j = 1, 2, \ldots$ și $t \in \delta_j$)

$$\bar{\gamma}(t) = \bar{A}_j^* + (\bar{A}_{j+1}^* - \bar{A}_j^*)\frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j}, \qquad t \in \delta_j, \tag{15}$$

care este continuă de t în δ și definind funcția vectorială continuă

$$\bar{r}^*(t) = \bar{r}' + \int_{t'}^{t} dt \int_{t'}^{t} \bar{\gamma}(t)\, dt, \qquad t \in \delta. \tag{16}$$

Verificarea este imediată, căci obținem

$$\bar{v}^*(t) = \int_{t'}^{t} \bar{\gamma}(t)\, dt; \qquad \bar{a}^*(t) = \bar{\gamma}(t), \qquad t \in \delta, \tag{17}$$

ambele continue în δ; $\bar{v}^*(t') = 0$, $\bar{r}^*(t') = \bar{r}'$.

Arătăm că mișcarea μ^* este realizabilă în δ, căci sunt satisfăcute condițiile suficiente ale propoziției anterioare (cap. I, 6°, III).

Într'adevăr, pe de o parte, conform definiției sale, accelerația prospectivă $\bar{a}^*(t)$ este continuă de t în δ, pe de alta, ea nu poate schimba orientarea în spațiu de o infinitate de ori într'un șir σ de momente t_k, fie crescător, fie descrescător, din δ.

Ultima proprietate este evident verificată, când șirul σ de t_k tinde către un $t \neq t_0$, adică interior lui δ. Rămâne de verificat proprietatea, numai în cazul când șirul σ de t_k tinde crescător către t_0, care este limită de momente t_j de discontinuitate a lui $\bar{a}(t)$.

Să observăm, mai întâi, că fiecare t_k satisface, pentru un j determinat, dubla relație $t_j \leqslant t_k < t_{j+1}$ și din (15), (17) rezultă:

$$\bar{a}^*(t_k) = \bar{A}_j^* \frac{t_{j+1} - t_k}{t_{j+1} - t_j} + \bar{A}_{j+1}^* \frac{t_k - t_j}{t_{j+1} - t_j}, \tag{18}$$

astfel că vectorul $\bar{a}^*(t_k)$ este cuprins în unghiul geometric al vectorilor $\bar{A}_j^*$, $\bar{A}_{j+1}^*$, căci coeficienții scalari din (18) sunt pozitivi. Apoi, fiecare vector $\bar{A}_j^*$ ($j = 2, 3, \ldots$)

este cuprins în unghiul geometric al vectorilor $(-\bar{g}_{1j})$ și $(-\bar{g}_{2j})$, precum reiese din definiția (13).

Dându-ne o axă $\overline{Ou}$ din spațiu, față de care $\bar{g}_{1j}$, $\bar{g}_{2j}$ ar avea fiecare o orientare determinată (nu neutră)[1] [10,2°] și ținând seama de definițiile (13) pentru $\bar{g}_{1j}$, $\bar{g}_{2j}$, există, precum s'a văzut [10, 1°, 2°], câte un $\varepsilon_j' > 0$, $\varepsilon_j'' > 0$, destul de mici ca în momentele $t_j' = (1 - \varepsilon_j')\, t_j$, $t_j'' = (1 + \varepsilon_j'')\, t_j$, deci $t_j' < t_j''$, vectorii $\bar{a}\,(t_j')$, $\bar{a}\,(t_j'')$, să păstreze față de $\overline{Ou}$ orientarea vectorilor limită $\bar{g}_{1j}$, $\bar{g}_{2j}$, respectiv.

Cum μ este o mișcare realizabilă, accelerația ei $\bar{a}\,(t)$, ca și forța $\bar{F} = m\bar{a}$, care ar produce-o (cap. I, 3°, *R*5), satisface postulatul *P*2.b, în orice șir crescător σ_p de momente t_p tinzând spre t_0.

Deci vectorul $\bar{a}\,(t_p)$ nu schimbă orientarea în spațiu de o infinitate de ori. Cu alte cuvinte, dându-se o axă oarecare $\overline{Ou}$, $\bar{a}\,(t_p)$ păstrează sensul orientării față de $\overline{Ou}$, pentru $p > p_0$, suficient de mare.

Presupunând $\overline{Ou}$ aleasă într'un mod oarecare și deoarece șirul S_j de momente t_j este dat, să determinăm șirul σ_p alegând, ca mai sus, momentele consecutive $t_p = t_2', t_2'', t_3', t_3'', \ldots, t_j', t_j'', \ldots$, astfel ca $\bar{g}_{1j}$ și $\bar{g}_{2j}$ să aibă același sens de orientare ca vectorii $\bar{a}\,(t_j')$ și $\bar{a}\,(t_j'')$ respectiv, care pentru $j > j_0$, suficient de mare, păstrează sensul orientării față de o axă aleasă $\overline{Ou}$. Dar atunci, pentru $j > j_0$, vectorii $\bar{A}_j^*$, fiecare cuprins în unghiul geometric al vectorilor $-\bar{g}_{1j}$, $-\bar{g}_{2j}$ păstrează și ei sensul orientării față de $\overline{Ou}$ și deci pentru $p > p_0$, suficient de mare, $\bar{a}^*\,(t_p)$ păstrează sensul orientării față de $\overline{Ou}$. Rezultă că nici vectorul variabil $\bar{a}^*\,(t_k)$, cuprins pentru fiecare k în unghiul geometric respectiv al vectorilor $\bar{A}_j^*$, $\bar{A}_{j+1}^*$, nu schimbă sensul orientării față de axa $\overline{Ou}$, pentru $j > j_0$ și deci $\bar{a}^*\,(t_k)$ nu schimbă de o infinitate de ori orientarea în spațiu, oricare ar fi șirul crescător de t_k, deoarece axa $\overline{Ou}$ este oarecare.

Condițiile puse de propoziția (cap. I, 6°, III) sunt astfel satisfăcute în întregime și deci mișcarea μ^* este realizabilă, în ipoteza pusă la început asupra existenței șirului S_j infinit de momente t_j de discontinuitate a lui $\bar{a}\,(t)$.

Continuând demonstrația prin absurd, să compunem mișcările realizabile μ și μ^*, definind în δ mișcarea μ_* de ecuație

$$\bar{r} = \bar{r}_*\,(t), \quad \bar{r}_*\,(t) = \bar{r}\,(t) + \bar{r}^*\,(t) - \bar{r}'; \qquad t \in \delta. \tag{19}$$

Conform postulatului *R*7, mișcarea μ_* este realizabilă. Din (19) rezultă relația între accelerațiile prospective, în fiecare moment t din δ,

$$\bar{a}_*\,(t) = \bar{a}\,(t) + \bar{a}^*\,(t), \qquad t \in \delta, \tag{20}$$

unde $\bar{a}_*\,(t)$ este accelerația prospectivă a mișcării μ_*.

---

[1] Se vede ușor că în cazurile de orientare neutră a unuia sau a ambilor vectori $\bar{g}_{1j}$, $\bar{g}_{2j}$, nu se ivesc dificultăți esențiale și demonstrația rămâne validă.

Dar din (13), (15), (17), (20) rezultă, deoarece $\bar{a}^*(t)$ este continuă, iar

$$\lim_{t \to t_j} \bar{a}^*(t) = A_j^*,$$

$$\lim_{t \to t_j -} \bar{a}_*(t) = \frac{\bar{g}_{1j} - \bar{g}_{2j}}{2} = \bar{h}_j; \lim_{t \to t_j +} \bar{a}_*(t) = -\frac{\bar{g}_{1j} - \bar{g}_{2j}}{2} = -\bar{h}_j, \qquad (21)$$

unde am introdus notația $\bar{h}_j$.

Dar în șirul de momente σ_p, definit mai sus, în raport cu o axă $\overline{Ou}$ în prealabil aleasă, $\bar{a}_*(t_j')$ și $\bar{a}_*(t_j'')$ au respectiv aceeași orientare ca și vectorii direct opuși $\bar{h}_j$, $-\bar{h}_j$, când ε_j', ε_j'' sunt suficient de mici. Cu alte cuvinte, vectorul variabil $\bar{a}_*(t_p)$ schimbă sensul orientării față de Ou în momentele consecutive t_j', t_j'', oricare ar fi j, deci, de o infinitate de ori. Postulatul P 2b este deci contrazis și ipoteza existenței șirului S_j crescător, de o infinitate de momente de discontinuitate t_j a accelerației $\bar{a}(t)$ în δ, este absurdă.

Dacă șirul S_j ar fi fost luat descrescător, în loc de crescător, postulatul P 2a ar fi fost contrazis, raționamentul fiind asemănător.

4°. Mișcări invers congruente realizabile

Să arătăm că,

VI. *O mișcare invers congruentă a unei mișcări realizabile este realizabilă.* Fie dată mișcarea realizabilă μ, având loc în intervalul δ și să definim cinematic o mișcare μ^* invers congruentă cu μ și având loc în intervalul δ^* de durată egală cu a lui δ (cap. I, 1° b). Să notăm cu t, t^* momentele invers congruente în mișcările μ, μ^*.

Vom dovedi că și μ^* este realizabilă, căci satisface postulatele P.

a) Să dovedim întâi că orice mișcare inversă a unei mișcări realizabile posedă o accelerație prospectivă în fiecare moment și satisface postulatul P 2, când ținem seama de postulatul R 5.

Intr'adevăr, înafară de momentele de discontinuitate t_i în număr p finit (sau nul), $i = 1,2,\ldots,p$ ale accelerației prospective $\bar{a}(t)$ din mișcarea μ, există accelerația ei completă și continuă $\bar{A}(t)$ în fiecare moment al mișcării (cap. I, 6°, III, Corolar) și avem

$$\bar{A}(t) = \bar{a}(t) = \bar{\alpha}(t), \quad t \neq t_i, t \in \delta. \qquad (21)$$

Să considerăm accelerațiile complete, respectiv prospective sau retrospective, $\bar{A}^*(t)$, $\bar{a}^*(t)$, $\bar{\alpha}^*(t)$ în mișcarea invers congruentă μ^*. Avem (cap. I, 1° b) în momentele congruente t^*, t,

$$\bar{A}^*(t^*) = \bar{A}(t), \bar{a}^*(t^*) = \bar{\alpha}(t), \bar{\alpha}^*(t^*) = \bar{a}(t), \quad t \in \delta, t^* \in \delta^*, \qquad (22)$$

unde din existența accelerațiilor în membrul al II-lea din fiecare egalitate, rezultând din faptul că μ este realizabilă, deducem existența accelerațiilor din membrul I respectiv. Din (21), (22) rezultă, notând cu t_i^* momentul congruent al lui t_i

$$A^*(t^*) = \bar{\alpha}^*(t^*) = \bar{a}^*(t^*), \quad t^* \neq t_i^*, t^* \in \delta^*. \qquad (23)$$

Fie în δ un șir nedefinit oarecare S^* de momente t_k^* $(k = 1, 2, \ldots)$ tinzând crescător (respectiv descrescător) spre un moment t_0^* din δ^*. Să dovedim că accelerația $\bar{a}^*(t_k^*)$ a lui μ^* nu schimbă de o infinitate de ori orientarea în spațiu. Această proprietate se menține dacă neglijăm un număr finit de momente t_i^*, care s'ar putea găsi printre momentele t_k^* din S^*. Insă, pentru fiecare moment t_k^*, diferit de un t_i^*, avem din (21), (22), (23), notând cu t_k momentul său congruent din δ,

$$\bar{a}^*(t_k^*) = \bar{A}^*(t_k^*) = \bar{A}(t_k) = \bar{a}(t_k). \tag{24}$$

Fie S șirul momentelor t_k $(k = 1,2,\ldots)$ și t_0 momentul congruent al lui t_0^*; este clar că momentele șirului S tind descrescând (respectiv crescând) către t_0. Dar $\bar{a}(t)$ fiind accelerația prospectivă în mișcarea μ, care este realizabilă, rezultă din aplicarea postulatului $P2$, că $\bar{a}(t_k)$ nu schimbă orientarea în spațiu de o infinitate de ori, când t_k parcurge S și din (24) rezultă că vectorii egali $\bar{a}^*(t_k)$ se bucură de aceeași proprietate, când t_k parcurge S^*, adică postulatul $P2$ este satisfăcut și în mișcarea μ^*, când ținem seama de postulatul $R5$.

b) Să dovedim că orice mișcare inversă a unei mișcări realizabile satisface postulatul $P1$, când ținem seama de postulatul $R5$.

Mișcările μ, μ^*, având respectiv ecuațiile

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \qquad \bar{r} = \bar{r}^*(t^*), \qquad t \in \delta,\ t^* \in \delta^*, \tag{24}$$

au între ele, prin definiție, relația

$$\bar{r}(t) - \bar{r}^*(t^*) = \bar{r}_0, \tag{25}$$

unde $\bar{r}_0$ este un vector constant dat.

Mișcarea μ fiind realizabilă, postulatul $P1$ este satisfăcut, adică pentru fiecare $\varepsilon > 0$ dat există N, așa ca pentru $n > N$ să avem

$$|\bar{r}_n(t) - \bar{r}(t)| < \varepsilon, \qquad t \in \delta, \tag{26}$$

unde

$$\bar{r} = \bar{r}_n(t) \tag{27}$$

sunt ecuațiile unor mișcări realizabile μ_n, posedând o accelerație completă continuă $\bar{A}_n(t)$ în fiecare t din δ și totodată

$$|\bar{A}_n(t)| < B, \qquad t \in \delta, \tag{28}$$

unde $B > 0$ este finită și independentă de n și t.

Fie μ_n^* o mișcare invers congruentă a mișcării realizabile μ_n, definită în δ^* de ecuația

$$\bar{r} = \bar{r}_n^*(t^*), \tag{29}$$

aleasă astfel, ca

$$\bar{r}_n(t) - \bar{r}_n^*(t^*) = \bar{r}_0 \tag{30}$$

unde $\bar{r}_0$ este vectorul constant dat (25).

Mişcarea μ^* posedă o acceleraţie completă $\bar{A}_n^*(t^*)$ continuă în fiecare moment t^* din δ^*, căci în momente congruente t, t^* avem (cap. I, 1° b):

$$\bar{A}_n^*(t^*) = \bar{A}_n(t). \tag{31}$$

Cum μ_n este realizabilă, rezultă ca mai sus (punctul *a*) că postulatul *P*2 este satisfăcut în mişcarea μ_n^*, când ţinem seama de postulatul *R*5 şi cum acceleraţia ei prospectivă $\bar{a}_n^*(t^*) = \bar{A}_n^*(t^*)$ este continuă ca şi $\bar{A}_n(t)$, (31), mişcarea μ_n^* este realizabilă, conform propoziţiei (cap. I, 6°, III).

Din (25), (26), (30) rezultă pentru $\varepsilon > 0$ dat şi $n > N$ că

$$|\bar{r}_n(t) - \bar{r}_n^*(t^*)| < \varepsilon, \tag{32}$$

iar din (28), (31) rezultă

$$|\bar{A}_n^*(t^*)| < B,$$

unde $B > 0$ este finită şi independentă de n şi t.

Condiţiile postulatului *P* 1 sunt deci îndeplinite în mişcarea μ^*, când ţinem seamă de postulatul *R*5 şi având îndeplinite *P*1 şi *P*2, mişcarea μ^* este realizabilă. *Q.E.D.*

5°. Proprietăţi ale mişcărilor realizabile

VII. *Intr'o mişcare realizabilă* μ, *acceleraţia retrospectivă* $\bar{\alpha}(t)$ *este retrospectiv continuă, iar acceleraţia completă* $\bar{A}(t)$ *există în fiecare moment de continuitate retrospectivă a acceleraţiei prospective* $\bar{a}(t)$.

Aceste proprietăţi se obţin aplicând propoziţiile II şi III, de mai sus, unei mişcări invers congruente μ^* a lui μ, care am văzut că este de asemenea realizabilă (VI) şi ţinând seama că acceleraţia prospectivă (respectiv retrospectivă) a lui μ este acceleraţia retrospectivă (respectiv prospectivă) a lui μ^* (cap. I, 1° b).

Ţinând seama, în sfârşit, de propoziţiile II, III, V şi VII rezultă direct că:

VIII. *In orice mişcare realizabilă, având loc într'un interval finit de timp, acceleraţia completă* $\bar{A}(t)$ *există în fiecare moment şi este continuă, afară de un şir finit (sau nul) de* p *momente* t_k *din* δ, *când* $\bar{a}(t_k) \neq \bar{\alpha}(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, $(p \geqslant 0)$, *iar* $\bar{a}(t)$, $\bar{\alpha}(t)$ *sunt, fiecare, discontinue în* t_k.

Intr'adevăr, ca $\bar{A}(t)$ să nu existe pentru $t \in \delta$ trebue: fie ca $\bar{a}(t)$ să nu fie retrospectiv continuă, fie ca $\bar{\alpha}(t)$ să nu fie prospectiv continuă şi în ambele cazuri $\bar{a}(t) \neq \bar{\alpha}(t)$. Dar $\bar{a}(t)$ este prospectiv continuă şi, înafară de momentele t_k, este continuă, adică şi retrospectiv continuă; deci, înafară de momentele t_k nu se poate ca $\bar{A}(t)$ să nu existe, iar dacă $\bar{a}(t) = \bar{\alpha}(t)$, $\bar{A}(t)$ există şi este continuă, prospectiv ca $\bar{a}(t)$ şi retrospectiv ca $\bar{\alpha}(t)$.

Având în vedere definiţia mişcării regulate (cap. I, 1° *f*) şi ţinând seama de propoziţia precedentă VIII, găsim în sfârşit următoarea proprietate:

IX. *Orice mişcare realizabilă este o mişcare regulată, sau o succesiune de mişcări regulate*, proprietate care caracterizează mişcările realizabile din câmpul mecanicei raţionale şi este evident conformă cu experienţa, ca şi postulatele *P* introduse (cap. I, 6°).

CAPITOLUL IV

POSTULATELE DE FINITUDINE ŞI EXPERIENŢA

Am văzut mai sus că formulând postulatele mecanicei clasice (R), astfel ca ele să nu mai presupună *a priori* existenţa vitesei şi acceleraţiei în fiecare moment al unei mişcări realizabile (postulatele Rn) şi introducând postulatele de finitudine (postulatele P), se poate demonstra că orice mişcare realizabilă posedă în fiecare moment o vitesă continuă, o acceleraţie prospectivă şi o acceleraţie retrospectivă, acceleraţii continue şi egale între ele, înafară de unele momente, în număr finit în orice interval finit de timp (cap. II şi III).

Verificarea experimentală a postulatelor de finitudine P, introduse în locul ipotezelor RV, RA (cap. I, 2°) de existenţă a vitesei şi acceleraţiei aparţine fizicei. Ne propunem să scoatem în evidenţă, în cele ce urmează, câteva caractere ale acestor postulate P, care pot fi confruntate direct cu experienţa.

Vom cerceta prin aceeaşi metodă independenţa postulatelor P între ele, precum şi faţă de sistemul postulatelor clasice în noua lor formulare Rn.

1°. Mişcări definite cinematic; mişcări regulate, pe intervale

Am văzut (cap. I, 1°) că o mişcare μ a unui punct M este « definită cinematic » faţă de un sistem fix de axe $Oxyz$, când se dă vectorul de poziţie $\bar{r}$ al punctului M, la fiecare moment t, adică

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \tag{1}$$

unde $\bar{r}(t)$ este o funcţie vectorială continuă de t.

In clasa mişcărilor μ_c, definite cinematic, mecanica raţională distinge, ca realizabile fizic, numai pe unele dintre ele, mişcările μ_r care admit o vitesă şi o acceleraţie, ambele complete şi continue în fiecare moment al mişcării, afară poate de unele momente excepţionale, izolate (cap. I, 2°, RV, RA). Mişcările μ_r se pot numi « *regulate, pe intervale* ».

Analiza demonstrează că mişcările μ_r, astfel definite, constitue o subclasă foarte particulară în clasa mişcărilor μ_c, definite cinematic.

Intr'adevăr, derivata (vectorială) nu există, în general, pentru o funcţie continuă, şi când derivata există, ea nu este în general continuă. Când derivata este însă continuă, ea nu posedă, în general, o derivată prospectivă sau retrospectivă; când acestea din urmă există, ele sunt în general distincte şi nu există deci o derivată secundă (unică). In sfârşit, când derivata secundă (unică) există, ea nu este în general continuă.

Numai introducând postulatele P, în completarea postulatelor mecanicei raţionale (în noua lor formulare Rn), am putut constata (cap. III; IX) că:

I. Orice mişcare realizabilă este regulată, pe intervale.

2°. Existenţa şi continuitatea vitesei

Fiind dată o mişcare realizabilă oarecare μ, de ecuaţie (1), rezultă din aplicarea postulatului $P1$ că vitesa $\bar{v}(t)$ a mişcării este o funcţie vectorială continuă de t, iar acceleraţia mijlocie $A[t_0, t_1]$ este mărginită, într'un interval finit δ, când $t \in \delta$, $t_0 \in \delta$ (cap I, 1°, I, II).

Postulatul $P.1$ implică, în particular, când μ este regulată, că forța care o produce este mărginită în orice interval de timp δ finit. (cap. I, 4°, notă). In cazul general, cum $A[t_0, t]$ este mărginită, adică

$$|A[t_0, t]| < l, \quad t \in \delta_0 = [t_0, t_1], \tag{2}$$

unde $l > 0$ este finită, avem

$$\left| \frac{\bar{v}(t) - \bar{v}(t_0)}{t - t_0} \right| < l \tag{3}$$

Dar atunci

$$|\bar{v}(t)| \leqslant |\bar{v}(t_0)| + l|t - t_0| \tag{4}$$

și deci, deoarece

$$|t - t_0| \leqslant \delta_0, \tag{5}$$

rezultă

$$|\bar{v}(t)| \leqslant \bar{v}(t_0) + l.\delta_0, \tag{6}$$

unde δ_0 este măsura intervalului de timp $[t_0, t_1]$.

Rezultă de aici că în niciun moment t dintr'un interval finit de timp, vitesa unei mișcări realizabile nu poate fi nemărginită și deci, cu atât mai puțin, infinită. In ceea ce privește acest ultim rezultat, este de observat că el a fost totdeauna considerat, în mod clasic, ca fiind conform cu experiența. Or, vedem acum că el este o consecință a postulatului $P1$.

Postulatul $P1$ ar fi contrazis de experiență, în consecințele sale, dacă s'ar putea observa sau produce mișcări realizabile ale unui punct material, care ia vitese sau accelerații (fiind deci supus unor forțe) nemărginit de mari. Acest caz nu se întâlnește însă în lumea fizică.

In teoria percusiunilor din mecanica rațională se presupune că în momentul ciocnirii, se produce o forță «infinit de mare», acționând într'o durată «infinit de mică» de timp. Aceasta nu este însă decât o idealizare introdusă pentru a se folosi noțiunea de limită, așa cum și autorii clasici o arată [1]).

Producerea unei forțe infinite în momentul ciocnirii nu este considerată ca realizabilă nici măcar la limită. Teoria elasticității, care studiază mai în de aproape fenomenul ciocnirii, exclude într'adevăr posibilitatea apariției unei forțe nemărginite, căci ea ar distruge solidele în contact în momentul percusiunii.

De asemenea, concluzia postulatului $P1$ că vectorul vitesă $\bar{v}(t)$ variază continuu cu t (cap. II, I) corespunde experienței și nu este contrazis nici în cazul percusiunilor [2]). Ipoteza contrarie reprezintă într'adevăr numai o primă aproximație. Schimbarea de orientare a vitesei unei bile elastice în momentul ciocnirii se petrece într'un interval de timp de ordinul miimii de secundă, sau mai puțin ; ea cere, în tot cazul, un timp finit. In teoria exactă a percusiunilor, durata ciocnirii se calculează și este finită, iar verificarea

---

[1]) De exemplu, P. Appell [2], J. Chazy [6], M. Planck [19], S. Sanielevici [21], G. C. Suslov [23], L. Zoretti [24].

[2]) După P. Painlevé [17] faptul că numai accelerația poate varia brusc, nu și vitesa, constitue deosebirea între concepția scolastică și cea copernicană.

experimentală confirmă teoria [1]). Saltul de viteză într'un timp nul nu este decât o iluzie a simțurilor noastre imperfecte și astfel postulatul $P1$ nu este contrazis [2]).

3°. Existența accelerației prospective și a accelerației retrospective

Am văzut altădată [7] că relația fundamentală a mecanicei raționale, care leagă forța de accelerație, nu poate avea sens, în momentele când forța $\overline{F}$ prezintă un salt, afară dacă admitem că accelerația este definită prospectiv, adică

$$\overline{F} = m\overline{a}, \tag{7}$$

unde $\overline{a}$ este accelerația prospectivă.

Să reamintim exemple clasice de asemenea salturi ale forței:

a) Fie un câmp newtonian, produs de massa atractivă m, repartizată uniform pe suprafața unei sfere, de rază R. In interiorul sferei, câmpul este nul, iar înafară, pentru $r > R$, el are intensitatea $\frac{km}{r^2}$, unde k este o constantă dată. Un punct în mișcare este supus în momentul t_1, când străbate sfera, unei forțe discontinue, care efectuează un salt al valorii sale absolute.

b) Să considerăm mișcarea realizată în aparatul clasic de verificare experimentală a legii căderii corpurilor (mașina Atwood). Nivelul de oprire a greutății adiționale m și momentul t_1, la care oprirea are loc, separă, pentru greutatea echilibrată M, considerată ca un punct material liber (supus unei forțe de legătură), o regiune de deasupra, unde câmpul este uniform și nenul, de alta de dedesubt, unde câmpul este nul.

In ambele mișcări considerate, experiența pune deci în evidență faptul că accelerația la momentul t_1 nu se poate defini ca o derivată vectorială unică $\overline{A}$ a vitesei $\overline{v}(t)$, ci numai ca o accelerație prospectivă $\overline{a}$ (sau retrospectivă $\overline{\alpha}$) și am văzut anterior [7] că legea fundamentală a mecanicei (7) nu se poate formula decât cu ajutorul accelerației prospective $\overline{a}$ (iar nu cu al accelerației complete $\overline{A}$).

4°. Schimbările de orientare ale forței în spațiu

Postulatul de finitudine $P2$ afirmă că în orice mișcare realizabilă, forța nu poate schimba orientarea în spațiu de o infinitate de ori într'un timp finit (cap. I, 4°).

Este clar că se pot produce experimental forțe al căror sens, față de o axă dată, să se schimbe cu timpul de un număr finit de ori într'un interval finit de timp δ. Ne propunem să examinăm posibilitatea unei infinități de schimbări de sens ale forței într'un asemenea interval finit de timp.

Postulatul $P2.a$ (respectiv postulatul $P2.b$) exprimă postulatul $P2$ în cazul unui șir de momente descrescătoare (respectiv crescătoare), t_i tinzând spre un moment limită t_0, finit.

Dându-se momentul t_0, experiența nu ne sugerează nicio mișcare în care să existe o infinitate de momente t_i, ulterioare lui t_0 și oricât de apropiate de

---

[1]) A se vedea în această privință studiul lui Th. Pöschl [20] asupra ciocnirii.

[2]) Este de observat că M. Brelot [3] admite în axiomatizarea sa $\overline{v}_-(t) \neq \overline{v}_+(t)$, ca și în teoria clasică.

t_0, în care forța $\overline{F}$ să schimbe succesiv orientarea în spațiu. Contrazicerea postulatului $P2.a$ este vădit contrarie intuiției noastre [1]).

Nu același este însă cazul în ceea ce privește postulatul $P2.b$. Nimic nu ne împiedecă să închipuim o experiență în care să se contrazică acest postulat:

Considerăm astfel, schematic, un pendul simplu ale cărui oscilații le limităm prin prezența a două obstacole Ω_1, Ω_2, simetrice și simetric așezate față de planul vertical V, normal pe planul de oscilație al pendulului și trecând prin axa de suspensiune a acestuia.

Obligăm obstacolele să execute fiecare câte o mișcare proprie, neinfluențată de ciocnirile cu massa M a pendulului, mișcare care le apropie într'un timp finit unul de altul, pentru a lua contact la momentul t_0. Ciocnindu-se de aceste obstacole, pendulul își reduce mereu amplitudinea oscilațiilor și se oprește, după o infinitate de ciocniri succesive, la momentul t_0.

Trecând de o infinitate de ori prin poziția verticală π (corespunzătoare unui echilibru stabil) rezultanta $\overline{F}$ a forțelor date și de legătură, care lucrează asupra massei M, considerată ca un punct liber, își schimbă orientarea în spațiu de o infinitate de ori într'un șir arbitrar de momente t_j $(j = 1, 2, \ldots)$, în care massa M se află alternativ de o parte sau de alta a poziției de echilibru π. Avem:

$$\lim_{j \to \infty} t_j = t_0 \quad , \quad t_j > t_0 . \tag{8}$$

Mișcarea obstacolelor fiind independentă de ciocnirile cu massa M, s'ar părea că postulatul $P2b$. poate fi contrazis. Dar o examinare mai puțin schematică a problemei ne arată că aceasta nu poate avea loc.

In primul rând, ca să nu avem pierderi de energie în mișcarea pendulului, din cauza ciocnirilor, vom presupune ciocnirile perfect elastice, ipoteză realizabilă la limită.

In al doilea rând, ne putem aranja astfel ca, pe de o parte, în ciocnirile succesive, aceleași puncte materiale M_1, M_2 ale massei M și O_1, O_2 ale obstacolelor Ω_1, Ω_2 să vină respectiv în contact de fiecare dată (M_1 cu O_1 și M_2 cu O_2), pe de alta, ca normala comună la suprafețele în contact, în momentul ciocnirii, să treacă prin centrul de greutate al massei M, massă asimilabilă de altfel cu un punct material.

In sfârșit, putem dispune de legăturile obstacolelor Ω_1 și Ω_2 cu pământul, astfel ca mișcarea lor să nu fie influențată de ciocnirile care au loc, iar legăturile lor să absoarbă efectele eventuale ale percusiunilor, ceea ce revine la a considera massa fiecărui obstacol ca infinită și poate fi considerat ca realizabil, la limită. Vitesele punctelor materiale O_1, O_2 ale obstacolelor le vom lua constante în valoare absolută, ceea ce se poate de asemenea realiza.

Vom presupune, astfel, că fiecare obstacol Ω_1, Ω_2 este constituit din câte o placă perfect elastică, plană, care se rotește uniform în jurul axei de suspensiune X, X' a pendulului, axă pe care o conține (axa XX' este normală planului de oscilație a pendulului).

Vom urmări mișcarea massei M în ciocnirile ei succesive cu obstacolele Ω_1 și Ω_2, ciocniri care prezintă perfectă asemănare.

---

[1]) Dacă postulatul $P2a$ ar putea fi contrazis în cazul unei anumite mișcări date, forța care ar produce acea mișcare ar avea o orientare *nedeterminată* în momentele imediat ulterioare lui t_0, ceea ce nu este de conceput în cadrul experienței noastre fizice actuale.

In ciocnirea massei M cu Ω_1, să notăm vitesele punctelor materiale de contact M_1 şi O_1, imediat înainte şi imediat după ciocnire cu $\bar{v}_0$, $\bar{v}_1$ pentru punctul M_1 (al massei M) şi cu $\bar{v}'_0$, $\bar{v}'_1$ pentru punctul O_1 (al obstacolului Ω_1).

Vitesa relativă a punctului M_1, faţă de O_1, înainte de ciocnire, se regăseşte cu sens opus după ciocnire, deci

$$\bar{v}'_1 - \bar{v}_1 = -(\bar{v}'_0 - \bar{v}_0). \tag{9}$$

Prin ipoteză, vitesa de rotaţie a obstacolului nu variază prin efectul ciocnirii, deci şi

$$\bar{v}'_1 = \bar{v}'_0, \tag{10}$$

de unde deducem

$$\bar{v}_1 = 2\bar{v}'_0 - \bar{v}_0 \tag{11}$$

şi cum $\bar{v}'_0$ şi $-\bar{v}_0$ coincid ca direcţie şi sens, se vede că, prin ciocnire, vitesa $\bar{v}$ a massei M creşte în valoare absolută. Avem

$$|\bar{v}_1| = |\bar{v}_0| + 2|\bar{v}'_0| = |\bar{v}_0| + k, \tag{12}$$

unde k este o constantă pozitivă.

Fie δ intervalul de timp dintre momentul t_1, când are loc ciocnirea massei M cu placa Ω_1 şi momentul următor t_2, când pendulul trece prima dată după aceea prin poziţia π. Să notăm cu $\bar{v}(t)$ vitesa massei M la momentul t din δ.

Avem, evident, în mişcarea pendulară a lui M

$$|\bar{v}(t)| > |\bar{v}(t_1)|, \qquad t \in \delta = [t_1, t_2], \tag{13}$$

iar în virtutea inegalităţii (12)

$$|\bar{v}(t_1)| > 2|\bar{v}'_0| \tag{14}$$

de unde cu (13), (14),

$$\int_{t_1}^{t_2} |\bar{v}(t)|\, dt > 2\int_{t_1}^{t_2} |\bar{v}'_0|\, dt. \tag{15}$$

Ultima sumă reprezintă lungimea arcului de cerc descris de punctul material O_1 de pe placa Ω_1. Ţinând seama de simetrie, este clar că în intervalul de timp δ, punctul O_2 de pe placa Ω_2 a parcurs aceeaşi lungime ca şi O_1, adică nici jumătate din arcul descris de punctul M_1 şi reprezentat prin cea dintâi sumă din (15). Ciocnirea următoare are deci loc după momentul t_2 şi de cealaltă parte a planului V, când se vor reproduce analog condiţiunile din momentul t_1, placa Ω_2 jucând acum rolul plăcii Ω_1 de adineaori. Este clar că urmează, astfel, o infinitate de ciocniri succesive, în timp ce plăcile Ω_1, Ω_2 se apropie de planul V, unde se regăsesc odată cu massa M la momentul t_0. Dar aceasta implică, precum am arătat, contrazicerea postulatului $P2.b$.

In cele de mai sus, nu s'a ţinut seama de durata ciocnirilor. Fiecare ciocnire are însă o durată finită şi vom arăta că suma duratelor, dacă o infinitate de ciocniri ar putea avea loc, ar fi infinită, ceea ce contrazice faptul evident că plăcile Ω_1, Ω_2 şi massa M se întâlnesc în planul π la momentul finit t_0. Vom deduce de aici că până în momentul t_0, nu pot avea loc decât un număr finit de ciocniri şi deci postulatul $P2.b$ nu poate fi contrazis.

Divergența dintre cele două rezultate se explică ușor prin aceea că primul calcul nu a ținut seama de faptul evident că placa Ω_2 (respectiv Ω_1) își continuă și ea mișcarea, în timpul cât durează ciocnirea dintre M și placa Ω_1 (respectiv Ω_2), iar când numărul ciocnirilor crește, suma deplasărilor spre planul V ale punctului O_1 (respectiv O_2) pe arcul de cerc, pe care îl descrie, devine importantă. Să dovedim aceasta.

Este suficient să aplicăm formula lui Hertz asupra duratei ciocnirii a două solide perfect elastice [20] pentru a constata acest fapt.

Notând vitesa relativă a lui M, față de placă, înainte de a avea loc a n^a ciocnire, cu $\overline{w}_n$, iar cu λ o anumită constantă pozitivă, durata ciocnirii va fi

$$\tau_n = \frac{\lambda}{\sqrt[5]{|\overline{w}_n|}}. \tag{16}$$

După fiecare ciocnire, vitesa $\overline{v}$ a massei M crește cu k, constantă pozitivă (12). In mișcarea pendulului simplu, vitesa lui M este maximă în valoare absolută, când M se află în planul V. Să notăm cu k_0 acest maximum atins, înainte de a fi avut loc prima ciocnire. Este clar că după $(n-1)$ ciocniri, vitesa relativă $\overline{w}_n$ va fi, în valoare absolută,

$$|\overline{w}_n| < k_0 + nk. \tag{17}$$

Așa dar (16)

$$\tau_n > \frac{\lambda}{\sqrt[5]{k_0 + nk}}. \tag{18}$$

Insumând, în ipoteza că ar avea loc o infinitate de ciocniri succesive, durata lor totală T va satisface inegalitatea:

$$T = \sum_{n}^{1,\infty} \tau_{n+1} > \lambda \sum_{n}^{1,\infty} \frac{1}{(k_0 + nk)^{1/5}}, \tag{19}$$

adică durata totală T este infinită, căci suma din ultimul membru este divergentă.

Această analiză indică imposibilitatea realizării unei infinități de schimbări de orientare a forței în spațiu într'un interval finit de timp, în exemplul simplu considerat.

Să adăugăm în sfârșit observația că după o infinitate de ciocniri succesive, vitesa lui M crescând mereu în valoare absolută cu k, după fiecare ciocnire (12) ar deveni infinită, ceea ce ar contrazice postulatul $P1$ (2°) [1].

S'ar crede că putem modifica experiența precedentă, astfel ca postulatul $P1$ să nu mai fie contrazis, dar pentru a obține acest rezultat, plăcile ar trebui să execute o mișcare, care ar contrazice postulatul $P2$ b. Or, aceasta ar face experiența inutilă, căci ar presupune tocmai ceea ce avem de demonstrat.

Intr'adevăr, dacă am modifica, de pildă, mișcarea plăcilor, astfel ca vitesele lor de rotație să se anuleze în momentele când ciocnirile au loc, vitesa lui M ar fi mereu egală cu cea corespunzătoare oscilației pendulului simplu

[1] Această constatare întărește concluziile precedente, obținute pe baza formulei lui Hertz, a cărei valabilitate pentru vitese $\overline{w}_n$ prea mari este discutabilă, după cum arată A. E. H. Love [16].

la acelaș nivel, căci ciocnirile presupuse elastice nu ar face decât să schimbe vitesa dinaintea ciocnirii, într'una egală și direct opusă după ciocnire. Postulatul $P1$ nu ar mai fi deci contrazis.

In schimb, se poate observa că într'o astfel de mișcare, centrele de greutate ale plăcilor ar poseda, pe traiectoria lor, acceleraţii tangenţiale care schimbă sensul, trecând prin zero, între fiecare două momente de ciocnire consecutive, când vitesele acestor centre mereu îndreptate spre planul V se anulează. Mișcările plăcilor, care constitue însești datele experienței, ar trebui deci să contrazică postulatul $P2b$, ceea ce nu se poate presupune fără cerc vițios.

Un alt exemplu de experiență care ar putea pune de asemenea în evidență imposibilitatea realizării unei mișcări, contrazicând postulatul $P2.b$, însă în care s'ar contrazice în același timp și postulatul $P1$ este următorul:

Să considerăm o massă punctuală M descriind o mișcare pendulară simplă, sub acțiunea unui câmp paralel de intensitate γ. Notând cu l lungimea pendulului, cu g intensitatea câmpului gravitațional, se știe că semiperioada de oscilație a pendulului este foarte apropiată de

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{20}$$

când amplitudinea oscilațiilor este destul de mică.

Fie q un număr natural dat, suficient de mare. Să considerăm șirul crescător de momente t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ tinzând spre momentul de timp t_0, când $i \to \infty$. Fie intervalul de timp $\delta = [t_1, t_0]$ de mărime qT_0, iar intervalele

$$\delta_i = [t_i, t_{i+1}], \text{ de mărime } \delta/2^i; \quad \delta = \Sigma\, \delta_i .$$

Variem intensitatea câmpului γ, menținându-l egal în fiecare interval de timp δ_i cu $\gamma_i = 2^{2i} g$.

In intervalul δ_i, perioada de oscilație a pendulului va fi egală cu

$$T_i = \pi \sqrt{\frac{l}{\gamma_i}} = \frac{T_0}{2^i}, \tag{21}$$

iar numărul oscilațiilor va fi

$$\frac{\delta_i}{T_i} = \frac{\delta}{T_0} = q. \tag{22}$$

Vor fi deci, în total, o infinitate de semiperioade de oscilație în intervalul finit de timp δ și de fiecare dată, forța care solicită punctul M, considerat ca liber, schimbă orientarea în spațiu, contrazicându-se postulatul $P2.b$. Dar, dacă mișcarea ar fi realizabilă, ar fi contrazis și postulatul $P1$, căci vitesa lui M ar tinde către infinit.

Mișcarea nu se poate însă realiza, deoarece forțele nemărginit de mari care ar interveni ar sfârși, evident, prin a distruge toate legăturile sistemului și aceasta la un moment când forțele sunt încă finite, dar destul de mari.

5°. Mișcări inversabile

Fie o mișcare μ_d, definită cinematic prin ecuația

$$\bar{r} = \bar{r}(t), \qquad t' \leqslant t \leqslant t''. \tag{23}$$

In această mișcare, punctul parcurge o traiectorie dată Γ, dela A la B, în intervalul de timp $\delta = [t', t'']$.

Definim cinematic *mișcarea inversă* μ_i, ca fiind — dintre mișcările invers congruente ale lui μ_d (cap. I, 1° b) — aceea în care punctul parcurge aceeași traiectorie Γ dela B la A, în același interval de timp. Pentru mișcarea μ_i punem

$$\bar{r} = \bar{r}^*(t), \qquad t' \leqslant t \leqslant t'' \tag{24}$$

și notând

$$t^* = t' + t'' - t, \tag{25}$$

unde t^* este momentul invers congruent al lui t, față de δ, mișcarea μ_i este definită de relația

$$\bar{r}^*(t) = \bar{r}(t^*) \tag{26}$$

și este clar că μ_d, μ_i sunt inverse una, celeilalte.

Am văzut (cap. III, 4°, VI) că dacă μ_d este realizabilă, μ_i este de asemenea realizabilă, iar înafară de un număr finit de momente din δ, accelerațiile complete $\bar{A}(t)$ a lui μ_d și $\bar{A}^*(t^*)$ a lui μ_i există și coincid în momentele invers congruente t, t^*, adică

$$\bar{A}(t) = \bar{A}^*(t^*). \tag{27}$$

Acest rezultat, pe care îl vom exprima mai pe scurt, este bazat pe postulatele mecanicei raționale în forma *Rn*, precum și pe postulatele de finitudine *P*.

Să numim inversabilă [1]) o mișcare μ, astfel ca atât ea, cât și inversa ei μ^*, să fie realizabile. Proprietatea menționată se poate exprima astfel:

(PR.) *Orice mișcare realizabilă este inversabilă.*

Această proprietate se poate confrunta direct cu experiența și am putea să o admitem ca postulat, pentru a înlocui unul din postulatele *P*2.a sau *P*2.b.

Să demonstrăm, astfel, că *P*2.a (respectiv *P*2.b) rezultă din *P*2.b (respectiv *P*2.a) și *PR*.

Fie dată o mișcare realizabilă μ_d; admițând *PR*, rezultă că și mișcarea inversă μ_i a aceluiași punct M este realizabilă. Să considerăm în intervalul de timp $\delta = [t', t'']$ un șir arbitrar, descrescător (respectiv crescător) S de momente t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ tinzând spre un moment dat t_0; fie $\bar{F}(t_i)$ forța variabilă, care produce mișcarea μ_d, în acele momente din δ; accelerația completă $\bar{A}(t_i)$ există, înafară de un număr finit de momente t_{i_k} $(k=1,2,\ldots,p)$, (cap. III, 5°, VIII). Avem, m fiind massa punctului material M:

$$\bar{F}(t_i) = m\bar{A}(t_i) \qquad t_i \in S,\ i \neq i_k. \tag{28}$$

[1]) J. Perrin [18] distinge foarte limpede între noțiunile, uneori confundate, de «inversabil» («renversable») și «reversibil» («reversible»).

Să atașăm fiecărui moment t_i, momentul invers congruent t_i^*; șirul S^* al momentelor t_i^* este crescător (respectiv descrescător) și definim în mișcarea inversă μ_i, forța $\overline{F}^*(t_i^*)$ și accelerația completă $\overline{A}^*(t_i^*)$, astfel ca

$$\overline{F}^*(t_i^*) = m\overline{A}^*(t_i^*), \qquad t_i^* \in S^*, \quad i \neq i_k. \tag{29}$$

In virtutea egalității (27) rezultă, însă,

$$\overline{F}(t_i) = \overline{F}^*(t_i^*) \tag{30}$$

și este clar că dacă forța variabilă $\overline{F}(t_i)$ (respectiv $\overline{F}^*(t_i^*)$)nu schimbă orientarea în spațiu de o infinitate de ori, cum cere postulatul $P2$.a (respectiv $P2$.b), nici forța variabilă $\overline{F}^*(t_i^*)$ (respectiv $\overline{F}(t_i)$) nu schimbă orientarea în spațiu de o infinitate de ori și deci postulatul $P2$.b (respectiv $P2$.a) este demonstrat.

6°. Postulatele de finitudine și postulatele mecanicei raționale

Să dovedim că postulatele de finitudine P sunt independente de postulatele mecanicei raționale în formularea Rn, precum și între ele.

Vom defini, în acest scop, diverse mișcări ale unui punct material M, de massă m, realizabile în sensul postulatelor Rn ale mecanicei raționale, dar care nu satisfac postulatele de finitudine P, menționate.

Să considerăm, într'adevăr, o succesiune de mișcări uniform accelerate $\mu_i (i = 1, 2, \ldots)$ ale punctului M, având loc în condiții inițiale determinate. Fie $\bar{a}_i$ accelerația mișcării μ_i, care are loc în intervalul de timp $\delta_i = [t_i, t_{i+1}]$. Presupunem că totalul δ al duratelor δ_i este finit, $\delta = \Sigma \delta_i$; notăm $t = t_1 + \delta$. Vom alege poziția inițială și vitesa inițială din momentul de timp t_i, în mișcarea μ_i, egale respectiv cu poziția finală și vitesa finală din același moment t_i, în mișcarea μ_{i-1}. Poziția și vitesa lui M din momentul inițial t_1 în mișcarea μ_1 pot fi arbitrar alese.

Obținem o mișcare $\overline{\mu}_n$ realizabilă, în intervalul de timp $[t_1, t_0]$, luând $t_{n+1} = t_0$ și definind pe $\overline{\mu}_n$ ca mișcarea punctului material M, care parcurge succesiv mișcările $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Intr'adevăr, fiecare mișcare μ_i fiind realizabilă ca mișcare polinomială (cap. I, 6°, II), succesiunea unui număr finit dintre ele este și ea realizabilă.

Să considerăm mișcarea μ, având loc în intervalul $[t_1, t_0)$ și definită cinematic, ca succesiunea infinității de mișcări $\mu_i (i = 1, 2, \ldots)$, având fiecare loc în δ_i și astfel ca $\lim t_i = t_0$, când $i \to \infty$. Făcând punctul M să parcurgă succesiv mișcările μ_i, mișcarea μ este realizabilă, în sensul postulatelor Rn ale mecanicei raționale, căci niciunul dintre ele nu este contrazis. Notând cu $\overline{F}$ forța, care produce mișcarea lui M, avem — în fiecare interval de timp $\delta_i = [t_i, t_{i+1}]$ — relația (3°, 7)

$$\overline{F} = m\bar{a}_i; \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{31}$$

Fie dat (pentru simplificare) șirul S de vectori paraleli,

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_i, \ldots \tag{32}$$

ca șir al accelerațiilor, care definesc forța $\overline{F}$.

Dacă $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_i, \ldots$ au același sens, iar $|\bar{a}_i|$ crește peste orice limită, când $i \to \infty$, postulatul $P1$ este contrazis, căci vitesa lui M devine infinită, contrar celor stabilite mai sus (1°) ca o consecință a acelui postulat.

Tot astfel, dacă în șirul S, vectorii $\bar{a}_i$ schimbă sensul de o infinitate de ori, forța $\bar{F} = m\bar{a}_i$ în δ_i are aceeași proprietate, și postulatul $P2b$ este contrazis, deși postulatele Rn sunt satisfăcute.

Condițiile, ca în șirul S, $|\bar{a}_i|$ să depășească orice limită și aceea ca $\bar{a}_i$ să schimbe de o infinitate de ori sensul, fiind independente, este clar că postulatele $P1$ și $P2.b$ sunt de asemenea independente între ele.

Să presupunem că șirul S este dat astfel, ca niciuna din condițiile precedente să nu fie îndeplinită. Atunci, postulatele $P1$ și $P2b$ vor fi simultan verificate de mișcarea $\bar{\mu}$ astfel definită. In special, se observă că $\bar{\mu}$ este limita, pentru $n = \infty$, a mișcărilor $\bar{\mu}_n$ în $[t_1, t_0]$, iar forțele $\bar{F}_n$ în mișcările $\bar{\mu}_n$ sunt mărginite în ansamblul lor, așa cum cere postulatul $P1$. Mișcarea $\bar{\mu}$ poate fi inversabilă, sau nu, după cum forța $\bar{F}$, care produce mișcarea, prezintă un număr finit sau o infinitate de salturi în intervalul de timp δ (cap. III, 3°, V).

Ținând seama de relația (31), șirul S trebue deci, să prezinte numai un număr finit de vectori $\bar{a}_i$ diferiți, ca mișcarea $\bar{\mu}$ să fie inversabilă. In caz contrar, postulatul $P2.a$ nu este satisfăcut în mișcarea inversă și mișcarea $\bar{\mu}$ nu este inversabilă, deci nici realizabilă, precum rezultă din propoziția $PR(5°)$, ceea ce dovedește independența postulatului $P2.a$ de $P1$ și $P2b$, ale căror condiții sunt îndeplinite de $\bar{\mu}$.

Institutul de Matematică
al Academiei R.P.R., București

ОБ ОСНОВАНИЯХ МЕХАНИКИ ОСУЩЕСТВИМЫХ ДВИЖЕНИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Классическая механика допускает, что можно определить во всякий момент движения материальной точки ее скорость и ускорение („существующие“, т. е. их определение в одном смысле).

Так как эти, часто подразумеваемые, гипотезы RV, RA не могут быть проверены, автор заменяет их постулатами, подходящими для экспериментации, делая из них существенные выводы и устанавливая их независимость; это является предметом настоящего сообщения.

Определения и общие обозначения. Осуществимым движением является движение материальной точки, являющейся либо реальной, либо пределом ряда реальных движений, пассивные сопротивления которого стремятся к нулю.

Движения отнесены к картезианской системе $O\,xyz$ „абсолютно неподвижных“ осей и к „абсолютному“ времени t.

Допустим, что $\bar{r}$ является вектором — положением подвижной точки P; движение μ точки P имеет для *кинематического определения* формулу $\bar{r} = \bar{r}(t)$, где $\bar{r}(t)$ постоянная векторная функция, определенная в промежутке времени

$$\delta = [t', t'']$$

Тогда и только тогда, когда $\bar{r}(t)$ дифференцируется в t, определяют деривацией $\bar{r}(t)$, вектор скорость $\bar{v} = \frac{d}{dt}\bar{r}(t)$ в момент t; если скорость $\bar{v}$ имеется во всякий момент t от δ, $\bar{v}$ является векторной функцией $\bar{v}(t)$ от t в δ.

Тогда и только тогда, когда $\bar{v}(t)$ постоянно и дифференцируется в t, определяют деривацией $\bar{v}(t)$ вектор ускорение (полное)

$$\bar{A} = \frac{d}{dt}\bar{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\bar{r}(t)$$

в момент t.

Если $\bar{v}(t)$ имеется в δ и $t_0 \in \delta, t, \in \delta$, можно определить среднее ускорение

$$\bar{A}[t_0, t_1] = \frac{\bar{v}(t) - \bar{v}(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Тогда и только тогда, когда $\bar{v}(t)$ постоянно и проспективно (или ретроспективно) дифференцируемо в t, определяют проспективное ускорение $\bar{a}$ (или ретроспективное $\bar{\alpha}$), в момент t, т. е. предел для $\Delta t > 0$ (или $\Delta t < 0$) из соотношения $\bar{A}[t_0, t_1]$, когда, $\Delta t \to 0$, что пишется

$$\bar{a} = \frac{d}{dt_+}\bar{v}(t), \quad \bar{\alpha} = \frac{d}{dt_-}\bar{v}(t).$$

Эти определения и доказательства в тексте опираются на понятия о векторе и его свойствах, введенные и анализированные особо [8], [9], [10].

Глава I. Относительно осуществимых движений.

1°. Общая кинематика: говорится, что движение μ точки P уравнения $\bar{r} = \bar{r}(t)$ неопределенно приближенное в интервале времени δ рядом движений μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ уравнений $\bar{r} = \bar{r}_n(t)$, когда для всякого $\varepsilon > 0$, имеется целое N, как-то $|\bar{r}(t) - \bar{r}_n(t)| < \varepsilon$, при $n > N, t \in \delta$.

Движение μ точки P называется полиномным в δ, когда $\bar{r}(t)$ является в нем векторным полиномом и $\bar{r} = \bar{r}(t)$ является уравнением μ.

1. Какое-нибудь движение μ точки P в δ неопределенно приближенное в δ посредством ряда полиномных движений μ_n.

2°. Движения P, μ и μ^* точки P, определенные посредством $\bar{r} = r(t)$ и $\bar{r} = \bar{r}^*(t)$, являются прямо (или обратно) конгруентными в $\delta = [t_0, t_1]$ когда во всякий момент τ из δ, имеются определения (5) в тексте, где $t^*, \bar{r}_0, \bar{r}_1$, являются постоянными. Имеются соотношения (7), (7 а) в тексте. между скоростями или ускоренями двух движений, когда они существуют,

3°. Говорят, что движение μ_* уравнения $\bar{r} = \bar{r}_*(t)$ является *равнодействующим движением* двух любых движений μ и μ^*, определенных посредством $\bar{r} = \bar{r}(t)$ и $\bar{r} = \bar{r}^*(t)$, когда $\bar{r}_*(t) = \bar{r}(t) + \bar{r}^*(t)$; можно также писать $\mu_* = \mu + \mu^*$.

4°. *Правильным движением* является такое движение, которое обладает в каждый момент t из δ комплектным постоянным ускорением.

5°. *Постулаты* R_n. Эти постулаты рациональной механики формулированы без помощи гипотез RV, RA; они уточняют классические постулаты в следующих пунктах.

а) Постулаты применяются лишь к осуществимым движениям.

б) Соотношение $\bar{F} = m\bar{a}$ ($\bar{F}$ — сила, m — масса) предполагается только тогда, когда существует проспективное ускорение $\bar{a}$; в иных случаях ничего подобного не постулируется [7].

в) Если дано движение, сила $\bar{F}$ может выразиться в (векторной) функции единственной переменной t, измеряющей время, и пишут $\bar{F} = \bar{F}(t)$

г) В первоначальный момент t_0 из $\delta = [t_0, t_1]$ материальная точка M может занимать произвольно выбранное положение и достигнуть его с ретроспективной скоростью, произвольно данной. Таким образом получают, если нет противоречий с прочими постулатами, осуществимое движение (единственно определенное) в δ.

д) Если какие-нибудь движения μ и μ^* осуществимы, то их производные движения также осуществимы.

6°. *Постулат* P. Для того чтобы пополнить отсутствие гипотез RV, RA, вводятся следующие постулаты (постулаты „завершения“).

Когда данное движение μ осуществимо в δ, имеется:

P_1. Среди неопределенных рядов, осуществимых и правильных движений неопределенно приближающих μ, имеется ряд движений μ_n ($n=1, 2, \ldots$), таких, чтобы силы $\bar{F}_n$, которые их производят, были бы органичены в их совокупности в δ

P_2. Сила $\bar{F}(t)$, производящая движение μ не может менять безконечное количество раз своего направления в пространстве ни в каком ряду σ моментов t_k ($K = 1, 2, \ldots$) ограниченного интервала времени δ, и различаются два случая, и зависимости от того убывает ли σ или увеличивается, когда $t_k \to t_0$ ($t_0 \in \delta$).

Отмечают, что при условиях P_1 могут существовать ряды осуществимых правильных (μ_n) движений (10), как-то $\mu_n \to \mu$, тогда как силы $\bar{F}_n$ не ограничены в своей совокупности.

7°. Доказано также посредством построения и полной индукции, что

II. *Любое полиномное движение осуществимо.*

Доказывая применения постулатов P_1 и P_2, получаем

III. *Если μ, определенное кинематически, имеет проспективное ускорение $\bar{a}(t)$ постоянное в конечном δ, и $\bar{a}(t)$ не меняет бесконечное число раз ориентации в пространстве ни в одном из рядов моментов замкнутого δ, μ является осуществимым.*

Глава II. О существовании скорости и ускорении.

Начиная с постулатов R_n, P и опираясь на доказанные векторные свойства [8], [9], доказывается, что если рассматривать осуществимое движение μ материальной точки M, в ограниченном интервале времени $\delta = [t', t'']$, имеется:

I. *В любом моменте t из δ существует полная скорость $\bar{v}(t)$.*

II. среднее ускорение $\bar{A}[t_0, t_1]$ в каждом интервале $\delta_1 = [t_0, t_1]$ из δ ограничено.

III. $\bar{v}(t)$ *присуща ограниченная вариация.*

IV. *Векторы, производные скорости, $D\bar{v}(t)$, ограничены в своем мнсжестве.*

V *и* VI. *Проспективные ускорения $\bar{a}(t)$ и ретроспективные $\bar{\alpha}(t)$ имеются во всяком моменте t из δ.*

Глава III. О прерывистости ускорения.

Последовательно доказывают еще, что в любой момент t из δ имеется:

I. $\bar{a}(t)$ непрерывно или обладает прерывистостью первого вида.

II. $\bar{a}(t)$ проспективно непрерывно.

III. Полное ускорение $\bar{A}(t)$ существует любой момент t_0, где ретроспективное ускорение $\bar{\alpha}(t)$ является проспективно непрерывным.

IV. Если в соседстве $[t_0, t_1]$ от t_1, $\bar{A}(t)$ имеется для всякого t, $\bar{\alpha}(t)$ ретроспективно постоянное в t_1, лишь бы $\bar{\alpha}(t_1)$ существовало.

Опираясь на теорему (глава I; III), имеем:

V. $\bar{a}(t)$ может иметь в δ лишь конечное число p моментов t_k $(K=1, 2, \ldots p)$ прерывистости.

VI. *Любое движение μ^*, обратно конгруентное осуществимому μ, также осуществимо.*

Отсюда выводят последовательно (ссылаясь также на главу I, 6°, III), что имеется:

VII. $\alpha(t)$ ретроспективно непрерывное и $\bar{A}(t)$ имеется в любой момент t_0, где $\bar{\alpha}(t)$ является проспективно непрерывным.

VIII. $\bar{A}(t)$ имеется в любой момент t из δ, кроме конечного числа p моментов t_k,, где $\bar{a}(t_k) \neq \bar{\alpha}(t_k)$, $K = 1, 2, \ldots, p$

IX. Любое осуществимое движение является равномерным или последовательностью равномерных движений.

Глава IV. Постулаты завершаемости и опыт.

I°. Постулат P_1: Этот постулат соответствует опыту, так как прямо вытекает (глава II) для любого осуществимого μ, существования и непрерывности $\bar{v}(t)$. Случаи толчка не составляют исключения, так как длительность толчка конечная и нет бесконечной силы.

Постулат *P2a*: Опыт не суггерирует никакой возможности противоречить.

Постулат *P2b*: На первый взгляд кажется, что опыт мог бы противоречить, но этого нет. Пример. Ограничивают колебание простого маятника массы M, посредством двух симметричных препятствий Ω_1, Ω_2, реализованных пластинками с равномерным вращением вокруг оси XX' маятника и совпадающие в конечном моменте t_0 в вертикальной плоскости V, перпендикулярной к плоскости колебания. Масса M колеблется и последовательно ударяется о препятствия по ту и другую сторону V.

Если предположить, что масса M возобновляет немедленно после толчка свое колебательное движение в обратном направлении с относительной скоростью, равной и противоположной скорости до удара, вытекает, что до момента t_0 состоится бесконечное количество колебаний. Движение явно противоречило бы *P2b*, если таковое было бы осуществимо. Но, с одной стороны, применение формулы Герца (16) дает возможность вычислить общую продолжительность T ударов (19), которое было бы бесконечным, если имелось бы бесконечное количество ударов, с другой

стороны, скорость M стала бы бесконечной и оба следствия недопустимыми, если t_0 конечно; следовательно постулат $P2b$ не опровергается опытом.

2°. а) Говорят, что движения μ, μ', в δ точек P, P' *взаимно противоположны*, когда P и P' описывают во взаимно противоположных смыслах одновременно одну и ту же дугу траектории, причем оба движения противоположно конгруентные в δ.

б) Говорят, что осуществимое движение μ *обратимо*, когда его противоположность μ' также осуществима. В качестве следствия получаются постулаты P и R :

PR. Всякое осуществимое движение обратимо.

Отсюда следует, что $P2a$ и $P2b$ могут замещать друг друга, когда PR принято в качестве постулата.

3°. *Независимость постулатов P и R_n* Это выявляется движениями μ, полученными принуждением материальной точки M последовательно выполнять ряд осуществимых движений μ_i, из которых все имеют место в $\delta_i = [t_i, t_{i+1}]$, определенных следующим образом:

Конечные условия μ_{i-1} совпадают с начальными условиями μ_i; каждое μ_i одинаково ускорено в δ_i с ускорением $\bar{a}_i$; следовательно μ осуществимо в смысле постулатов R_n. Пусть S будет неопределенным рядом параллельных векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots \bar{a}_i \ldots$, если предположить, что все $\bar{a}_i$ обладают одинаковым смыслом и что $\lim(\bar{a}_i) = \infty$, P_1 опровержен: но если все $\bar{a}_i$ меняют бесконечное количество раз свой смысл, опровергается $P2b$. Так как обе гипотезы независимы, то $P1$ и $P2B$ также независимы. Если же предположить, наоборот, что $\bar{\mu}$ прямолинейно и что ни одна из гипотез не осуществилась, то R_n, $P1$, $P2b$ одновременно доказаны. Что касается $P2a$, то он удовлетворен, если в S имеется конечное число различных векторов, в противном случае $\bar{\mu}$ не обратимо; следовательно $P2a$ независимо от постулатов R_n, $P1$ и $P2b$.

SUR LES FONDEMENTS DE LA MÉCANIQUE DES MOUVEMENTS RÉALISABLES DU POINT MATÉRIEL

(RÉSUMÉ)

Il est admis en mécanique classique, que

A chaque instant du mouvement d'un point matériel, on peut définir la vitesse et l'accélération (qui « existent », c'est-à-dire leur définition a un sens).

Ces hypothèses RV, RA, souvent implicites, ne pouvant être soumises à une vérification, on se propose de leur substituer des postulats se prêtant à l'expérimentation, d'en tirer des conséquences essentielles et d'en établir l'indépendance; c'est ce qui fait l'objet de ce mémoire.

Définitions et notations générales. Un mouvement *réalisable* est le mouvement d'un point matériel, qui est soit réel, soit limite d'une suite de mouvements réels, telle que les résistances passives y tendent vers zéro.

On rapporte les mouvements à un système cartésien $Oxyz$ d'axes « absolument fixes », ainsi qu'au temps « absolu » t.

Soit $\bar{r}$ le vecteur-position d'un point mobile P; un mouvement μ de P a pour *définition cinématique* l'équation $\bar{r} = \bar{r}(t)$, où $\bar{r}(t)$ est une fonction vectorielle continue, définie dans l'intervalle de temps $\delta = [t', t'']$.

Lorsque, et seulement lorsque $\bar{r}(t)$ est dérivable en t, l'on définit par dérivation de $\bar{r}(t)$, le vecteur vitesse $\bar{v} = \frac{d}{dt}\bar{r}(t)$ à l'instant t; si la vitesse $\bar{v}$ existe à tout instant t de δ, $\bar{v}$ est une fonction vectorielle $\bar{v}(t)$ de t, en δ.

Lorsque, et seulement lorsque $\bar{v}(t)$ est continue et dérivable en t, l'on définit, par dérivation de $\bar{v}(t)$, le vecteur accélération (complète)

$$\bar{A} = \frac{d}{dt}\bar{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\bar{r}(t),$$

à l'instant t.

Lorsque $\bar{v}(t)$ existe en δ et $t_0 \in \delta, t_1 \in \delta$, l'on peut définir l'accélération moyenne

$$\bar{A}[t_0, t_1] = \frac{\bar{v}(t_1) - \bar{v}(t_0)}{t_1 - t_0}, \qquad t_1 - t_0 = \Delta t.$$

Lorsque, et seulement lorsque $\bar{v}(t)$ est continue et dérivable prospectivement (resp. rétrospectivement) en t, l'on définit l'accélération prospective $\bar{a}$ (resp. rétrospective $\bar{\alpha}$) à l'instant t, c'est-à-dire la limite pour $\Delta t > 0$ (resp. $\Delta t < 0$) du rapport $\bar{A}[t_0, t_1]$, lorsque $\Delta t \to 0$, ce qui s'écrit

$$\bar{a} = \frac{d}{dt_+}\, v(t), \qquad \bar{\alpha} = \frac{d}{dt_-}\, \bar{v}(t).$$

Ces définitions, ainsi que les démonstrations du texte, s'appuyent sur des notions et propriétés vectorielles, qui ont été introduites et analysées séparément [8], [9], [10].

Chapitre I. *Sur les mouvements réalisables.*

1°. Cinématique générale: On dit que le mouvement μ d'un point P d'équation $\bar{r} = \bar{r}(t)$ est *approché indéfiniment* dans l'intervalle de temps δ par une suite de mouvements μ_n $(n = 1,2,\ldots)$ d'équations $\bar{r} = \bar{r}_n(t)$, lorsque, pour chaque $\varepsilon > 0$, il y a un entier N, tel que

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}_n(t)| < \varepsilon, \qquad \text{pour } n > N, t \in \delta.$$

Le mouvement μ de P est dit *polynomial* en δ, lorsque $\bar{r}(t)$ y est un polynôme vectoriel et $\bar{r} = \bar{r}(t)$ est l'équation de μ.

1°. *Un mouvement quelconque* μ *d'un point* P *en* δ *y est approché indéfiniment en* δ *par une suite de mouvements* μ_n, *polynomiaux.*

2°. Les mouvements d'un point P, μ et μ^*, définis par $\bar{r} = \bar{r}(t)$ et $\bar{r} = \bar{r}^*(t)$ sont *directement* (resp. *inversement*) *congruents* en $\delta = [t_0, t_1]$, lorsqu'à chaque instant τ de δ, on a les définitions (5) du texte, où $t^*, \bar{r}_0, \bar{r}_1$ sont constants. On a les relations (7), (7a) du texte, entre les vitesses ou entre les accélérations des deux mouvements, lorsqu'elles existent.

3°. On dit que le mouvement μ_* d'équation $\bar{r} = \bar{r}_*(t)$ est le *mouvement résultant* de deux mouvements μ et μ^* quelconques, définis par $\bar{r} = \bar{r}(t)$ et $\bar{r} = \bar{r}^*(t)$, lorsque $\bar{r}_*(t) = \bar{r}(t) + \bar{r}^*(t)$ on pourra écrire aussi $\mu_* = \mu + \mu^*$.

4°. Un *mouvement régulier* est un mouvement qui possède à chaque instant t de δ une accélération complète, continue.

5°. *Postulats Rn.* Ces postulats de la mécanique rationnelle sont formulés sans faire appel aux hypothèses *RV*, *RA*; ils précisent les postulats classiques aux points suivants:

a) Les postulats s'appliquent seulement aux mouvements réalisables.

b) La relation $\overline{F} = m\bar{a}$ ($\overline{F}$ force, m masse) est postulée seulement si l'accélération prospective $\bar{a}$ existe; en cas différent, rien de pareil n'est postulé [7].

c) Dès que le mouvement est donné, la force $\overline{F}$ peut s'exprimer en fonction (vectorielle) de la seule variable t, qui mesure le temps, et l'on écrit $\overline{F} = \overline{F}(t)$.

d) A l'instant (initial) t_0 de $\delta = [t_0, t_1]$ un point matériel M peut occuper une position arbitrairement donnée et y arriver avec une vitesse rétrospective, arbitrairement donnée. On obtient ainsi, lorsqu'aucun autre postulat n'est contredit, un mouvement réalisable (uniquement déterminé) en δ.

e) Lorsque des mouvements quelconques μ et μ^* sont réalisables, leur mouvement résultant est aussi réalisable.

6°. *Postulats P.* Afin de suppléer à l'absence des hypothèses *RV*, *RA*, l'on introduit les postulats suivants (postulats de « finitude »):

Lorsqu'un mouvement μ donné est réalisable en δ, il y a:

P1. Parmi les suites indéfinies de mouvements réalisables et réguliers approchant indéfiniment μ, il existe une suite de mouvements μ_n ($n = 1,2,\ldots$) tels que les forces $\overline{F}_n$, qui les produisent, soient bornées dans leur ensemble, en δ.

P2. La force $\overline{F}(t)$, qui produit le mouvement μ, ne peut changer son orientation dans l'espace une infinité de fois en aucune suite σ d'instants t_k ($k = 1,2,\ldots$) de l'intervalle fini de temps δ et l'on distinguera deux cas, selon que σ décroît ou croît, lorsque $t_k \to t_0$ ($t_0 \in \delta$).

On fait remarquer qu'il peut exister dans les conditions de *P*1 aussi des suites de mouvements (10) réguliers μ_n, réalisables, tels que les $\mu_n \to \mu$, tandis que les forces $\overline{F}_n$ ne sont pas bornées dans leur ensemble.

7°. Il est aussi prouvé, par construction et induction complète, que

II. *Tout mouvement polynomial est réalisable.*

En vérifiant l'application des postulats *P*1 et *P*2, dans les cas suivants, l'on obtient

III. *Lorsque* μ, *défini cinématiquement, est à accélération prospective* $\bar{a}(t)$ *continue en* δ *fini et que* $\bar{a}(t)$ *ne change pas une infinité de fois d'orientation dans l'espace, en aucune suite d'instants de* δ *(fermé),* μ *est réalisable.*

Chapitre II. Sur l'existence de la vitesse et de l'accélération.

A partir des postulats *Rn*, *P* et en s'appuyant sur des propriétés vectorielles démontrées [8], [9], on prouve que si l'on considère un mouvement réalisable μ d'un point matériel M, ayant lieu dans l'intervalle de temps fini $\delta = [t', t'']$, il y a

I. *Il existe à chaque instant* t *de* δ *une vitesse complète* $\overline{v}(t)$.

II. *L'accélération moyenne* $\bar{A}[t_0, t_1]$, *en chaque intervalle* $\delta_1 = [t_0, t_1]$ *de* δ *est bornée.*

III. $\overline{v}(t)$ *est à variation bornée.*

IV. *Les vecteurs dérivés de la vitesse,* $D\overline{v}(t)$, *sont bornés dans leur ensemble.*

V. *et* VI. *Les accélérations, prospective* $\bar{a}(t)$ *et rétrospective* $\bar{\alpha}(t)$, *existent à chaque instant* t *de* δ.

Chapitre III. Sur les discontinuités de l'accélération.

On démontre aussi successivement qu'à un instant quelconque t de δ il y a

I. $\bar{a}(t)$ *est continue, ou possède une discontinuité de première espèce.*

II. $\bar{a}(t)$ *est prospectivement continue.*

III. *L'accélération complète* $\bar{A}(t)$ *existe à tout instant* t_0, *où l'accélération rétrospective* $\bar{\alpha}(t)$ *est prospectivement continue.*

IV. *Lorsque dans le voisinage* $[t_0, t_1]$ *de* t_1, $\bar{A}(t)$ *existe pour chaque* t, $\bar{\alpha}(t)$ *est rétrospectivement continue en* t_1, *pourvu que* $\bar{\alpha}(t_1)$ *existe.*

En s'appuyant sur la proposition (chap. I, III) ci-dessus, il y a:

V. $\bar{a}(t)$ *ne peut avoir en* δ *qu'un nombre fini* p *d'instants* t_k $(k = 1,2,.., p)$ *de discontinuité.*

VI. *Tout mouvement* μ^*, *inversement congruent d'un* μ *réalisable, est aussi réalisable.*

On en déduit successivement, en invoquant aussi (Chap. I, 6°, III), qu'il y a:

VII. $\bar{\alpha}(t)$ *est rétrospectivement continue et* $\bar{A}(t)$ *existe à tout instant* t_0, *où* $\bar{\alpha}(t)$ *est prospectivement continue.*

VIII. $\bar{A}(t)$ *existe à tout instant* t *de* δ, *sauf en un nombre fini* p *de* t_k, *où* $\bar{a}(t_k) \neq \bar{\alpha}(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, p$.

IX. *Tout mouvement réalisable est régulier ou une succession de mouvements réguliers.*

Chapitre IV. Les postulats de finitude et l'expérience.

1°. *Postulat P1.* Ce postulat est conforme à l'expérience, car il en résulte directement (chap. II) pour tout μ réalisable, l'existence et la continuité de $\bar{v}(t)$. Les cas de choc n'y font pas exception, car la durée d'un choc est finie et il n'y a pas de force infinie.

Postulat P2a. L'expérience ne suggère aucune possibilité de le contredire.

Postulat P2b. A première vue l'expérience pourrait le contredire, mais il n'en est rien. Par exemple: On limite les oscillations d'un pendule simple, de masse M, par deux obstacles symétriques Ω_1, Ω_2, réalisés par des plaques effectuant des rotations uniformes autour de l'axe XX' du pendule et venant en coïncidence, à l'instant fini t_0, dans le plan vertical V, normal au plan d'oscillation. La masse M oscille et heurte successivement les obstacles, d'une part et de l'autre de V.

Si l'on admet que la masse M reprend instantanément, après le choc, son oscillation en sens inverse, avec une vitesse relative égale et opposée à sa vitesse d'avant le choc, il s'ensuit qu'il y aura une infinité d'oscillations, avant l'instant t_0. Le mouvement contredirait visiblement P2b, s'il était réalisable. Mais, d'une part, l'application de la formule de Hertz (16) permet de calculer la durée totale T des chocs (19), qui serait infinie, s'il y avait une infinité de chocs, d'autre part la vitesse de M deviendrait infinie et les deux conséquences sont inadmissibles, lorsque t_0 est fini; le postulat P2b n'est donc pas contredit par l'expérience.

2°, a) Les mouvements μ, μ', des points P, P' en δ, sont dits *inverses* l'un à l'autre, lorsque P et P' décrivent en même temps le même arc de trajectoire, en des sens opposés l'un à l'autre, les deux mouvements étant inversement congruents en δ,

b) Un mouvement réalisable μ est dit *renversable*, lorsque son inverse μ' est aussi réalisable. On obtient, comme conséquence des postulats *P* et *Rn*:

PR. *Tout mouvement réalisable est renversable.*

Il s'ensuit que P2a et P2b peuvent se remplacer l'un l'autre, lorsque *PR* est admis comme postulat.

3°. *Indépendance des postulats P et Rn.* Cela est mis en évidence par des mouvements μ, obtenus en obligeant un point matériel *M* à effectuer successivement une suite de mouvements réalisables μ_i, ayant chacun lieu en $\delta_i = [t_i, t_{i+1}]$ et définis comme suit:

Les conditions finales de μ_{i-1} coïncident avec les conditions initiales de μ_i; chaque μ_i est uniformément accéléré en δ_i et d'accélération $\bar{a}_i$; donc μ est réalisable au sens des postulats *Rn*. Soit *S* une suite indéfinie de vecteurs parallèles $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_i, \ldots$ si l'on suppose que tous les $\bar{a}_i$ ont le même sens et que $\lim |\bar{a}_i| = \infty$, P1 est contredit; mais si les $\bar{a}_i$ changent une infinité de fois de sens, P2b est contredit. Les deux hypothèses étant indépendantes, P1 et P2b le sont aussi. Si l'on suppose, par contre, $\bar{\mu}$ rectiligne et qu'aucune de ces hypothèses ne se réalisent, *Rn*, P1, P2b sont vérifiés à la fois. Quant à P2a, il n'est satisfait que s'il n'y a en *S* qu'un nombre fini de vecteurs différents, sinon $\bar{\mu}$ n'est pas renversable; donc P2a est indépendant des postulats *Rn*, P1 et P2b.

BIBLIOGRAFIE

1. Appell et Janaud, *Remarques sur l'introduction des fonctions continues n'ayant pas de dérivée dans les éléments de la Mécanique.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 1881, t. 93, p. 1005—1008.
2. Appell P., *Traité de mécanique rationnelle.* 4e éd., Paris, t. II, p. 501, p. 90—98.
3. Brelot M., *Sur les principes mathématiques de la mécanique classique.* Annales de l'Université de Grenoble, Section sciences-médecine, 1943, t. XIX.
4. — *Sur quelques points de mécanique rationnelle.* Annales de l'Université de Grenoble, Section sciences-médecine, 1944, t. XX.
5. — *Les principes mathématiques de la mécanique classique.* Grenoble-Paris, 1945, p. 9.
6. Chazy J., *Cours de mécanique rationnelle.* 3e éd., Paris, 1947—1948, t. I, p. 60—63, p. 71—73, t. II, p. 289.
7. Froda A., *Acceleraţia în mecanica raţională.* Comunicările Acad. R.P.R., t. I, Nr. 1, Ianuarie 1951, p. 51.
8. — *Proprietăţi ale funcţiilor vectoriale şi caracterele lor.* Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţ. Ştiinţe Mat. şi Fiz., t. III, Nr. 1, Ianuarie-Februarie-Martie 1951, p. 117.
9. — *Asupra unor proprietăţi ale funcţiilor vectoriale de o variabilă reală. (Cap. I, Derivarea şi integrarea vectorilor variabili).* Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţ. Ştiinţe Mat. şi Fiz., t. III, Nr. 2, Aprilie-Mai-Iunie 1951, p. 157.
10. — *Asupra unor proprietăţi ale funcţiilor vectoriale de o variabilă reală. (Cap. II, Orientarea în spaţiu a unui vector variabil).* Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţ. Ştiinţe Mat. şi Fiz., t. III, Nr. 2, Aprilie-Mai-Iunie 1951, p. 157.
11. — *Cazuri singulare în mişcarea punctelor materiale pe anumite curbe.* Lucrările Sesiunii Generale Ştiinţifice a Academiei R.P.R. din 2—12 Iunie 1950, p. 267.
12. — *Sur l'ensemble des discontinuités de première espèce.* Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, 1928, t. 186, p. 728.
13. Hamel G., *Ueber die Grundlagen der Mechanik.* Mathematische Annalen, Bd. 66, 1909, p. 350.
14. — *Elementare Mechanik.* Leipzig, 1912, p. 6, p. 64.
15. — *Die Axiome der Mechanik.* Handbuch der Physik, Berlin, 1927, Bd. 5, p. 2.

16. Love A. E. H., *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. New-York, 1944, 4-th ed., Oxford, 1926, p. 199.
17. Painlevé P., *Les axiomes de la mécanique*. Paris, 1922, p. 54, p. 51—65.
18. Perrin J., *Evolution*. Paris, 1941, p. 13—15.
19. Planck M., *Einführung in die allgemeine Mechanik*. Leipzig, ed. a 3-a, 1921, p. 2.
20. Pöschl Th., *Der Stoss*. Handbuch der Physik, t. VI, p. 501—565, p. 554—546.
21. Sanielevici S., *Curs de mecanică raţională*. Iaşi, 1929, v. I, p. 72, p. 63—79.
22. Sommerfeld A., *Mechanik*. Leipzig, 1943, p. 4, p. 28.
23. Suslov G. C., *Teoreticescaia Mehanica*. Ed. a 3-a, Moscova, 1944, trad. română, p. 149—156.
24. Zoretti L., *Les principes de la mécanique classique*. Mémorial des sciences mathématiques, Paris, 1928, fasc. XXX, p. 16—17.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

PROBLEMA LUI CAUCHY PENTRU ECUAŢIILE CU DERIVATE PARŢIALE LINEARE POLIHIPERBOLICE NORMALE [1])

DE

I. P. ELIANU

INTRODUCERE

Metodele utilizate pentru rezolvarea problemelor la limită, în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale lineare, se bazează, în majoritatea lor, pe construcţia prealabilă a unei anumite soluţii fundamentale, care este strâns legată de noţiunea de varietate caracteristică.

In acest mod, H a d a m a r d, printr'o generalizare ingenioasă a metodelor lui Riemann, Kirchhoff şi Volterra, a reuşit să rezolve complet problema lui Cauchy pentru ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul II de tip hiperbolic normal, ecuaţii care intervin în mod frecvent în fizica matematică.

In metoda lui Hadamard, întâi se asociază ecuaţiei date un anumit spaţiu al lui Riemann, apoi se construeşte menţionata soluţie, care este numită *soluţie elementară* şi care are o singularitate convenabilă pe *conoidul caracteristic* şi în fine, se introduce o *formulă fundamentală* adecvată soluţiei elementare construită mai înainte. Această formulă fundamentală pune în evidenţă avantajele care decurg din structura analitică a soluţiei elementare, al cărei rol este de a izola valoarea soluţiei, într'un punct dat.

Acestei metode a lui Hadamard, i-au fost date extensiuni importante la ecuaţiile lineare de ordin oarecare de tip neparabolic şi la sistemele de ordinul I de către Prof. N. T e o d o r e s c u, care a considerat cazul general (unde a introdus, ca spaţiu asociat, un spaţiu al lui Finsler) şi cazul particular remarcabil când forma caracteristică este decompozabilă în doi factori, dintre care unul este o formă patratică simplă sau multiplă. In acest din urmă caz, N. T e o d o r e s c u a asociat ecuaţiei, sau sistemului studiat, tot un spaţiu al lui Riemann, ca şi în cazul ecuaţiilor de ordinul II.

De asemenea, introducând anumite varietăţi ale lui Monge pe care se găsesc bicaracteristicele, Acad. G r. C. M o i s i l a examinat şi cazul ecuaţiilor de ordin superior, de tip parabolic.

---

[1]) Această lucrare a fost prezentată ca teză de doctorat la Facultatea de Matematici şi Fizică din Bucureşti, în Iunie 1949.

Menţionăm că problema lui Cauchy pentru ecuaţiile de ordinul II hiperbolice sau pentru sistemele de ecuaţii cu derivate parţiale de ordin superior a fost studiată cu metode proprii interesante şi de matematicienii sovietici Sobolev şi Petrovschi.

Ecuaţiile pe care le studiem în această lucrare aparţin clasei de ecuaţii considerată de N. Teodorescu, forma lor caracteristică fiind o putere a unei forme patratice.

Din alt punct de vedere însă, ecuaţiile noastre, având în primul membru operatorul diferenţial linear de ordinul II, cel mai general şi iterat, dar de tip hiperbolic şi cu coeficienţi olomorfi, pot fi considerate ca extensiunea în domeniul hiperbolic a ecuaţiei verificată de funcţiunile poliarmonice. Această analogie ne-a sugerat, de altfel, ideea de a le numi *ecuaţii polihiperbolice.*

Prezenta lucrare cuprinde trei părţi: construcţia soluţiei elementare, rezolvarea efectivă a problemei lui Cauchy în *cazul polihiperbolic normal* şi aplicaţii la ecuaţii al căror spaţiu asociat este un spaţiu al lui Lorentz.

După ce am pus ecuaţia pe care o studiem sub formă invariantă, astfel ca să putem utiliza calculul tensorial în spaţiul lui Riemann asociat, am introdus, într'un mod cu totul natural, varietăţile caracteristice, împreună cu noţiunile obişnuite care se leagă de ele, şi pe deasupra, o familie de operatori diferenţiali lineari de ordinul I, al căror studiu din punctul de vedere al algebrei moderne a dat calculelor noastre rigoare şi o oarecare simplicitate formală. Am obţinut astfel, în cazul impar, o soluţie elementară algebrică bine determinată, iar în cazul par, o soluţie elementară algebrico-logaritmică, sau pur logaritmică, în care figurează, în plus, o anumită funcţiune olomorfă, în mod larg nedeterminată şi pe care am numit-o *funcţiune de corecţie.*

Pe bicaracteristice, coeficienţii care figurează în seriile ce dau soluţiile noastre elementare verifică totdeauna o ecuaţie de tipul lui Fuchs, obţinută întâi de N. Teodorescu în cazul ecuaţiilor cu derivate parţiale lineare cu caracteristice patratice duble. Primii membri ai ecuaţiilor de tip Fuchs pe care le-am obţinut noi au, în plus, proprietatea remarcabilă de a fi decompozabili în factori simbolici de ordinul I permutabili.

Am demonstrat convergenţa seriilor reprezentative, utilizând procedeul de majorare al lui Hadamard şi o extensiune, datorită lui Perron, a unei teoreme a lui Poincaré, asupra ecuaţiilor lineare cu diferenţe finite.

Diversele soluţii elementare ale ecuaţiilor cu ordine de iteraţie consecutive sunt legate între ele şi în particular cu soluţia elementară a lui Hadamard dela ecuaţiile de ordinul II, prin relaţii foarte simple, care au fost puse în evidenţă de Miron Nicolescu în cazul funcţiunilor poliarmonice elementare. Aceste relaţii şi o anumită formulă fundamentală care generalizează pe aceea a lui Gutzmer din teoria funcţiunilor poliarmonice au fost convenabil utilizate de noi în rezolvarea problemei lui Cauchy, când operatorul diferenţial care s'a iterat este de tip hiperbolic normal.

Insă, înainte de a trece la tratarea efectivă a problemei lui Cauchy, bazându-ne pe rezultatele lui Hadamard pentru ecuaţiile de ordinul II, noi am rezolvat prin recurenţă această problemă, rezolvare care a avut rolul de a pune în evidenţă cum trebue alese datele cele mai convenabile; de fapt am demonstrat astfel existenţa şi unicitatea soluţiei căutate, ceea ce nu ne-a mai obligat să efectuăm sinteza soluţiei obţinute pe cale directă, fie în cazul impar, fie în cazul par.

In cazul impar, am întrebuințat ca și H a d a m a r d și F l. B u r e a u, noțiunea de parte finită a unei integrale multiple infinite, iar în cazul par, noțiunea de parte logaritmică a unei integrale multiple infinite, noțiune introdusă de K. F r i e d e r i c h s și utilizată de asemenea de F l. B u r e a u, dar care își are originea tot în opera lui H a d a m a r d. Calculele noastre, ca și acelea ale lui Hadamard, fără utilizarea metodei coborîrii, sau mai ales ca acelea ale lui Fl. Bureau, cu metoda părții logaritmice, impun un examen separat pentru cazul a două variabile independente (cazul lui Riemann iterat).

Formulele rezolutive obținute în toate cazurile puse în evidență ne-au permis să precizăm condițiile de validitate a principiului lui Huygens, în sensul său special.

Partea finală a acestei lucrări, unde am introdus o ecuație Bessel iterată și anumite funcțiuni ale lui Bessel, conține aplicații la ecuația undelor iterată, la ecuația iterată a undelor amortizate și în mod special în cazul bihiperbolic și pentru două, trei sau patru variabile independente.

PARTEA ÎNTÂIA

SOLUȚIA ELEMENTARĂ

1. Forma invariantă a ecuației. In tot ceea ce urmează, varietățile caracteristice având un rol special și aceste varietăți fiind invariante față de orice schimbare de variabile independente, este indicat să luăm dela început ecuația pe care vrem s'o studiem tot sub formă invariantă, ceea ce va da calculelor noastre mai multă generalitate și chiar mai multă simplicitate [1]).

Să presupunem că ecuația pe care vrem s'o studiem este de forma

$$F^p u = 0, \qquad (F^2 = FF, \ldots, F^p = FF^{p-1}) \tag{1.1}$$

u fiind funcțiunea necunoscută, iar F operatorul diferențial linear de ordinul II cel mai general, a cărui expresie, cu convenția de sumare a lui Einstein, se scrie

$$F = A^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + B^i \frac{\partial}{\partial x^i} + C. \qquad (i, j = 1, \ldots, n; A^{ij} = A^{ji}) \tag{1.2}$$

Coeficienții A^{ij}, B^i, C ai operatorului F vor fi supuși numai la condiția de a fi funcțiuni olomorfe de variabilele x^i, în domeniul spațiului $E_n(x^1, \ldots, x^n)$ în care vrem să studiem ecuația.

Cu aceeași convenție de sumare, ecuația (1.1) se scrie

$$F^p u = A^{i_1 j_1} \ldots A^{i_p j_p} \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{i_1} \partial x^{j_1} \ldots \partial x^{i_p} \partial x^{j_p}} + \ldots + C^p u = 0, \tag{1.3}$$

punctele indicând termeni care conțin derivate parțiale de ordin inferior lui $2p$ și care nu este necesar să fie precizați. Expresia (1.3) procură imediat ecuația cu derivate parțiale a varietăților caracteristice, și anume

$$A^p = A^{i_1 j_1} \ldots A^{i_p j_p} \pi_{i_1} \pi_{j_1} \ldots \pi_{i_p} \pi_{j_p} = 0 \quad , \quad \text{cu } A = A^{ij} \pi_i \pi_j, \tag{1.4}$$

[1]) Rezultatele principale din această primă parte a lucrării noastre au fost rezumate în două Note din *Comptes rendus*, t. 228, 1949, p. 1095 și 1186.

$G(x^1, \ldots, x^n = 0$ fiind o astfel de varietate și unde am notat $\pi_k = \dfrac{\partial G}{\partial x^k}$. Forma caracteristică (1.4) fiind o putere a unei forme patratice în π_i, urmează că ecuația (1.1) aparține clasei de ecuații cu derivate parțiale lineare cu caracteristice patratice multiple, care a fost considerată de N. Teodorescu [26].

Pentru a pune ecuația (1.1) sub formă invariantă față de orice transformare punctuală regulată, trebue să ne dăm, cum a arătat Th. de Donder [8], o formă diferențială patratică prin ipoteza invariantă

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n;\ g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}) \tag{1.5}$$

de discriminant $g = |g_{\alpha\beta}| \neq 0$, ai cărei coeficienți $g_{\alpha\beta}$ sunt componentele covariante ale tensorului fundamental al unui anumit spațiu al lui Riemann nesingular și să înlocuim peste tot derivatele parțiale care figurează în (1.1) cu derivate covariante formate cu ajutorul metricii (1.5), astfel ca grupele de derivate parțiale să fie înlocuite prin invarianți. Pentru un motiv care va apare mai departe și care a fost pus în evidență pentru ecuațiile de ordin superior, tot de N. Teodorescu [26], [27], este indicat să alegem componentele $g_{\alpha\beta}$ egale cu minorii normalizați ai elementelor $A^{\alpha\beta}$ din discriminantul $D = |A^{\alpha\beta}|$ al formei patratice A, discriminant presupus diferit de zero în domeniul în care studiem ecuația (1.1).

Odată făcută această alegere, se știe că forma invariantă a ecuației $Fu = 0$ este după Cotton [4] și Levi-Cività [17]

$$Fu = g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\beta} u + h^\alpha \nabla_\alpha u + ku = 0, \tag{1.6}$$

unde coeficienții $g^{\alpha\beta}$, h^α, k au expresiile

$$\begin{cases} g^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \\ h^\alpha = B^\alpha - \dfrac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{|g|} \cdot g^{\alpha\beta}) = B^\alpha + g^{\beta\gamma} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}, \\ k = C \qquad \left(g = \dfrac{1}{D}\right) \end{cases} \tag{1.7}$$

și unde acum, ca și în expresia (1.5), am introdus notația din calculul tensorial care indică prin indici superiori contravarianța, prin indici inferiori, covarianța, prin simbolul ∇, derivarea covariantă în raport cu metrica (1.5) și unde acolada este simbolul lui Christoffel de a doua speță.

In această notație, în care vom utiliza în mod exclusiv indici greci pentru a indica tensori, $g^{\alpha\beta}$ sunt componentele contravariante ale tensorului fundamental; h^α, componentele contravariante ale unui vector; k și funcțiunea necunoscută u, niște invarianți.

Rezultă imediat că forma invariantă a ecuației (1.1) este

$$F^p u = 0, \tag{1.8}$$

operatorul F având de data aceasta expresia tensorială

$$F = g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha\beta} + h^{\alpha}\nabla_{\alpha} + k. \tag{1.9}$$

In virtutea lemmei lui Ricci, care ne permite să privim componentele tensorului fundamental drept constante când aplicăm derivarea covariantă, putem scrie ecuația (1.8) și sub forma

$$F^p u = g^{\alpha_1\beta_1} \ldots g^{\alpha_p\beta_p} \nabla_{\alpha_1\beta_1} \ldots \nabla_{\alpha_p\beta_p} u + \ldots + k^p u = 0,$$

sau încă

$$F^p u = \Delta^p u + \ldots + k^p u = 0, \qquad (\Delta = g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha\beta})$$

Δ fiind operatorul de ordinul II al lui Lamé-Beltrami, iar punctele indicând, ca mai sus, termeni pe care nu-i vom preciza.

Vom presupune de acum înainte că ecuația de referință este ecuația (1.8), în care operatorul F are expresia tensorială (1.9).

2. Soluții cu singularitate algebrică. Teorema lui Le Roux și Delassus. Ne propunem să determinăm o soluție a ecuației (1.8) de forma

$$u = UG^q, \tag{1.10}$$

$G = 0$ fiind o suprafață fără puncte singulare, U o funcțiune *regulată*[1]), iar q o constantă dată. Notând, pentru ușurința scrierii,

$$\nabla_{\alpha} G = \pi_{\alpha}, \quad \nabla_{\alpha\beta} G = \pi_{\alpha\beta}\,; \quad \nabla_{\alpha} U = U_{\alpha}, \quad \nabla_{\alpha\beta} U = U_{\alpha\beta}$$

vom putea scrie

$$\nabla_{\alpha}(UG^q) = qG^{q-1}U\pi_{\alpha} + G^q U_{\alpha}$$

$$\nabla_{\alpha\beta}(UG^q) = q(q-1)G^{q-2}U\pi_{\alpha}\pi_{\beta} + qG^{q-1}(U_{\alpha}\pi_{\beta} + U_{\beta}\pi_{\alpha} + U\pi_{\alpha\beta}) + G^q U_{\alpha\beta}$$

și introducând operatorul de primul ordin al lui Lamé-Beltrami

$$\Delta(\cdot, G) = g^{\alpha\beta}\pi_{\alpha}\nabla_{\beta} = g^{\alpha\beta}\pi_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}$$

vom avea

$$F(UG^q) = q(q-1)G^{q-2}AU + qG^{q-1}[2\Delta(U,G) + MU] + G^q FU, \tag{1.11}$$

unde am notat, cu Hadamard

$$M = FG - kG.$$

[1]) Sensul pe care îl vom acorda totdeauna acestei noțiuni este cel al lui Hadamard. O funcțiune regulată va fi deci continuă într'un anumit domeniu, în cazul nostru domeniul în care studiem ecuația (1.1) și va admite derivate parțiale continue în acest domeniu până la un ordin determinat.

Aplicând din nou operatorul F, vom obține

$$\left\{\begin{array}{l} F^2(UG^q) = q(q-1)(q-2)(q-3)G^{q-4}A^2U + \ldots \\ F^3(UG^q) = q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)(q-5)G^{q-6}A^3U + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^p(UG^q) = q(q-1)\ldots(q-2p+1)G^{q-2p}A^pU + \ldots \end{array}\right. \tag{1.12}$$

punctele înlocuind termeni care conțin puteri ale lui G mai mari decât cele din termenii scriși anterior.

Excluzând cazurile $q = 0,\ 1, \ldots,\ 2p-1$, primul termen din expresia lui $F^p(UG^q)$ are, în vecinătatea lui $G = 0$, un ordin de mărime superior celor ale termenilor următori, și suma nu poate fi identic nulă, sau o funcțiune regulată, decât dacă $A(\pi_1, \ldots, \pi_n) = 0$, ceea ce înseamnă că $G = 0$ trebue să fie o varietate caracteristică. Acest rezultat este în acord complet cu teorema lui Le Roux și Delassus, care afirmă că *orice suprafață singulară a unei soluții a unei ecuații cu derivate parțiale lineare și cu coeficienți regulați trebue să fie caracteristică.*

Vom avea în mod necesar

$$A(\pi_1, \ldots, \pi_n) = A_1 G, \tag{1.13}$$

A_1 fiind, chiar pentru $G = 0$, o funcțiune regulată care poate fi nulă. Inlocuind valoarea (1.13) a lui $A(\pi_1, \ldots, \pi_n)$, în relația (1.11), vom putea scrie

$$F(UG^q) = qG^{q-1}\{2\Delta(U, G) + [M + (q-1)A_1]U\} + G^q FU. \tag{1.14}$$

Să introducem acum o familie (Ω) de operatori diferențiali lineari de primul ordin, un operator oarecare Ω_i al acestei familii având expresia

$$\Omega_i = 2\Delta(\cdot, G) + (M + iA_1), \tag{1.15}$$

unde i este un număr oarecare pozitiv, negativ sau nul. Cum avem

$$\begin{aligned} \Omega_i\Omega_j = {} & 4\Delta[\Delta(\cdot, G), G] + 2[2M + (i+j)A_1]\Delta(\cdot, G) + \\ & + (M + iA_1)(M + jA_1)\cdot + 2\Delta(M, G)\cdot + 2j\Delta(A_1, G), \end{aligned}$$

doi operatori oarecare ai familiei (Ω), în virtutea ipotezei $|g^{\alpha\beta}| \neq 0$, nu sunt în general permutabili; dar ei vor avea în mod necesar această proprietate dacă $A_1 = \text{const.}$, cum va fi cazul puțin mai departe în problema care ne preocupă.

Operatorii Ω_i ne vor permite să introducem mai multă simetrie în calcule, deoarece vom putea scrie mai întâi relația (1.14) sub forma mai convenabilă

$$F(UG^q) = qG^{q-1}\Omega_{q-1}U + G^q FU. \tag{1.16}$$

Aplicând încă odată operatorul F, vom avea

$$\begin{aligned} F^2(UG^q) = {} & q[(q-1)G^{q-2}\Omega_{q-2}\Omega_{q-1}U + G^{q-1}F\Omega_{q-1}U] + \\ & + qG^{q-1}\Omega_{q-1}FU + G^qF^2U = q(q-1)G^{q-2}\Omega_{q-2}\Omega_{q-1}U + \\ & + qG^{q-1}(F\Omega_{q-1} + \Omega_{q-1}F)U + G^qF^2U. \end{aligned}$$

Vrem să arătăm că avem în general relația

$$F^p(UG^q)=A_q^pG^{q-p}\Omega_{q-p}\Omega_{q-p+1}\ldots\Omega_{q-1}U+A_q^{p-1}G^{q-p+1}\sum F\Omega_{q-p+1}\ldots\Omega_{q-1}U+$$
$$\ldots+A_q^{p-i}G^{q-p+i}\sum F^i\Omega_{q-p+i}\ldots\Omega_{q-1}U+\ldots A_q^1G^{q-1}\sum F^{p-1}\Omega_{q-1}U+G^qF^pU$$

unde am notat

$$A_r^s=r(r-1)\ldots(r-s+1),\qquad (A_r^0=1)$$

suma $\sum F^i\Omega_{q-p+i}\ldots\Omega_{q-1}(i=1,\ldots,p-1)$ conținând toate produsele simbolice distincte ce putem construi cu cei $p-i$ operatori Ω_{q-1}, $\Omega_{q-2},\ldots,$ Ω_{q-p+i}, aplicați în ordinea descrescătoare a indicilor și operatorul F, acesta din urmă figurând de i ori în fiecare produs simbolic (astfel că unul oarecare din operatorii Ω poate avea la dreapta sau la stânga sa operatorul F iterat de i ori cel mult).

In adevăr, aplicând încă odată operatorul F fiecărui termen al relației (1.17) presupusă valabilă (și verificată pentru $p=1,\ 2$), vom avea

$$F^{p+1}(UG^q)=A_q^p\left[(q-p)G^{q-p-1}\Omega_{q-p-1}\ldots\Omega_{q-1}U+G^{q-p}F\Omega_{q-p}\ldots\Omega_{q-1}U\right]+$$
$$+A_q^{p-1}\left[(q-p+1)G^{q-p}\Omega_{q-p}\sum F\Omega_{q-p+1}\ldots\Omega_{q-1}U+G^{q-p+1}F\right.$$
$$\left.\sum F\Omega_{q-p+1}\ldots\Omega_{q-1}U\right]+\ldots+A_q^{p-i}\left[(q-p+i)G^{q-p+i-1}\Omega_{q-p+i-1}\right.$$
$$\left.\sum F^i\Omega_{q-p+i}\ldots\Omega_{q-1}U+G^{q-p+i}F\sum F^i\Omega_{q-p+i}\ldots\Omega_{q-1}U\right]+\ldots$$
$$\ldots+A_q^1\left[(q-1)G^{q-2}\Omega_{q-2}\sum F^{p-1}\Omega_{q-1}U+G^{q-1}F\sum F^{p-1}\Omega_{q-1}U\right]+$$
$$+qG^{q-1}\Omega_{q-1}F^pU+G^qF^{p+1}U$$

și ținând seama de semnificația sumelor $\sum$, ceea ce permite să scriem

$$F\sum F^{i-1}\Omega_{q-p+i-1}\ldots\Omega_{q-1}+\Omega_{q-p+i-1}\sum F^i\Omega_{q-p+i}\ldots\Omega_{q-1}= \tag{1.18}$$
$$=\sum F^i\Omega_{q-p+i-1}\ldots\Omega_{q-1}(i=1,\ldots,p)$$

rezultă relația

$$F^{p+1}(UG^q)=A_q^{p+1}G^{q-p-1}\Omega_{q-p-1}\ldots\Omega_{q-1}U+A_q^pG^{q-p}\sum F\Omega_{q-p}\ldots\Omega_{q-1}U+$$
$$+\ldots+A_q^{p-i+1}G^{q-p+i-1}\sum F^i\Omega_{q-p+i-1}\ldots\Omega_{q-1}U+\ldots$$
$$\ldots+A_q^1G^{q-1}\sum F^p\Omega_{q-1}U+G^qF^{p+1}U,$$

care fiind de aceeași formă cu (1.17), urmează că aceasta este generală.

Excluzând valorile care anulează pe A_q^p, anume $q=0,\ 1,\ldots,\ p-1$, expresia $F^p(UG^q)$ nu poate fi identic nulă decât dacă pe $G=0$, avem

$$\Omega_{q-p}\Omega_{q-p+1}\ldots\Omega_{q-1}U=0, \tag{1.19}$$

sau mai explicit

$$\{2\Delta(\cdot,G)+[M+(q-p)A_1]\cdot\}\ldots\{2\Delta(\cdot,G)+[M+(q-1)A_1]\cdot\}U=0. \quad (1.20)$$

Am obținut astfel o ecuație cu derivate parțiale lineară de ordinul p, pe care trebue să o verifice U. Integrarea acestei ecuații de o formă cu totul specială se aduce ușor la integrarea a p ecuații cu derivate parțiale lineare de ordinul I și fiecare dintre acestea cere introducerea curbelor definite de ecuațiile diferențiale

$$\frac{dx^1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A}{\partial\pi_1}}=\frac{dx^2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A}{\partial\pi_2}}=\ldots=\frac{dx^n}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A}{\partial\pi_n}}=ds. \quad (1.21)$$

Deoarece numitorii ecuațiilor precedente sunt parametrii directori ai direcției transversale la $G=0$, care prin ipoteză este o varietate caracteristică, rezultă — după interpretarea dată de Coulon[5][1]) direcției transversale — că orice curbă integrală a lui (1.21) care trece printr'un punct al lui $G=0$, admițând ca tangentă în acest punct generatoarea de contact dintre planul tangent la $G=0$ și conul caracteristic al ecuației $A(\pi_1,\ldots,\pi_n)=0$, este ea însăși tangentă la $G=0$ și, prin urmare, *ea este în întregime situată pe această suprafață.*

Curbele integrale ale sistemului (1.21), numite de Hadamard, *bicaracteristice*, sunt de fapt caracteristicele ecuației $A(\pi_1,\ldots,\pi_n)=0$ și conform teoriei ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul I nelineare, se știe că ele verifică de asemenea ecuațiile diferențiale

$$\frac{d\pi_1}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A}{\partial x^1}}=\frac{d\pi_2}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A}{\partial x^2}}=\ldots=\frac{d\pi_n}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A}{\partial x^n}}=ds, \quad (1.22)$$

astfel că putem să le determinăm, fără a cunoaște ecuația $G=0$, prin integrarea sistemelor (1.21) și (1.22).

Suprafața $G=0$ apare astfel ca loc de bicaracteristice și pe fiecare din bicaracteristicele situate pe această suprafață, ecuația cu derivate parțiale (1.20) se reduce la o ecuație diferențială ordinară, pe care putem să o integrăm destul de ușor și care procură valoarea lui U, pe $G=0$.

Este clar că introducerea bicaracteristicelor este cu totul naturală, dar, ca și în cazul ordinului II ($p=1$), rolul lor se va evidenția mai bine în construcția *soluției elementare*, adică o soluție a ecuației (1.8) construită, nu cu ajutorul unei varietăți regulate $G=0$, ci cu ajutorul unei varietăți cu punct singular, astfel cum se va vedea ceva mai departe. Să reamintim însă mai întâi câteva rezultate clasice relative la bicaracteristice.

3. Conoidul caracteristic. Locul bicaracteristicelor care trec prin același punct $P(a^1,\ldots,a^n)$ este o varietate caracteristică a ecuației (1.8), care admite punctul P ca punct conic, conul caracteristic al acestui punct corespunzător ecuației $A(\pi_1,\ldots,\pi_n)=0$, fiind tangent în P la această varietate.

[1]) p. 34.

Darboux[7][1]) a considerat pentru prima dată această varietate caracteristică sub numele de *soluție cu punct singular*, însă Hadamard[15][2]) este acela care a pus în plină lumină importanța sa, în teoria integrării ecuațiilor cu derivate parțiale lineare de ordinul II, numind-o *conoidul caracteristic al punctului* P, deoarece ea este un fel de con cu generatoare curbe, care coincide cu conul caracteristic al punctului P, în cazul când coeficienții $g^{\alpha\beta}$ sunt constanți, adică dacă spațiul asociat ecuației (1.8) este euclidian.

Pentru a determina acest conoid caracteristic, urmând metoda lui Hadamard, care nu diferă în fond de cea imaginată de Coulon[5][3]) în teza sa, va trebui să integrăm sistemul canonic

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{ds} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial A}{\partial x^\alpha}, \quad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{1.23}$$

cu condițiile inițiale $x^\alpha = a^\alpha$ și $p_\alpha = p_\alpha^0$, pentru $s = 0$, iar numerele p_α^0 satisfăcând condiția

$$A(p_1^0, \ldots, p_n^0) = g^{\alpha\beta} p_\alpha^0 p_\beta^0 = 0. \tag{1.24}$$

Cu această condiție, raporturile mutuale ale numerelor p_α^0 depinzând de $n-2$ parametri, locul curbei astfel generată va fi o suprafață din spațiul E_n $(x^1, \ldots, x^n)$, conoidul caracteristic căutat. Pentru a da o formă precisă ecuației sale, necesară pentru desvoltarea calculelor noastre ulterioare, trebue să introducem geodezicele spațiului lui Riemann asociat ecuației (1.8).

4. Bicaracteristicele ca geodezice ale spațiului lui Riemann asociat. Să considerăm, cu Hadamard, toate curbele integrale ale sistemului (1.23) duse prin P, valorile inițiale p_α^0 satisfăcând sau nu condiția (1.24), adică fără să alegem dintre ele pe acelea care sunt bicaracteristice. Aceste curbe pot fi interpretate ca geodezice ale spațiului lui Riemann E_n, definit de forma metrică (1.5).

Pentru aceasta, vom utiliza o metodă bazată pe cercetările moderne din teoria spațiilor lui Riemann și care nu diferă decât formal de cea utilizată de Hadamard, dar care, din punctul de vedere invariantiv, este mai adecvată scopului nostru.

Se știe că ecuațiile diferențiale ale geodezicelor spațiului E_n pot fi scrise sub forma invariantă[10][4])

$$\frac{dx^\beta}{ds} \nabla_\beta \frac{dx^\alpha}{ds} = 0, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n) \tag{1.25}$$

s fiind arcul de geodezică și aceste ecuații admițând integrala primă

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \cdot \frac{dx^\beta}{ds} = \text{const.} \tag{1.26}$$

[1]) p. 33.
[2]) p. 102.
[3]) p. 21.
[4]) p. 51.

Punând

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{ds},$$

printr'un procedeu curent în calculul tensorial, obținem

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = g^{\alpha\beta}p_\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A}{\partial p_\alpha}.$$

De asemenea, prin transformări vizibile și ținând seamă și de ecuațiile (1.25), vom avea

$$\frac{dp_\alpha}{ds} = \left[\nabla_\gamma\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{ds}\right) + \left\{\gamma\alpha\right\} g_{\lambda\beta}\frac{dx_\lambda}{ds}\right]\frac{dx^\gamma}{ds} = [\gamma\alpha,\beta]\frac{dx^\beta}{ds}\cdot\frac{dx^\gamma}{ds} =$$

$$= \frac{1}{2}([\beta\alpha,\gamma] + [\gamma\alpha,\beta])\frac{dx^\beta}{ds}\cdot\frac{dx^\gamma}{ds} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{dx^\alpha}\cdot\frac{dx^\beta}{ds}\cdot\frac{dx^\gamma}{ds} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g^{\beta\rho}}{\partial x^\alpha}\cdot g_{\beta\gamma}g^{\gamma\sigma}\cdot p_\rho p_\sigma = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g^{\beta\rho}}{\partial x^\alpha}\delta^\sigma_\beta p_\rho p_\sigma = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A}{dx^\alpha},$$

unde croșetul este simbolul lui Christoffel de prima speță și δ^σ_β, simbolul lui Kronecker.

Cele n ecuații lagrangiene (1.25) sunt astfel transformate în cele $2n$ ecuații hamiltoniene (1.23), iar integrala primă (1.26) a ecuațiilor (1.25) va deveni

$$g_{\alpha\beta}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}p_\rho p_\sigma = \delta^\rho_\beta g^{\beta\sigma}p_\rho p_\sigma = g^{\rho\sigma}p_\rho p_\sigma = A\ (p_1,\ldots,p_n) = const, \quad (1.27)$$

care va fi o integrală primă a ecuațiilor (1.23).

Dacă în mod special considerăm geodezicele de lungime nulă ale spațiului E_n, pentru care trebue să admitem că s în ecuațiile (1.25) este un parametru, astfel că

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\cdot\frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

ele vor f integralele sistemului (1.23) care satisfac condiția $A\ (p_1,\ldots,p_n) = 0$, adică *bicaracteristicele, care apar astfel ca geodezicele de lungime nulă ale spațiului* E_n.

Necesitatea de a asocia ecuației (1.1) spațiul lui Riemann E_n, definit de metrica (1.5) rezidă tocmai în această proprietate pusă în evidență de H a d a m a r d.

Să considerăm de acum înainte în mod exclusiv geodezicele duse din punctul $P(a^1,\ldots,a^n)$ pentru care vom lua $s=0$. Una oarecare din aceste geodezice va fi determinată de valorile inițiale $p_\alpha = p^0_\alpha$, pentru $s=0$. Ecuațiile (1.23) fiind invariante când înlocuim s cu as și p_α cu $\frac{p_\alpha}{a}$ (deci p^0_α cu $\frac{p^0_\alpha}{a}$) a fiind o constantă dată, urmează că, dacă punem

$$P_\alpha = sp_\alpha,\ q_\alpha = sp^0_\alpha\quad(\alpha = 1,\ldots,n) \quad (1.28)$$

cantitățile p_α, p_α^0, s se vor prezenta numai în cele $2n$ combinații (1.28) și formulele de integrare ale sistemului (1.23) vor avea forma

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x^\alpha(q_1, \ldots, q_n ; a^1, \ldots, a^n) \\ P_\alpha &= P_\alpha(q_1, \ldots, q_n ; a^1, \ldots, a^n). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Aceste formule nu se schimbă prin permutarea lui x^α cu a^α și a lui P_α cu $-q_\alpha$, ceea ce revine la a schimba pe s cu $-s$ în sistemul canonic (1.23).

Prima serie de relații (1.29) poate fi considerată că definește o transformare punctuală (x, q) între variabilele x^α și q_α, punctul $P(a^1, \ldots, a^n)$ din spațiul variabilelor x^α corespunzând originii $q_1 = \ldots = q_n = 0$, din spațiul variabilelor q_α. Cum avem

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}$$

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial p_\alpha \partial x^\beta} \cdot \frac{dx^\beta}{ds} + \frac{\partial^2 A}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \cdot \frac{dp_\beta}{ds}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial p_\alpha \partial x^\beta} \cdot \frac{\partial A}{\partial p_\beta} - \frac{\partial^2 A}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \cdot \frac{\partial A}{\partial x^\beta}\right)$$

urmează că $\dfrac{dx_\alpha}{ds}$ este o formă lineară în p_α, $\dfrac{d^2 x^\alpha}{ds^2}$ o formă patratică în p_α și se poate arăta ușor că, în general, $\dfrac{d^m x^\alpha}{ds^m}$ este o formă de gradul m în p_α[1]).

De asemenea, în punctul P, vom avea

$$\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial A_0(p)}{\partial p_\alpha^0}$$

$$\left(\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2}\right)_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 A_0(p)}{\partial p_\alpha^0 \partial a^\beta} \cdot \frac{\partial A_0(p)}{\partial p_\beta^0} - \frac{\partial^2 A_0(p)}{\partial p_\alpha^0 \partial p_\beta^0} \cdot \frac{\partial A_0(p)}{\partial a^\beta}\right)$$

. . . . . .

unde am notat

$$A_0(p) = A(p_1^0, \ldots, p_n^0 ; a^1, \ldots, a^n) = g_0^{\alpha\beta} p_\alpha^0 p_\beta^0, \quad g_0^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}(a^1, \ldots, a^n)$$

astfel că $\left(\dfrac{dx^\alpha}{ds}\right)_0$ va fi o formă lineară în p_α^0, $\left(\dfrac{d^2 x^\alpha}{ds^2}\right)_0$ o formă patratică în p_α^0 și, în general, $\left(\dfrac{d^m x^\alpha}{ds^m}\right)_0$ o formă de gradul m în p_α^0. Produsul $s^m\left(\dfrac{d^m x^\alpha}{ds^m}\right)_0$ va fi deci o formă de gradul m și cu coeficienți constanți în q_α $(m = 1, 2, \ldots)$.

[1]) Inafară de cartea lui Hadamard [15], a se vedea pentru expunerea rezultatelor clasice din acest paragraf un memoriu fundamental al lui N. Teodorescu [28].

Aceste observări fiind făcute, desfășurarea lui x^α după puterile lui s se va scrie succesiv

$$x^\alpha = a^\alpha + \left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)_0 s + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}\right)_0 s^2 + \ldots =$$

$$= a^\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A_0(p)}{\partial p_\alpha^0}s + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^2 A_0(p)}{\partial p_\alpha^0 \partial a^\beta}\cdot\frac{\partial A_0(p)}{\partial p_\beta^0} - \frac{\partial^2 A_0(p)}{\partial p_\alpha^0 \partial p_\beta^0}\cdot\frac{\partial A_0(p)}{\partial a^\beta}\right)s^2 + \ldots \quad (1.30)$$

$$= a^\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A_0(q)}{\partial q^\alpha} + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^2 A_0(q)}{\partial q_\alpha \partial a^\beta}\cdot\frac{\partial A_0(q)}{\partial q_\beta} - \frac{\partial^2 A_0(q)}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\cdot\frac{\partial A_0(q)}{\partial a^\beta}\right) + \ldots$$

punctele indicând în ultimul membru polinoame omogene în q_α, de grade 3, 4,...

Am obținut astfel desfășurarea lui $x^\alpha - a^\alpha$ în serie uniform convergentă de polinoame omogene în q_α.

Ținând seama de (1.30), vom putea scrie

$$\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial q_\beta}\right)_0 = g_0^{\alpha\rho}\,\delta_\rho^\beta = g_0^{\alpha\beta}$$

și deci, în punctul P, jacobianul transformării (x, q) va avea expresia

$$\left(\frac{D(x^1, \ldots, x^n)}{D(q_1, \ldots, q_n)}\right)_0 = |g_0^{\alpha\beta}| \neq 0,$$

ceea ce arată că în vecinătatea lui P, transformarea (x,q) este reversibilă.

Variabilele q_α pot fi puse în relație cu coordonatele normale ale lui Riemann utilizate în geometria spațiilor riemanniene.

In adevăr, coordonatele normale ale lui Riemann, în raport cu polul P, fiind prin definiție cantitățile [2] [1])

$$\xi^\alpha = s\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)_0, \quad (1.31)$$

vom avea, după calculele de mai sus

$$\xi^\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A_0(q)}{\partial q_\alpha} = g_0^{\alpha\beta}\,q_\beta$$
$$q_\alpha = g_{\alpha\beta}^0\,\xi^\beta,\ g_{\alpha\beta}^0 = g_{\alpha\beta}(a^1, \ldots, a^n) \quad (1.32)$$

adică, între variabilele ξ^α și q_α există o substituție lineară nesingulară cu coeficienți constanți.

In sistemul de coordonate ξ^α, geodezicele duse din P vor fi reprezentate prin ecuațiile (1.31), deci vor avea aceeași formă ca ecuațiile dreptelor din spațiul euclidian. Această proprietate subsistă în cazul coordonatelor q_α.

Validitatea acestor considerații va persista atâta timp cât va fi posibil să exprimăm variabilele q_α în funcție de variabilele x^α, din prima serie de

[1]) p. 234.

relații (1.29) și conform cu ecuațiile (1.31), domeniul corespunzător va fi un anumit domeniu R în jurul lui P, conținând toate punctele $Q(x^1, \ldots, x^n)$, astfel că P fiind dat, să putem uni pe Q cu P printr'o geodezică unică.

Raționamentele de mai sus nu cer ca funcțiunile $g^{\alpha\beta}$ să fie analitice, ci numai regulate, atât cât este necesar pentru aplicarea teoremelor de existență ale ecuațiilor diferențiale. Dacă $g^{\alpha\beta}$ sunt funcțiuni olomorfe în x^α, care este tocmai ipoteza noastră inițială, variabilele x^α vor fi de asemenea funcțiuni olomorfe în q_α, în vecinătatea lui P și reciproc, variabilele q_α vor fi funcțiuni olomorfe în x^α.

5. Ecuația conoidului caracteristic. Să considerăm expresia

$$\Gamma = A(P_1, \ldots, P_n; x^1, \ldots, x^n) = A(q_1, \ldots, q_n; a^1, \ldots, a^n) \qquad (1.33)$$

unde, cu notațiile anterioare,

$$A(P_1, \ldots, P_n; x^1, \ldots, x^n) = g^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta$$

$$A(q_1, \ldots, q_n; a^1, \ldots, a^n) = A_0(q) = g_0^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta,$$

iar posibilitatea de a trece dela variabilele P_α, x^α la variabilele q_α, a^α justificându-se prin faptul că $A = \text{const.}$ pe fiecare geodezică și deci

$$A(p_1, \ldots, p_n; x^1 \ldots, x^n) = A(p_1^0, \ldots, p_n^0; a^1, \ldots, a^n).$$

Cantitatea Γ este o formă patratică în q_α cu coeficienți constanți. Exprimând variabilele q_α în funcție de x^α, Γ devine o funcțiune olomorfă în x^α, a cărei desfășurare după puterile lui $x^\alpha - a^\alpha$, într'un domeniu conținând punctul P, se scrie ținând seama de (1.30)

$$\Gamma = A_0(q) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial A_0(q)}{\partial q_\alpha} q_\alpha = \xi^\alpha q_\alpha = g^0_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta = g^0_{\alpha\beta}(x^\alpha - a^\alpha)(x^\beta - a^\beta) + \ldots \qquad (1.34)$$

și prin urmare, ea începe cu un termen omogen de gradul II în $x^\alpha - a^\alpha$, termenii omogeni următori fiind de grade III, IV,...

Din relația (1.34) rezultă că $\sqrt{\Gamma}$ este *distanța geodezică dela punctul* P *la punctul* Q, *măsurată cu metrica* (1.5). Vom putea deci scrie

$$\sqrt{\Gamma} = \int_P^Q \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \cdot \frac{dx^\beta}{ds}} \cdot ds \qquad (1.35)$$

Pe de altă parte, avem

$$\Gamma = A(P_1, \ldots, P_n; x^1, \ldots, x^n) = s^2 A(p_1, \ldots, p_n; x^1, \ldots, x^n) = s^2 g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \cdot \frac{dx^\beta}{ds}, \qquad (1.36)$$

ceea ce permite să evaluăm derivatele parțiale ale lui Γ, calculându-le în două moduri diferite cu ajutorul lui (1.35) și (1.36).

In adevăr, punctul P fiind fix și integrala (1.35) fiind luată pe un arc de geodezică, formula clasică a primei variații a unei integrale se scrie în acest caz

$$\delta \sqrt{\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\cdot\frac{dx^\beta}{ds}}} \cdot g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{ds}\,\delta x^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\cdot\frac{dx^\beta}{ds}}} p_\alpha\,\delta x^\alpha.$$

De asemenea, relația (1.36) ne dă

$$\delta \sqrt{\Gamma} = \frac{1}{2\sqrt{\Gamma}} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x^\alpha}\,\delta x^\alpha = \frac{1}{2s\sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\cdot\frac{dx^\beta}{ds}}} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x^\alpha}\,\delta x^\alpha$$

și egalând coeficienții lui δx^α din cele două expresii precedente, vom avea

$$\pi_\alpha = \frac{\partial \Gamma}{\partial x^\alpha} = 2sp_\alpha = 2P_\alpha\,. \tag{1.37}$$

Inlocuind acum această valoare a lui P_α în expresia (1.33) a lui Γ, deducem că Γ este o integrală a ecuației cu derivate parțiale

$$A\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial \Gamma}{\partial x^n}\,;\, x^1, \ldots, x^n\right) = 4\Gamma, \tag{1.38}$$

care caracterizează astfel distanțele geodezice ale spațiului E_n.

$\Gamma = 0$ *este evident ecuația conoidului caracteristic.*

Expresia lui Γ este simetrică în raport cu punctele P și Q, ceea ce este vizibil, dacă ținem seamă că trebue să permutăm P_α cu $-q_\alpha$, când schimbăm pe x^α cu a^α. Pe relația (1.34), se vede că dacă luăm drept coordonate cartesiene variabilele ξ^α, conoidul caracteristic este reprezentat printr'un con patratic ordinar de ecuație punctuală $g^0_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha\,\xi^\beta = 0$ și de ecuație tangențială $A_0(q) = 0$. Acest con va fi real, dacă forma caracteristică A este nedefinită și imaginar, dacă această formă caracteristică este definită.

N. T e o d o r e s c u [27] a demonstrat că, dacă se consideră două puncte infinit vecine din domeniul R și conoizii caracteristici corespunzători, unul dintre ei rezultă din celălalt prin transportul paralel al lui Levi-Cività care aduce vârful primului în vârful celui de al doilea.

Menționăm de asemenea faptul că, dacă s este arcul de geodezică, din relațiile

$$\frac{d}{ds} = \frac{dx^\alpha}{ds}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = g^{\alpha\beta}\,p_\beta\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

$$\Delta(\cdot, \Gamma) = g^{\alpha\beta}\,\pi_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\beta} = 2sg^{\alpha\beta}\,p_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

rezultă imediat expresia operatorului de primul ordin al lui Lamé-Beltrami

$$\Delta(\cdot, \Gamma) = 2s\frac{d}{ds}, \tag{1.39}$$

unde punctul înseamnă în $\Delta(\cdot, \Gamma)$ o funcțiune invariantă și regulată [15] [1])

6. Considerații algebrice asupra familiei de operatori (Ω). Inainte de a trece la construcț a soluției elementare, să facem câteva observări algebrice asupra familiei de operatori (Ω), în cazul special când $G = \Gamma$.

Dacă alegem ca suprafață caracteristică $G = 0$, conoidul caracteristic $\Gamma = 0$, atunci în virtutea relației (1.38) trebue să luăm $A_1 = 4$, astfel că schimbând pe G în Γ, un operator oarecare Ω_i al familiei (Ω) va avea expresia

$$\Omega_i = 2\Delta(\cdot, \Gamma) + (M + 4i). \qquad (M = F\Gamma - k\Gamma) \tag{1.40}$$

și doi operatori arbitrari Ω_i, Ω_j vor fi în acest caz permutabili. Așa cum va fi cazul în toate calculele următoare, să presupunem în plus că indicii operatorilor familiei (Ω) sunt numere raționale pozitive, negative sau zero.

Dacă acordăm noțiunii de operație semnificația precisă pe care o întâlnim în algebra modernă, de lege prin care se asociază fiecărei perechi ordonate de elemente ale unei mulțimi, un element bine determinat al acestei mulțimi [9] [2]) trebue să admitem că nici adunarea obișnuită, nici multiplicarea simbolică, nu sunt în familia (Ω) operații în sensul strict al cuvântului. In adevăr, relația imediată

$$\Omega_i + \Omega_j = 2\Omega_{\frac{i+j}{2}} \tag{1.41}$$

confirmă aserțiunea noastră pentru adunare; iar faptul că produsul $\Omega_i\,\Omega_j$ este un operator diferențial de ordinul II, o confirmă de asemenea pentru multiplicarea simbolică.

Totuși, dacă vom considera — cum ne indică relația (1.41) — în locul familiei de operatori (Ω), familia mai vastă care conține toți operatorii de forma $\nu\Omega_i$ (ν fiind un număr rațional oarecare, pozitiv sau negativ) și pe urmă vom introduce ca membru al acestei noi familii operatorul unitate E, în raport cu multiplicarea simbolică și odată cu el, toți operatorii de forma μE (μ fiind de asemenea un număr rațional oarecare pozitiv, negativ sau zero), vom obține un sistem de operatori $(\mu E, \nu\Omega)$ în care este inclusă familia (Ω) și care admite adunarea obișnuită ca operație, în virtutea relațiilor ușor de dovedit

$$\begin{cases} \alpha\Omega_i + \beta\Omega_j = (\alpha + \beta)\,\Omega_{\frac{\alpha i + \beta j}{\alpha+\beta}} & (\alpha + \beta \neq 0) \\ \Omega_i - \Omega_j = 4(i - j)\,E \\ \alpha\Omega_i + \beta E = \alpha\Omega_{i + \frac{\beta}{4\alpha}}. \end{cases} \tag{1.42}$$

Această operație a sistemului $(\mu E, \nu\Omega)$ este de altfel asociativă și comutativă.

[1]) p. 137.
[2]) p. 27.

Cum printre operatorii μE, $\nu \Omega_i$ există de asemenea operatorul nul (obținut pentru $\mu = 0$) și cu operatorii $a E$, $b \Omega_i$, opușii lor $-a E$, $-b \Omega_i$, deducem că sistemul $(\mu E, \nu\Omega)$ este un grup abelian aditiv, adică un *modul.*

Relațiile (1.42) pot să capete și o altă interpretare. De exemplu, prima dintre aceste relații arată că putem reprezenta și într'un singur mod orice operator din familia (Ω), ca funcțiune lineară de doi oarecare ai aceleiași familii Ω_i, Ω_j, luați drept operatori de bază; ultima dintre relații, care nu diferă de fapt de a doua, arată de asemenea că putem face această reprezentare unică cu ajutorul unui operator oarecare Ω_i și a operatorului unitate E. Această proprietate de reprezentare unică rămâne valabilă pentru orice element al modulului $(\mu E, \nu\Omega)$ și în toate cazurile, coeficienții operatorilor de bază sunt numere raționale.

Celelalte condiții pentru a deduce concluzia din observările de mai sus fiind vizibil îndeplinite[1]), rezultă că *modulul* $(\mu E, \nu\Omega)$ *este un spațiu vectorial cu două dimensiuni, construit pe corpul numerelor raționale, iar familia de operatori diferențiali* (Ω) *este inclusă în acest spațiu vectorial.*

Dacă presupunem acum că am luat în spațiul vectorial $(\mu E, \nu\Omega)$ ca operatori de bază, operatorul unitate E și un alt operator oarecare, de exemplu Ω_0, orice produs simbolic $\Omega_{i_1} \ldots \Omega_{i_s}$ va fi, după ce am făcut înlocuirile, un polinom simbolic de ordinul s în Ω_0, pe corpul numerelor raționale. In mulțimea polinoamelor simbolice de diferite ordine, multiplicarea va fi, evident ca și adunarea obișnuită, o operație asociativă, comutativă, și în plus distributivă față de adunare. Cum coeficienții tuturor acestor polinoame, aparțin unui corp, după o teoremă cunoscută, *mulțimea acestor polinoame simbolice va fi un inel euclidian* $R[\Omega_0]$.

Un inel euclidian neadmițând divizori ai lui zero, rezultă că produsul $\Omega_{i_1} \ldots \Omega_{i_s}$ nu poate fi nul, decât dacă unul din factori este nul. De asemenea, dacă un polinom simbolic din $R[\Omega_0]$ și de ordinul $r \geqslant s$ este divizibil prin mai mulți operatori $\Omega_{i_1} \ldots \Omega_{i_s}$, el va fi divizibil și cu produsul lor simbolic.

Ar fi poate interesant să se facă un studiu algebric aprofundat al familiei de operatori (Ω), dar pentru ușurința și rigoarea calculelor ce vor urma, aceste observări simple sunt suficiente.

7. Soluția elementară în cazul unui număr impar de variabile independente. Aceste preliminare fiind făcute, să abordăm acum chestiunea principală, aceea de a determina în cazul $n = 2m + 1$, o soluție elementară a ecuației (1.8), adică o *soluție algebrică* de forma

$$u = U\Gamma^q, \tag{1.43}$$

unde Γ este primul membru al ecuației conoidului caracteristic cu vârful în $P(a^1, \ldots, a^n)$, punctul $Q(x^1, \ldots, x^n)$ fiind variabil. Unind în acest scop punctul Q cu P printr'o geodezică, vom scrie ecuația (1.17) de-a-lungul acestei curbe și pe urmă, făcând să varieze punctul Q, vom determina soluția (1.43) într'o porțiune a lui R.

[1]) A se vedea pentru specificarea acestor condiții, Van der Waerden [29], Bd. I, p. 46.

Dacă scriem Γ, în loc de G, în relația (1.17), ea devine

$$F^p(U\Gamma^q) = A_q^p \Gamma^{q-p} \Omega_{q-p} \dots \Omega_{q-1} U + A_q^{p-1} \Gamma^{q-p+1} \sum F \Omega_{q-p+1} \dots \Omega_{q-1} U + \dots \tag{1.44}$$

$$\dots + A_q^{p-i} \Gamma^{q-p+i} \sum F^i \Omega_{q-p+i} \dots \Omega_{q-1} U + \dots + A_q^1 \Gamma^{q-1} \sum F^{p-1} \Omega_{q-1} U + \Gamma^q F^p U,$$

operatorii Ω_i având de data aceasta expresia (1.40).

Cu toate că relația (1.44) are o expresie destul de simplă, este comod totuși să introducem încă o nouă notație, pe care o vom utiliza totdeauna în ceea ce urmează și care va aduce o mai mare simplicitate formală în calcule. Vom spune

$$\begin{aligned} &E_{i,j} = \Omega_{j-i} \dots \Omega_{j-2}\, \Omega_{j-1} && (E_{o,j} = E = 1.) \\ &\Phi_{i,j}^k = \sum F^k \Omega_{j-i+k} \dots \Omega_{j-2}\, \Omega_{j-1} && (\Phi_{i,j}^0 = E_{i,j}\,; \Phi_{i,j}^i = F^i) \end{aligned} \tag{1.45}$$

ceea ce permite să scriem relația (1.44) sub forma condensată

$$F^p(U\Gamma^q) = \sum_{i=0}^{p} A_q^{p-i} \Gamma^{q-p+i} \Phi_{p,q}^i U \qquad (A_q^0 = 1\,; \Phi_{p,q}^0 = E_{p,q}) \tag{1.46}$$

In ipoteza $n = 2m+1$, anulând coeficientul lui Γ^{q-p} după excluderea cazurilor $q = 0,1,\dots,p-1$, trebue să avem pe $\Gamma = 0$

$$E_{p,q} U = \left\{ 2\Delta(.,\Gamma) + [M + 4(q-p)]. \right\} \dots \left\{ 2\Delta(.,\Gamma) + [M + 4(q-1)]. \right\} U = 0. \tag{1.47}$$

Conform relației (1.39), această ecuație cu derivatele parțiale se scrie încă pe bicaracteristice

$$E_{p,q} U = \left\{ 4s \frac{d}{ds} + [M + 4(q-p)]. \right\} \dots \left\{ 4s \frac{d}{ds} + [M + 4(q-1)]. \right\} U = 0, \tag{1.48}$$

care este o ecuație diferențială lineară de ordinul p și de tipul lui Fuchs, cum este ușor de văzut [1]). Această ecuație aparține clasei de ecuații diferențiale lineare decompozabile în factori simbolici de primul ordin permutabili, studiată de G. Floquet în teza sa [11]. Forma sa specială prezintă avantaje apreciabile.

In primul rând, pentru a scrie ecuația sa determinantă, reamintim că aceasta se obține făcând $U = s^r$ și anulând apoi coeficientul lui s^r din expresia lui $E_{p,q} U$. Pentru aceasta, trebue să cunoaștem termenul independent de s în desfășurarea lui M după puterile lui s. Cum avem

$$M = g^{\alpha\beta} \left[\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x\, \partial x^\beta} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\ \ \beta \end{matrix} \right\} \frac{\partial \Gamma}{\partial x^\lambda} \right] + h^\alpha \frac{\partial \Gamma}{\partial x^\alpha} = 2 g_0^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^0 + \dots = 2n + \dots$$

[1]) N. Teodorescu a obținut de asemenea, în cazul caracteristicelor patratice duble, o ecuație de tip Fuchs de ordinul II, pentru a determina pe U_0 [26].

punctele însemnând termeni care conţin puteri ale lui s, rezultă imediat că ecuaţia determinantă a lui (1.48) este în afara unui factor numeric

$$e_{p,q}(r) = \left(r + \frac{n}{2} + q - p\right) \dots \left(r + \frac{n}{2} + q - 1\right) = 0, \qquad (1.49)$$

ale cărei rădăcini sunt

$$r_i = -\frac{n}{2} - q + i. \qquad (i = 1, 2, \dots, p)$$

Diferenţa a două oarecare din aceste rădăcini fiind un număr întreg, este sigur că cel puţin integrala ecuaţiei (1.48) corespunzătoare rădăcinii celei mai mari, $r_p = -\frac{n}{2} - q + p$, nu va conţine termen logaritmic. Cum avem nevoie de o integrală particulară a ecuaţiei (1.48) finită şi regulată în origine, trebue ca r_p să fie un număr întreg pozitiv sau nul. Vom lua $r_p = 0$, adică $q = -\frac{n}{2} + p$. Această valoare a lui q odată aleasă, funcţiunea U va fi diferită de zero, pentru $s = 0$; vom lua de asemenea $U = 1$ pentru $s = 0$.

Pentru a determina valoarea lui U, pe $\Gamma = 0$, vom scrie

$$E_{p,q}U = 4s\frac{d}{ds}E_{p-1,q}U + [M + 4(q - p)]E_{p-1,q}U = 0$$

ceea ce dă

$$E_{p-1,q}U = C_0 e^{-\int \frac{1}{s}\left(\frac{M}{4} + q - p\right) ds}.$$

Pe urmă, putem de asemenea scrie

$$E_{p-1,q}U = 4s\frac{d}{ds}E_{p-2,q}U + [M + 4(q - p + 1)]E_{p-2,q}U = C_0 e^{-\int \frac{1}{s}\left(\frac{M}{4} + q - p\right) ds}$$

care procură integrala

$$E_{p-2,q}U = \left(\frac{C_0}{4} + \frac{C_1}{s}\right) e^{-\int \frac{1}{s}\left(\frac{M}{4} + q - p\right) ds}$$

şi continuând astfel, găsim

$$U = \left(\frac{C_0}{4^{p-1}(p-1)!} + \frac{C_1}{4^{p-2}(p-2)!\,s} + \dots + \frac{C_{p-2}}{4s^{p-2}} + \frac{C_{p-1}}{s^{p-1}}\right) e^{-\int \frac{1}{s}\left(\frac{M}{4} + q - p\right) ds} \qquad (1.50)$$

$C_0, C_1, \dots, C_{p-1}$, fiind constante arbitrare. Dat fiind că am ales $q = -\frac{n}{2} + p$, pentru a obţine integrala regulată în origine, care se reduce

la unitate pentru $s = 0$, trebue să luăm în (1.50) $C_1 = C_2 = \ldots = C_{p-1} = 0$ și $C_0 = 4^{p-1}(p-1)!$, limitele integralei fiind 0 și s. Integrala căutată, pe care o vom nota cu U_0, va avea deci expresia

$$U_0 = e^{-\int_0^s \frac{1}{s}\left(\frac{M}{4}+q-p\right) ds} \tag{1.51}$$

Aceasta revine evident la a lua pe U_0 egală cu integrala ecuației diferențiale

$$\Omega_{q-p} U = 4s \frac{dU}{ds} + [M + 4(q-p)] U = 0 \tag{1.52}$$

care se reduce la unitate pentru $s = 0$. Rezultatul acesta era de altfel de prevăzut, fiindcă în virtutea unor observări algebrice anterioare, pentru ca să avem $E_{p,q} U = 0$ este necesar și suficient să avem și $\Omega_{q-i} U = 0$ ($i = 1,2,\ldots$, sau p), ceea ce permite să obținem imediat un sistem fundamental de integrale vizibile, anume cel format de integralele ecuațiilor $\Omega_{q-1} U = 0$, $\Omega_{q-2} U = 0, \ldots, \Omega_{q-p} U = 0$ și pe urmă să excludem integralele ecuațiilor $\Omega_{q-1} U = 0$, $\Omega_{q-2} U = 0, \ldots, \Omega_{q-p+1} U = 0$ ca neregulate în origine și să păstrăm numai integrala U_0 a ecuației $\Omega_{q-p} U = 0$, singura care convine condițiilor impuse.

Vom pleca dela funcțiunea U_0, presupusă egală cu expresia (1.51) nu numai pe conoidul $\Gamma = 0$, ci în tot spațiul sau cel puțin în domeniul R în care Γ este definit. Cu această precizare, funcțiunea U_0 va fi olomorfă în raport cu s, în vecinătatea lui $s = 0$ și prin urmare, utilizând variabilele q_α, ea va fi de asemenea olomorfă în raport cu variabilele x^α, în vecinătatea lui P.

Dacă U_1 este o altă funcțiune regulată, vom avea în mod necesar

$$U = U_0 + U_1 \Gamma, \tag{1.53}$$

astfel că, înlocuind pe U cu această expresie în relația (1.46) și anulând coeficientul lui Γ^{q-p+1}, vom avea pe $\Gamma = 0$

$$E_{p,q+1} U_1 + \frac{\Phi^1_{p,q} U_0}{q+1} = 0, \tag{1.54}$$

care pe bicaracteristice este tot o ecuație diferențială lineară de ordinul p și de tipul lui Fuchs, dar neomogenă. Ecuația fără partea a doua, obținându-se din ecuația (1.48) schimbând pur și simplu pe q în $q+1$, rădăcinile ecuației sale determinante vor fi $r_i = -\frac{n}{2} - q + i - 1$ ($i = 1,\ldots,p$) și cum am ales $q = -\frac{n}{2} + p$, toate aceste rădăcini vor fi negative. Prin urmare, ecuația fără partea a doua asociată lui (1.54) nu admite integrale regulate în origine, înafară de soluția nulă. Cum avem nevoie de o integrală a ecuației (1.54), finită pentru $s = 0$, va trebui să luăm ca soluție a acestei ecuații integrala care nu conține combinații lineare de integrale particulare ale ecuației fără partea a doua.

Ţinând seamă acum de ecuaţia (1.52) pe care o verifică U_0, putem arăta uşor că avem

$$\frac{E_{p,q+1}U_1}{U_0} = 4\frac{d}{ds}\left(s\frac{E_{p-1,q+1}U_1}{U_0}\right) = 4^2\frac{d^2}{ds^2}\left(s^2\frac{E_{p-2,q+1}U_1}{U_0}\right) = \ldots 4^p\frac{d^p}{ds^p}\left(\frac{s^pU_1}{U_0}\right)$$

ceea ce permite să scriem ecuaţia (1.54) sub forma simplă

$$4^p\frac{s^p}{ds^p}\left(s^p\frac{U_1}{U_0}\right) + \frac{1}{q+1}\cdot\frac{\Phi^1_{p,q}U_0}{U_0} = 0. \tag{1.55}$$

Integrând această ecuaţie prin p cuadraturi şi luând, după observarea de mai sus, toate constantele de integrare nule, vom obţine singura integrală regulată în origine

$$U_1 = -\frac{1}{4^p(q+1)}\cdot\frac{U_0}{s^p}\int_0^s\ldots\int_0^s\frac{\Phi^1_{p,q}U_0}{U_0}ds\ldots ds, \tag{1.56}$$

punctele indicând că trebue să integrăm de p ori în raport cu s.

Presupunând că U_1 are expresia (1.56) nu numai pe $\Gamma = 0$, ci în tot spaţiul sau cel puţin în domeniul R, în care Γ este definit, se vede uşor, cu ajutorul variabilelor q_α că U_1 va fi ca şi U_0 o funcţiune olomorfă în x^α, în vecinătatea lui P. (U_0 neanulându-se pentru nicio valoare a lui s).

Restul calculului este clar şi poate fi redat riguros prin recurenţă.

Vom încerca, în general, o soluţie de forma

$$U = U_0 + U_1\Gamma + \ldots + U_h\Gamma^h, \tag{1.57}$$

coeficienţii U_h succesivi fiind funcţiuni regulate şi verificând ecuaţia

$$E_{p,q+h}U_p + \sum_{i=1}^{p}\frac{\Phi^i_{p,q+h-i}U_{h-i}}{(q+h)(q+h-1)\ldots(q+h-i+1)} = 0, \tag{1.58}$$

care se obţine anulând coeficientul lui Γ^{q-p+h} în expresia lui $F^p(U\Gamma^q)$ după ce am presupus că $U_1, U_2, \ldots, U_{h-1}$ verifică aceeaşi ecuaţie în care h ia succesiv valorile $1, 2, \ldots, h-1$, că U_0 satisface ecuaţia (1.47) şi cu convenţia suplimentară de a lua $U_j = 0$, pentru $j < 0$ (ceea ce se întâmplă dacă $h < p$). Această ultimă convenţie va fi totdeauna admisă în calculele noastre.

Pe bicaracteristice, ecuaţia (1.58) este de asemenea o ecuaţie diferenţială de ordinul p, de tipul lui Fuchs şi neomogenă, care, considerată fără partea a doua, are o ecuaţie determinantă cu toate rădăcinile negative, astfel că observarea făcută relativ la ecuaţia (1.54) subsistă şi pentru această ecuaţie. Mai mult încă, integrarea ecuaţiei (1.58) se face în acelaşi mod ca aceea a ecuaţiei (1.54), deoarece putem proba fără dificultate că avem

$$s^{h-1}\frac{E_{p,q+h}U_h}{U_0} = 4\frac{d}{ds}\left(s^h\frac{E_{p-1,q+h}U_h}{U_0}\right) = 4^2\frac{d^2}{ds^2}\left(s^{h-1}\frac{E_{p-2,q+h}U_h}{U_0}\right) = \ldots$$

$$\ldots = 4\frac{d^p}{ds^p}\left(s^{p+h-1}\frac{U_h}{U_0}\right)$$

ceea ce permite să scriem ecuația (1.58) sub forma

$$4^p \frac{d^p}{ds^p}\left(s^{p+h-1}\frac{U_h}{U_0}\right) + \frac{s^{h-1}}{U_0}\sum_{i=1}^{p}\frac{\Phi^i_{p,q+h-i}\,U_{h-i}}{(q+h)(q+h-1)\ldots(q+h-i+1)} = 0. \quad (1.59)$$

Obținem astfel singura integrală regulată în origine, anume

$$U_h = -\frac{U_0}{4^p\, s^{p+h-1}}\int_0^s \ldots \int_0^s \frac{s^{h-1}}{U_0}\sum_{i=1}^{p}\frac{\Phi^i_{p,q+h-i}\,U_{h-i}}{(q+h)(q+h-1)\ldots(q+h-i+1)}\,ds\ldots ds, \quad (1.60)$$

punctele indicând, ca mai sus, că trebue să integrăm de p ori în raport cu s.

Presupunând că funcțiunea U_h are expresia (1.60), nu numai pe $\Gamma = 0$, ci cel puțin în domeniul R în care Γ este definit, se arată totdeauna cu ajutorul variabilelor q_α că ea este o funcțiune olomorfă în x^α, în vecinătatea lui P, deoarece $U_0, U_1, \ldots, U_{h-1}$ sunt de asemenea olomorfe.

Dacă $n = 2m + 1$, ceea ce am presupus dela început, numerele $q + h - p + 1. \ldots, q + h$, nu sunt nule și coeficienții U_h dați de formula (1.60) vor exista în mod efectiv.

Continuând indefinit procedeul de iterație întrebuințat, vom obține ca soluție elementară funcțiunea (1.43), expresia lui U fiind seria:

$$U = U_0 + U_1\,\Gamma + \ldots + U_h\,\Gamma^h + \ldots \quad (1.61)$$

care trebue să probăm că este convergentă.

8. Convergența seriei reprezentative. Pentru a demonstra convergența seriei (1.61), vom utiliza un procedeu de majorare asemănător cu acela al lui Hadamard din cazul $p = 1$. In acest scop, vom face două observări care ne permit să simplificăm calculele.

Este clar întâi, dat fiind că ecuațiile care determină funcțiunile U_h sunt scrise sub formă invariantă că aceste funcțiuni își vor păstra valorilor lor după o schimbare de variabile independente; cum această schimbare nu schimbă geodezicele și deci nici pe Γ, rezultă că soluția elementară își va păstra de asemenea valoarea sa. Această observare ne va permite să alegem ca variabile independente pe acelea care vor fi cele mai convenabile pentru atingerea scopului nostru.

Pe de altă parte, dacă asociem ecuației $Fu = 0$, ecuația

$$F_1 u = \frac{1}{H}F(Hu) = 0, \quad (1.62)$$

H fiind o funcțiune invariantă, olomorfă în raport cu x^α, un calcul simplu dă pentru valoarea lui M, corespunzătoare ecuației (1.62), expresia [15] [1])

$$M_1 = M + \frac{2}{H}\Delta(H, \Gamma) = M + \frac{4s}{H}\cdot\frac{dH}{ds}\cdot \quad (1.63)$$

Iterând de p ori, vom asocia ecuației $F^p u = 0$, ecuația

$$F_1^p u = \frac{1}{H}F'(Hu) = 0, \quad (1.64)$$

[1]) p. 365.

pentru care, ca și în ecuația (1.62), coeficienții $g^{\alpha\beta}$ și deci Γ, nu-și schimbă valoarea.

Este vizibil că orice soluție a lui $F_1^p u = 0$ se deduce din soluția corespunzătoare a ecuației $F^p u = 0$, împărțind cu H (abstracție făcând de un factor constant) și că această relație subsistă pentru soluțiile elementare și pentru termenii U_h corespunzători. De exemplu, pentru U_0, ținând seamă de expresia sa (1.51), se găsește ușor că noua sa valoare se obține din aceea corespunzătoare ecuației $F^p u = 0$, înmulțind aceasta prin factorul $\frac{H_0}{H}$, H_0 fiind valoarea lui H în P. De asemenea, printr'un calcul simplu și în virtutea relației (1.63), noua valoare a lui $\Omega_i U_0$ se obține multiplicând $\Omega_i U_0$ tot prin factorul $\frac{H_0}{H}$ și această relație subsistă evident pentru noua valoare a lui FU_0, conform cu (1.62). Urmează deci, în baza formulei (1.56), că noua valoare a lui U_1 se obține din valoarea sa corespunzătoare ecuației $F^p u = 0$, multiplicând aceasta tot cu $\frac{H_0}{H}$ și apoi, din aproape în aproape, în virtutea formulei (1.60), se arată că această relație rămâne valabilă pentru toți termenii U_h, ceea ce este tocmai aserțiunea noastră.

Dacă luăm $H = U_0$, funcțiunea U_0 fiind determinată după cum s'a văzut, noua valoare a acestei funcțiuni se va reduce la unitate, iar noua valoare a lui M va fi

$$M_1 = 4(p - q), \tag{1.65}$$

astfel că noile expresii ale termenilor succesivi U_h vor fi în acest caz mult mai simple.

In virtutea observărilor de mai sus, putem presupune că, dacă plecăm dela ecuația (1.8), termenul U_0 este egal cu unitatea, iar M are valoarea (1.65). Să admitem de asemenea că am luat drept variabile independente, variabilele normale ale lui Riemann față de polul P și fie σ suma valorilor absolute ale acestor variabile. Pe o geodezică oarecare, conform relațiilor (1.28) și (1.32), σ este proporțional cu s.

Fiecare din coeficienții oloformi $g^{\alpha\beta}$, h^α și k va admite majoranta

$$\frac{\alpha}{1 - \frac{\sigma}{\rho}}, \qquad \left(\frac{\sigma}{\rho} < 1\right)$$

α și ρ fiind constante pozitive convenabil alese. Utilizând semnul de majorare al lui Poincaré, să presupunem că avem

$$\varphi \ll \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^\nu}, \qquad (\nu \geqslant 1) \tag{1.66}$$

λ fiind o constantă pozitivă, ν o altă constantă și φ o funcțiune invariantă.

Cum coordonatele normale sunt geodezice în punctul P și deci simbolurile lui Christoffel sunt nule în P, deci de ordinul lui σ, substituind funcțiunilor

majorantele lor și ținând seamă de numărul de termeni din fiecare produs contractat, vom avea de asemenea

$$F v \ll \frac{\lambda \alpha \nu (\nu+1)}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+3}}\left[\frac{n^2}{\rho^2}+\frac{n^3\alpha}{\nu+1}\cdot\frac{\sigma}{\rho}+\frac{n}{\rho(\nu+1)}\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)+\right. \tag{1.67}$$

$$\left.+\frac{1}{\nu(\nu+1)}\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^2\right] \ll \frac{\lambda \alpha' \nu (\nu+1)}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+3}}, \quad \alpha' = \alpha\left(1+\frac{n}{\rho}+\frac{n^2}{\rho^2}+n^3\alpha\right).$$

Derivatele prime ale lui Γ fiind de ordinul lui σ, dacă α a fost ales suficient de mare, vom putea scrie

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi^\alpha} \ll \frac{\alpha\sigma}{1-\frac{\sigma}{\rho}},$$

astfel că vom avea pentru $j > 0$ și în virtutea relației (1.65)

$$\Omega_{q+h-j}\, v \ll \frac{2\lambda}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+3}}\left[\alpha^2 n^2 \nu \frac{\sigma}{\rho}+2(p+h-j)\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^3\right] \ll \tag{1.68}$$

$$\ll \frac{2\lambda}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+3}}\left[\alpha^2 n^2 \nu + 2(p+h-j)\right] \ll \frac{4\lambda(\alpha'' \nu + p + h)}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+3}}\cdot\left(\alpha'' = \frac{1}{2}\alpha^2 n^2\right).$$

Pentru a găsi acum o majorantă a funcțiunii

$$\Phi^i_{p,q+h-i}\, v = \sum F^i \Omega_{q+h-p}\, \Omega_{q+h-p+1} \ldots \Omega_{q+h-i-1}\, v, \; (1 \leqslant i \leqslant p)$$

să determinăm întâi numărul termenilor săi. Prin definiție, $\Phi^i_{p,q+h-i}$ conține toți termenii distincți ce putem forma cu operatorul F repetat de i ori și cu cei $p-i$ operatori Ω_{q+h-p}, $\Omega_{q+h-p+1}$, ..., $\Omega_{q+h-i+1}$ aranjați într'o anumită ordine (în cazul nostru, ordinea crescătoare a indicilor lor), astfel că fiecare din operatorii Ω poate să aibă la dreapta sau la stânga sa operatorul F iterat de i ori, cel mult.

Să presupunem că am făcut toate permutările posibile cu operatorii Ω și că am construit, cu fiecare permutare obținută, suma Φ corespunzătoare, ordinea operatorilor Ω fiind în fiecare termen aceea din permutarea respectivă. Toate sumele Φ astfel construite vor conține în total $\frac{p!}{i!}$ termeni (numărul permutărilor de p obiecte, un singur obiect fiind repetat de i ori) și fiecare din ele va conține, evident, același număr de termeni. Cum obținem astfel $(p-i)!$ sume Φ, rezultă că fiecare dintre ele, prin urmare și $\Phi^i_{p,q+h-i}$; va conține $C^i_p = \frac{p!}{i!(p-i)!}$ termeni.

Să ne ocupăm acum de un termen oarecare din suma $\Phi^i_{p,q+h-i}\,\varphi$ în care nu vom specifica modul cum intervine operatorul F printre operatorii Ω. In baza relațiilor (1.66), (1.67) și (1.68), este clar că dacă aplicăm lui φ succesiv μ operatori, unii dintre ei fiind F, ceilalți operatori Ω, rezultatul va fi o funcțiune w, astfel că

$$w \ll \frac{\gamma}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+3\mu}}, \qquad (1 \leqslant \mu \leqslant p)$$

γ fiind un anumit număr. Aplicând încă odată operatorul F sau Ω_{q+h-j}, vom avea de asemenea

$$Fw \ll \frac{\gamma\alpha'(\nu+3\mu)(\nu+3\mu+1)}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+3(\mu+1)}} \ll \frac{\gamma\alpha'(\nu+3p)^2}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+3(\mu+1)}}$$

$$\Omega_{q+h-j}\,w \ll \frac{4\gamma[\alpha''(\nu+3\mu)+p+h]}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+3(\mu+1)}} \ll \frac{4\gamma[\alpha''(\nu+3p)+p+h]}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+3(\mu+1)}}$$

astfel că sus menționatul termen fiind ales într'un mod arbitrar, vom putea scrie, sintetizând toate observările

$$\Phi^i_{p,q+h-i}\,\varphi \ll \frac{\lambda C^i_p\, 4^{p-i}\,\alpha'^i(\nu+3p)^{2i}[\alpha''(\nu+3p)+p+h]^{p-i}}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\nu+3p}}. \qquad (1.69)$$

Să arătăm acum că avem

$$U_h \ll \frac{\lambda_h}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{2ph}}, \qquad (1.70)$$

λ_h fiind un anumit număr pozitiv, a cărui valoare o vom preciza mai departe (în afara unui factor). Evident, validitatea relației (1.70) este sigură, dat fiind că termenii U_h sunt funcțiuni olomorfe în vecinătatea lui $s=0$, dar vrem să arătăm că putem alege pentru numerele λ_h valori extrem de convenabile.

Pentru aceasta, să demonstrăm că dacă relația (1.70) este valabilă pentru $U_h, U_{h-1}, \ldots, U_{h-p+1}$, ea este de asemenea valabilă pentru U_{h+1}, numărul λ_{h+1} putând să fie ales într'un mod precis. Intr'adevăr, deoarece $U_0 = 1$, putem scrie după formulele (1.60) și (1.69)

$$U_{h+1} \ll \sum_{i=1}^{p}\gamma_i(h)\,\lambda_{h-i+1}\cdot\frac{1}{s^{p+h}}\int_0^s\cdots\int_0^s\frac{s^h\,ds\ldots ds}{\left(1-\frac{\sigma}{\rho}\right)^{p(2h+3)}} \qquad (1.71)$$

$\gamma_i(h)$ având expresia

$$\gamma_i(h) = \frac{C_p^i \alpha'^i p^{2i} (2h+3)^{2i} [p\alpha''(2h+3) + p + h + 1]^{p-i}}{4^i (q+h+1)(q+h)\dots(q+h-i+2)}, \quad (i = 1, \dots, p)$$

și relația (1.71) fiind presupusă valabilă dela o anumită valoare suficient de mare a lui h (ceea ce permite să considerăm factorii dela numitorul lui $\gamma_i(h)$ ca pozitivi).

Cum σ este proporțional cu s pe fiecare geodezică, vom avea

$$\frac{1}{s^{p+h}} \int_0^s \dots \int_0^s \frac{s^h \, ds \dots ds}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right) p^{(2h+3)}} = \frac{1}{\sigma^{p+h}} \int_0^\sigma \dots \int_0^\sigma \frac{\sigma^h \, d\sigma \dots d\sigma}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right) p^{(2h+3)}}$$

Pe de altă parte, dacă $l > m > 0$, putem scrie

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{d}{d\sigma} \left[\frac{\sigma^m}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^l} \right] = \frac{\sigma^{m-1}}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{l+1}} \left[1 + \left(\frac{l}{m} - 1 \right) \frac{\sigma}{\rho} \right] \gg \frac{\sigma^{m-1}}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{l+1}}, \quad (1.72)$$

ceea ce dă, pentru $m = p + h$ și $l = 2p(h+1)$

$$\frac{1}{h+p} \cdot \frac{d}{d\sigma} \left[\frac{\sigma^{p+h}}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{2p(h+1)}} \right] \gg \frac{\sigma^{p+h-1}}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{2p(h+1)+1}}.$$

Aplicând funcției majorate relația (1.72) și continuând astfel de $p-1$ ori, obținem la sfârșit

$$\frac{1}{(h+p)(h+p-1)\dots(h+1)} \cdot \frac{d^p}{d\sigma^p} \left[\frac{\sigma^{p+h}}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{2p(h+1)}} \right] \gg \frac{\sigma^h}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{p(2h+3)}}$$

Vom putea deci scrie

$$\frac{1}{\sigma^{p+h}} \int_0^\sigma \dots \int_0^\sigma \frac{\sigma^h}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{p(2h+3)}} d\sigma \dots d\sigma \ll \frac{1}{(h+1)(h+2)\dots(h+p)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{p(2h+3)}}$$

și înlocuind în (1.71), vom obține relația de aceeași formă cu (1.70)

$$U_{h+1} \ll \frac{\lambda_{h+1}}{\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{p(2h+3)}}, \quad (1.73)$$

unde numărul λ_{h+1} are expresia

$$\lambda_{h+1} = \omega_1(h)\lambda_h + \omega_2(h)\lambda_{h-1} + \dots + \omega_p(h)\lambda_{h-p+1}, \quad (1.74)$$

iar $\omega_i(h)$ se scrie în general

$$\omega_i(h) = \frac{\gamma_i(h)}{(h+1)(h+2)\dots(h+p)}. \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

Relația de recurență (1.74) este o ecuație liniară cu diferențe finite de tipul lui Poincaré, a cărei ecuație caracteristică are o singură variație și care se scrie

$$\xi^p - \sum_{i=1}^{p} C_p^i \alpha'^i p^{2i} (2p\alpha'' + 1)^{p-i} \xi^{p-i} = 0. \tag{1.75}$$

Făcând transformarea

$$\omega\xi = \alpha' p^2 \zeta, \quad (\omega = 2p\alpha'' + 1)$$

această ecuație caracteristică devine

$$\zeta^p - \omega^p[(\zeta + 1)^p - \zeta^p] = \zeta^p(\omega^p + 1) - \omega^p(\zeta + 1)^p = 0,$$

care are rădăcinile

$$\zeta_i = \frac{\omega}{\varepsilon^{i-1}\sqrt[p]{\omega^p + 1} - \omega} \quad (i = 1,2,\ldots, p;\ \varepsilon^p = 1)$$

și prin urmare rădăcinile ecuației (1.75) vor fi

$$\xi_i = \frac{\alpha' p^2}{\varepsilon^{i-1}\sqrt[p]{(2p\alpha'' + 1)^p + 1} - (2p\alpha'' + 1)}. \quad (i = 1,2,\ldots, p) \tag{1.76}$$

Este ușor de văzut că modulele rădăcinilor ξ_i sunt inegale numai dacă $p = 2$, iar dacă $p > 2$, va exista cel puțin o pereche și în general mai multe perechi (dacă $p > 4$), rădăcinile din fiecare pereche având același modul. Prin urmare, nu putem aplica teorema lui Poincaré asupra valorii asimptotice a raportului $\frac{\lambda_{h+1}}{\lambda_h}$ decât dacă $p = 2$. Totuși, fără a face o examinare mai amănunțită, putem ajunge la concluzia care ne interesează, pentru toate valorile lui p, dacă utilizăm o teoremă remarcabilă datorită lui Perron [22], care se aplică și atunci când ecuația caracteristică are rădăcini cu module egale, caz exclus în general de Poincaré.

Conform acestei teoreme, dacă unele din rădăcinile ξ_i au module egale și dacă pentru orice h, ultimul coeficient $\omega_p(h) \neq 0$ (care este tocmai cazul nostru), atunci ecuația (1.74) admite un sistem fundamental de integrale care se descompune în mai multe clase, fiecare clasă corespunzând rădăcinilor de același modul, astfel că, pentru o integrală λ_h aparținând clasei de modul e, avem

$$\limsup_{h=\infty} \sqrt[h]{\lambda_h} = e.$$

Rădăcina reală și pozitivă ξ_1 a ecuației (1.75) având în mod vizibil modulul cel mai mare, clasa sa corespunzătoare nu va conține decât o singură integrală λ_h și pentru această integrală, a cărei existență rezultă din teorema lui Perron, vom avea

$$\limsup_{h=\infty} \sqrt[h]{\lambda_h} = \xi_1 = \frac{\alpha' p^2}{\sqrt[p]{(2p\alpha'' + 1)^p + 1} - (2p\alpha'' + 1)}. \tag{1.77}$$

Numerele λ_h find alese în acest mod, utilizând criteriul lui Cauchy-Hadamard, deducem că seria (1.61) va fi convergentă pentru $|\Gamma| < \frac{1}{\xi_1}\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{2p}$ și existența soluției elementare este astfel complet demonstrată.

Pe lângă aceasta, putem observa că dacă punctul P variază într'un domeniu oarecare, strict interior lui R, numărul ρ va avea un minimum, numărul α și prin urmare ξ_1 va avea un maximum, astfel că și convergența seriei (1.61) va fi uniformă. Este ușor de văzut că această proprietate subsistă pentru toate seriile obținute prin derivări parțiale în raport cu variabilele independente (de exemplu, variabilele normale).

Soluția elementară astfel construită va avea o *singularitate algebrică* pe $\Gamma = 0$, dacă $n > 2p$ și ea va fi *nulă* pe $\Gamma = 0$, dacă $n < 2p$.

Este interesant încă de observat că soluția elementară obținută poate fi complet caracterizată prin forma expresiei sale. Mai precis, *dacă ecuația* $F^p u = 0$ *admite o soluție de forma*

$$u = U(x; a)\,\Gamma^q \qquad \left(q = -\frac{n}{2} + p,\ n = 2m + 1\right)$$

funcțiunea U(x; a) *fiind regulată chiar pentru* x = a, *când* U(a; a) = 1, *atunci această soluție este în mod necesar soluția elementară pe care tocmai am construit-o.*

Este suficient, pentru aceasta, să reluăm calculele făcute mai sus care utilizează, dacă $q = -\frac{n}{2} + p$ și $n = 2m + 1$, ecuații de tip Fuchs cu o singură integrală olomorfă și vom reuși să demonstrăm că funcțiunea $U(x; a)$ are expresia (1.61) și că ea este nu numai regulată, ci chiar olomorfă, într'o vecinătate suficient de mică a conoidului caracteristic.

9. Soluția elementară în cazul unui număr par de variabile independente. Dacă presupunem $n = 2m$, ecuația (1.58) care dă pe U_h va fi imposibilă pentru $h = -q + j$ ($j = 0,1,\ldots,p-1$), dacă nu este îndeplinită pe $\Gamma = 0$ condiția

$$\sum_{i=1}^{p} A_{j-i}^{p-i}\,\Phi_{p,j-i}^{i} U_{-q+j-i} = 0.$$

In acest caz, fără a duce mai departe considerațiile, vom anticipa oarecum, anunțând că avem nevoie să calculăm în prealabil contribuția unui termen logaritmic pe care îl vom introduce și care are forma $V \log \Gamma$, unde V este o anumită funcțiune de x^α. Notând

$$\nabla_\alpha V = V_\alpha \quad , \quad \nabla_{\alpha\beta} V = V_{\alpha\beta}$$

vom putea scrie

$$\nabla_\alpha (V \log \Gamma) = \frac{V}{\Gamma}\pi_\alpha + V_\alpha \log \Gamma$$

$$\nabla_{\alpha\beta}(V \log \Gamma) = -\frac{V}{\Gamma^2}\pi_\alpha \pi_\beta + \frac{1}{\Gamma}(V_\alpha \pi_\beta + V_\beta \pi_\alpha + V\pi_{\alpha\beta}) + V_{\alpha\beta} \log \Gamma$$

și prin urmare

$$F(V\log\Gamma)=\frac{1}{\Gamma}[2\Delta(V,\Gamma)+(M-4)V]+FV\log\Gamma= \\ =\frac{1}{\Gamma}\Omega_{-1}V+FV\log\Gamma. \tag{1.78}$$

Se poate demonstra prin recurență că avem relația generală

$$F^p(V\log\Gamma)=\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{p-i-1}\frac{(p-i-1)!}{\Gamma^{p-i}}\Phi^i_{p,0}V+F^pV\log\Gamma,\ (\Phi^0_{p,0}=E_{p,0}) \tag{1.79}$$

operatorii $E_{p,0}$ și $\Phi^i_{p,0}$ calculându-se cu formulele (1.45).

Mergând mai departe, vom distinge cazurile secundare $q<0$ și $q\geqslant 0$, pe care le vom considera separat, deoarece soluțiile elementare la care ele conduc sunt diferite ca formă.

a) *Cazul secundar algebrico-logaritmic.* Să considerăm întâi cazul $q<0$, adică $n>2p$, deci $m>p$. Rezultatele lui H a d a m a r d pentru ecuațiile de ordinul II și acelea ale lui N. T e o d o r e s c u pentru ecuațiile de ordin oarecare ne sugerează ideea de a căuta o *soluție algebrico-logaritmică* de forma

$$u=U\Gamma^q+V\log\Gamma, \qquad \left(q=-\frac{n}{2}+p,\ n=2m\right), \tag{1.80}$$

V fiind ca și U o funcțiune regulată. Introducând valoarea (1.80) în F^pu, vom putea scrie

$$F^p(U\Gamma^q+V\log\Gamma)=F^p(U\Gamma^q)+ \\ +\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{p-i-1}\frac{(p-i-1)!}{\Gamma^{p-i}}\Phi^i_{p,0}V+F^pV\log\Gamma \tag{1.81}$$

și membrul al doilea al acestei relații nu poate fi nul decât dacă termenul logaritmic dispare, adică dacă avem $F^pV=0$, ceea ce arată că V *trebue să fie o soluție a ecuației* $\mathrm{F}^p\,\mathrm{u}=0$.

Este clar că pentru $h<-q$, repetând procedeul din cazul impar, expresiile termenilor U_h ai desvoltării lui $F^p(U\Gamma^q)$ vor fi date tot de formulele (1.51) și (1.60), obținute prin anularea succesivă a coeficienților lui Γ^{q-p}, $\Gamma^{q-p+1},\ldots,\Gamma^{-p-1}$.

In ceea ce privește soluția particulară V a ecuației $F^p\,u=0$, vom încerca să o determinăm printr'o desvoltare de forma

$$V=V_0+V_1\Gamma+\ldots+V_h\Gamma^h+\ldots \tag{1.82}$$

funcțiunile V_h fiind regulate în R. Inlocuind această valoare a lui V în ecuația $F^pu=0$, vom obține, ca și în cazul impar, ecuația pe care o verifică V_h. Această ecuație se va obține anulând coeficientul lui Γ^{h-p} în desvoltarea lui

$F^p V$ sau făcând $q = 0$ în ecuația (1.58), după ce, bineînțeles, am scris V în locul lui U. Ea se va scrie deci

$$E_{p,h} V_h + \sum_{i=1}^{p} \frac{\Phi^i_{p,h-1} V_{h-i}}{h(h-1)\dots(h-i+1)} = 0 \tag{1.83}$$

și va procura, după exemplul ecuației (1.58), singura integrală regulată în origine

$$V_h = -\frac{U_0}{4^p s^{p+h-q-1}} \int_0^s \dots \int_0^s \frac{s^{h-q-1}}{U_0} \sum_{i=1}^{p} \frac{\Phi^i_{p,h-i} V_{h-i}}{h(h-1)\dots(h-i+1)} ds \dots ds \tag{1.84}$$

pe care o vom lua ca valoare a lui V_h în tot domeniul R. Este clar că în acest mod toate funcțiunile V_h $(h \geqslant p)$ vor fi bine determinate și că V_0, $V_1, \dots, V_{p-1}$ vor rămâne momentan nedeterminate, deoarece ecuația (1.83) impune restricția $h \neq 0, 1, \dots, p-1$.

Funcțiunile V_h $(h \geqslant p)$ vor fi olomorfe în origine, dacă $V_0, V_1, \dots, V_{p-1}$ sunt de asemenea olomorfe, ipoteză pe care o vom admite și care va fi justificată prin calculele următoare.

Convergența uniformă a seriei (1.82) se demonstrează ca și în cazul impar, cu condiția să înlocuim $q + h$ cu h în calculele corespunzătoare și aceeași proprietate va subsista pentru seriile obținute prin derivări parțiale.

Pentru determinarea funcțiunilor $V_0, V_1, \dots, V_{p-1}$, rămase până în acest moment nedeterminate, să introducem în relația (1.81) valorile găsite pentru U și V. In ceea ce privește primul termen al relației (1.81), care conține numai pe U, ținând seama de relația (1.46), vom putea scrie

$$F^p(U_0 \Gamma^q + U_1 \Gamma^{q+1} + \dots + U_{-q-1} \Gamma^{-1}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{-q-1} F^p(U_j \Gamma^{q+j}) = \sum_{j=0}^{-q-1} \sum_{i=0}^{p} A^{p-i}_{q+j} \Gamma^{q-p+i+j} \Phi^i_{p,q+j} U_j .$$

In ultima sumă de mai sus, în virtutea ecuațiilor verificate de $U_0, U_1, \dots, U_{-q-1}$, termenii conținând pe $\Gamma^{q-p}, \Gamma^{q-p+1}, \dots, \Gamma^{-p-1}$ vor dispare, astfel că putem presupune $q - p + i + j \geqslant -p$ și deci $j \geqslant -q - i$, ceea ce cere $i \geqslant 1$, deoarece $j \leqslant -q-1$. Suma menționată se va putea scrie deci succesiv

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=-q-i}^{-q-1} A^{p-i}_{q+j} \Gamma^{q-p+i+j} \Phi^i_{p,q+j} U_j = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{i-1} A^{p-i}_{k-i} \Gamma^{k-p} \Phi^i_{p,k-i} U_{k-q-i} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=k+1}^{p} A^{p-i}_{k-i} \Gamma^{k-p} \Phi^i_{p,k-i} U_{k-q-i} ,$$

unde am înlocuit întâi pe j cu $k - q - i$ și apoi am schimbat ordinea sumărilor în suma dublă obținută.

Dacă punem acum $p-k=r$ și $p-i=s$, ultima sumă dublă va lua forma

$$\sum_{r=1}^{p}\sum_{s=0}^{r-1} A_{s-r}^{s}\,\Phi_{p,s-r}^{p-s}\,U_{-q-r+s}\cdot\frac{1}{\Gamma^{r}}=$$

$$=\sum_{r=1}^{p}\sum_{s=0}^{r-1}(-1)^{s}A_{r-1}^{s}\,\Phi_{p,s-r}^{p-s}\,U_{-q-r+s}\cdot\frac{1}{\Gamma^{r}},$$

astfel că scriind i și j în locul lui r și s, vom avea în definitiv

$$F^{p}(U_0\,\Gamma^{q}+U_1\,\Gamma^{q+1}+\ldots+U_{-q-1}\,\Gamma^{-1})=$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{j}A_{i-1}^{j}\,\Phi_{p,j-i}^{p-j}\,U_{-q-i+j}\frac{1}{\Gamma^{i}}=\sum_{i=1}^{p}\big[(-1)^{i-1}A_{i-1}^{i-1}\,\Phi_{p,-1}^{p-i+1}\,U_{-q-1}+ \tag{1.85}$$

$$+(-1)^{i-2}A_{i-1}^{i-2}\,\Phi_{p,-2}^{p-i+2}\,U_{-q-2}+\ldots-A_{i-1}^{1}\,\Phi_{p,-i+1}^{p-1}\,U_{-q-i+1}+\Phi_{p,-i}^{p}\,U_{-q-i}\big]\frac{1}{\Gamma^{i}}.$$

Pentru ceilalți termeni ai relației (1.81) care conțin numai pe V, trebue să calculăm mai întâi după puterile lui Γ, invarianții $E_{p,0}(V_h\,\Gamma^{h})$ și $\Phi_{p,0}^{i}(V_h\Gamma^{h})$. Deoarece putem scrie

$$\Omega_i(V_h\,\Gamma^{h})=2\Delta(V_h\,\Gamma^{h},\,\Gamma)+(M+4i)\,V_h\,\Gamma^{h}=2\Gamma^{h}\,\Delta(V_h,\,\Gamma)+$$

$$+2hV_h\,\Gamma^{h-1}\Delta(\Gamma,\,\Gamma)+(M+4i)\,V_h\,\Gamma^{h}=\Gamma^{h}\big\{2\Delta(V_h,\Gamma)+ \tag{1.86}$$

$$+[M+4(i+2h)]\,V_h\big\}=\Gamma^{h}\,\Omega_{i+2h}\,V_h$$

rezultă imediat că

$$E_{p,0}(V_h\,\Gamma^{h})=\Gamma^{h}\,\Omega_{-p+2h}\,\Omega_{-p+2h-1}\cdots\Omega_{2h-1}\,V_h=\Gamma^{h}\,E_{p,2h}\,V_h$$

și deci, în virtutea convergenței uniforme a seriei din partea a doua,

$$E_{p,0}\,V=\sum_{h=0}^{\infty}\Gamma^{h}\,E_{p,2h}\,V_h\,. \tag{1.87}$$

De asemenea, ținând seama de relația (1.86) și de

$$F(V_h\,\Gamma^{h})=h\Gamma^{h-1}\,\Omega_{h-1}\,V_h+\Gamma^{h}FV_h,$$

punând în evidență coeficienții lui Γ^{h}, Γ^{h-1}, ..., Γ^{h-i} — care în baza relațiilor menționate sunt singurele puteri ale lui Γ care intervin în expresia lui $\Phi_{p,0}^{i}(V_h\,\Gamma^{h})$ — vom putea scrie

$$\Phi_{p,0}^{i}(V_h\,\Gamma^{h})=\sum F^{i}\,\Omega_{-p+i}\ldots\Omega_{-2}\,\Omega_{-1}\,(V_h\,\Gamma^{h})=\sum_{j=0}^{i}A_h^{j}\,\Gamma^{h-j}\,\Psi_{p,2h}^{i,j}\,V_h \tag{1.88}$$

unde $\Psi_{p,2h}^{i,j}$ este un anumit operator diferențial care va fi precizat prin evaluarea coeficientului lui Γ^{h-j} în expresia (1.88).

In acest scop, să ne fixăm atenția asupra unui termen oarecare care figurează în operatorul $\Phi^i_{p,0}$. Cum acest termen este absolut arbitrar, putem presupune în toată generalitatea că el este un produs simbolic în care F intervine de i ori, separând $i+1$ produse parțiale de operatori construite cu $\Omega_{-1}, \Omega_{-2}, \ldots, \Omega_{-p+i}$, primul produs parțial aplicat conținând r_1, al doilea produs parțial $r_2, \ldots$, iar al $i+1$-lea produs parțial conținând r_{i+1} operatori Ω și, în fiecare dintre aceste produse parțiale, ca și în produsul total, operatorii Ω fiind aplicați în ordinea descrescătoare a indicilor respectivi. Deoarece există $p-i$ operatori Ω, trebue să avem

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{i+1} = p - i$$

și evident $r_1, r_2, \ldots, r_{i+1} \geqslant 0$.

Când aplicăm lui $V_h\,\Gamma^h$ produsul simbolic din $\Phi^i_{p,0}$ pus mai sus în evidență, în conformitate cu relațiile invocate în scrierea formulei (1.88), un termen al acestei formule conținând pe Γ^{h-j} $(j \leqslant i)$ poate să se obțină în modul următor.

Primul produs parțial de operatori Ω aplicat lui $V_h\,\Gamma^h$ va da drept rezultat un produs obișnuit între Γ^h și un produs simbolic de operatori Ω aplicat numai lui V_h, care se obține din primul produs parțial de operatori Ω mărind cu $2h$ indicii acestor operatori. Operatorul F care urmează va avea două contribuții, dintre care una se obține înlocuind pe $F\Gamma^h$ cu $h\;\Gamma^{h-1}\,\Omega_{h-1}$, iar cealaltă schimbând pe $F\Gamma^h$ în $\Gamma^h F$. Din aceste două contribuții, vom reține numai pe prima și vom examina mai departe schimbările provenite din cauza operatorilor următori.

Al doilea produs parțial de operatori Ω va schimba pe $h\Gamma^{h-1}$ într'un produs obișnuit între $h\Gamma^{h-1}$ și un produs simbolic de operatori Ω obținut din al doilea produs parțial de operatori Ω mărind cu $2(h-1)$ toți indicii operatorilor respectivi. Operatorul F următor va avea două contribuții, dintre care cea pe care o vom reține constă în schimbarea lui $h\Gamma^{h-1}$ în $h(h-1)\,\Gamma^{h-2}\Omega_{h-2}$.

Continuând astfel până la operatorul F de rang j și reținând totdeauna din cele două contribuții ale lui F pe aceea care micșorează cu o unitate exponentul lui Γ, toți operatorii Ω din produsul parțial de rang $s \leqslant j$ își vor mări indicii cu $2(h-s+1)$, iar operatorul F de rang s care urmează va fi înlocuit cu $A^s_h\,\Gamma^{h-s}\,\Omega_{h-s}$. Reținând apoi, din cele două contribuții ale operatorilor F care urmează, pe aceea care nu schimbă exponentul lui Γ, la sfârșit $A^j_h\,\Gamma^{h-j}$ va apare în factor, toți operatorii Ω neconsiderați până acum mărindu-și cu $2(h-j)$ indicii respectivi, iar operatorii F rămânând neschimbați.

Este clar că pentru a obține din termenul lui $\Phi^i_{p,0}$ considerat, toți termenii care sunt multiplicați cu $A^j_h\,\Gamma^{h-j}$, trebue să reținem în toate modurile posibile din j operatori F contribuția care micșorează cu o unitate exponentul lui Γ, iar din operatorii F rămași, contribuția care nu schimbă exponentul lui Γ și să facem apoi schimbările necesare în operatorii Ω, conform cu relația (1.86). Pe urmă, trebue evident să facem aceeași operație cu fiecare termen din $\Phi^i_{p,0}$ și suma tuturor termenilor astfel obținuți va fi operatorul $\Psi^{i,j}_{p,2h}$.

Este acum vizibil că operațiile de mai sus permit să definim pe $\Psi^{i,j}_{p,2h}$ ca fiind operatorul diferențial ce se obține din $\Phi^i_{p,2h}$ înlocuind în fiecare

din termenii săi, dela dreapta la stânga și în toate modurile posibile, de $j \leqslant i$ ori operatorul F respectiv cu Ω_{h-1}, Ω_{h-2}, ..., Ω_{h-j} și schimbând în toți termenii astfel obținuți pe h cu $h-1$ în operatorii Ω care sunt între Ω_{h-1} și Ω_{h-2}, apoi pe h cu $h-2$ în operatorii Ω care sunt între Ω_{h-2} și Ω_{h-3} și așa mai departe, până la operatorii Ω care sunt la stânga lui Ω_{h-j} în care vom schimba pe h cu $h-j$. (Trebue evident să luăm $\Psi^{i,0}_{p,2h} = \Phi^{i}_{p,2h}$).

Schimbând pe h în $h+j$ în relația (1.88) și în virtutea convergenței uniforme, vom putea scrie

$$\Phi^{i}_{p,0}\, V = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} A^{j}_{h+j}\, \Gamma^{h}\, \Psi^{i,j}_{p,2(h+j)}\, V_{h+j}, \tag{1.89}$$

relație care coincide cu (1.87), dacă $i = 0$.

Anulând acum coeficienții lui Γ^{-p}, Γ^{-p+1}, ..., Γ^{-1} în desvoltarea lui $F^{p}(U\Gamma^{q} + V \log \Gamma)$, vom obține noi ecuații care vor determina funcțiunile $V_0, V_1, \ldots, V_{p-1}$, rămase până în acest moment arbitrare. De exemplu, anulând coeficientul lui Γ^{-p}, obținem ecuația pe care trebue s'o verifice V_0, anume

$$E_{p,0}\, V_0 + \sum_{i=1}^{p} \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\, \Phi^{i}_{p,-1}\, U_{-q-i} = 0, \tag{1.90}$$

care pe bicaracteristice admite o singură integrală regulată în origine, a cărei expresie este

$$V_0 = -\frac{U_0}{4^{p}\, s^{p-q-1}} \int_0^s \cdots \int_0^s \frac{s^{-q-1}}{U_0} \sum_{i=1}^{p} \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\, \Phi^{i}_{p'-i}\, U_{-q-i}\, ds \ldots ds \tag{1.91}$$

și care va fi luată drept valoare pentru V_0 în tot domeniul R. Funcțiunea V_0 astfel definită va fi evident olomorfă în origine.

In general, ținând seamă de (1.81) și (1.89) — în această ultimă relație schimbând în prealabil pe h în $h-i$ pentru a pune în evidență coeficientul lui Γ^{h-i} $(i \leqslant h)$ — vom obține ecuația pe care trebue să o verifice V_h $(0 \leqslant h < p)$ anulând coeficientul lui Γ^{-p+h} în $F^{p}(U\Gamma^{q} + V \log \Gamma)$. Această ecuație se scrie

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{h} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{p-i-1}\, (p-i-1)!\, A^{j}_{h-i+j}\, \Psi^{i,j}_{p,2(h-i+j)}\, V_{h-i+j} + \\ &+ (-1)^{p-h-1}\, (p-h-1)! \sum_{i=1}^{p-h} \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\, \Phi^{h+i}_{p,-i}\, U_{-q-i} = 0. \end{aligned} \tag{1.92}$$

Pentru a da o formă mai sugestivă acestei ecuații, este necesar să calculăm separat operatorul care este aplicat numai lui V_h (obținut pentru $j = i$), anume

$$\chi_{p,h} = \sum_{i=0}^{h} (-1)^{p-i-1}\, (p-i-1)!\, A^{i}_{h}\, \Psi^{i,i}_{p,2h}. \tag{1.93}$$

In acest scop, să determinăm întâi expresiile operatorilor

$$\Psi^{1,1}_{p,2h},\ \Psi^{2,2}_{p,2h},\ \ldots,\ \Psi^{h,h}_{p,2h}.$$

Zic că avem în general relația

$$\Psi^{i,i}_{p,2h} = C^i_p\, \Omega_{h-1}\, \Omega_{h-2} \ldots \Omega_{h-i}\, E_{p-i,\,2h-i} \quad (i = 0, 1, \ldots, h). \tag{1.94}$$

Să admitem că această relație este valabilă pentru orice p și o anumită valoare a lui i și să demonstrăm că ea este valabilă pentru valoarea imediat superioară $i+1$. In adevăr, luând $q = 2h$ și utilizând notațiile (1.45), relația (1.18) se scrie

$$\Phi^i_{p+1,2h} = F\Phi^{i-1}_{p,2h} + \Omega_{2h-p+i-1}\, \Phi^i_{p,2h}.$$

In cei doi membri ai acestei ultime relații figurează evident aceiași termeni, grupați în moduri diferite. Dacă facem acum în primul membru operația prin care $\Phi^i_{p+1,2h}$ este înlocuit prin $\Psi^{i,i}_{p+1,2h}$, aceeași operație va schimba pe $F\Phi^{i-1}_{p,2h}$ în $\Omega_{h-i}\, \Psi^{i-1,i-1}_{p,2h}$ și pe $\Omega_{2h-p+i-1}\, \Phi^i_{p,2h}$ în $\Omega_{2h-p-i-1}\, \Psi^{i,i}_{p,2h}$, astfel că relația de mai sus va deveni

$$\Psi^{i,i}_{p+1,2h} = \Omega_{h-i}\, \Psi^{i-1,i-1}_{p,2h} + \Omega_{2h-p-i-1}\, \Psi^{i,i}_{p,2h}. \tag{1.95}$$

Dacă în această relație (1.95) schimbăm pe i în $i+1$ și dăm lui p succesiv valorile $p-1$, $p-2, \ldots, i+1$, obținem relațiile

$$\begin{aligned}
\Psi^{i+1,i+1}_{p,2h} &= \Omega_{h-i-1}\, \Psi^{i,i}_{p-1,2h} + \Omega_{2h-p-i-1}\, \Psi^{i+1,i+1}_{p-1,2h} \\
\Psi^{i+1,i+1}_{p-1,2h} &= \Omega_{h-i-1}\, \Psi^{i,i}_{p-2,2h} + \Omega_{2h-p-i}\, \Psi^{i+1,i+1}_{p-2,2h} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Psi^{i+1,i+1}_{i+2,2h} &= \Omega_{h-i-1}\, \Psi^{i,i}_{i+1,2h} + \Omega_{2h-2i-3}\, \Psi^{i+1,i+1}_{i+1,2h} \\
\Psi^{i+1,i+1}_{i+1,2h} &= \Omega_{h-i-1}\, \Omega_{h-i} \ldots \Omega_{h-1}
\end{aligned}$$

de unde rezultă imediat

$$\begin{aligned}
\Psi^{i+1,i+1}_{p,2h} = \Omega_{h-i-1}\, (&\Psi^{i,i}_{p-1,2h} + \Omega_{2h-p-i-1}\, \Psi^{i,i}_{p-2,2h} + \\
&+ \Omega_{2h-p-i-1}\, \Omega_{2h-p-i}\, \Psi^{i,i}_{p-3,2h} + \ldots + \Omega_{2h-p-i-1} \ldots \Omega_{2h-2i-4}\, \Psi^{i,i}_{i+1,2h} + \\
&+ \Omega_{2h-p-i-1} \ldots \Omega_{2h-2i-3}\, \Omega_{h-i} \ldots \Omega_{h-1})
\end{aligned}$$

ceea ce se poate de asemenea scrie, ținând seama de formula (1.94)

$$\begin{aligned}
\Psi^{i+1,i+1}_{p,2h} = \Omega_{h-1}\, \Omega_{h-2} \ldots \Omega_{h-i-1}\, (&C^i_{p-1}\, E_{p-i-1,2h-i} + \\
&+ C^{i}_{p-2}\Omega_{2h-p-i-1}\, E_{p-i-2,2h-i} + \ldots + C^i_{i+1}\, \Omega_{2h-p-i-1} \ldots \Omega_{2h-2i-4} E_{1,2h-i} + \\
&+ C^i_i\, \Omega_{2h-p-i-1} \ldots \Omega_{2h-2i-3}).
\end{aligned} \tag{1.96}$$

Printr'un calcul destul de lung, dar care nu este dificil, se poate obține din aproape în aproape suma din membrul al doilea scrisă între paranteze, începându-se a se evalua suma ultimilor doi termeni, apoi suma ultimilor trei termeni și așa mai departe, până când se ajunge la suma întreagă.

In toate calculele auxiliare se ține seamă de prima relație (1.42), care permite înlocuirea sumei a doi operatori $\nu\Omega$ cu un operator de aceeași formă. Se obține astfel, ca valoare a sumei scrisă între paranteze în (1.96), expresia

$$(C_i^i + C_{i+1}^i + \ldots + C_{p-1}^i)\, E_{p-i-1,2h-i-1}$$

și vom avea deci

$$\Psi_{p,2h}^{i+1,i+1} = C_p^{i+1}\ \Omega_{h-1} \ldots \Omega_{h-i-1}\ E_{p-i-1,2h-i-1}$$

relație de aceeași formă cu (1.94), ceea ce înseamnă că această ultimă este generală, pentrucă ea este evident valabilă pentru p oarecare și $i = 0$. ($\Psi_{p,2h}^{0,0} = \Phi_{p,2h}^0 = E_{p,2h}$).

Introducând acum valorile lui $\Psi_{p,2h}^{i,i}(i = 1, \ldots, h)$ în expresia lui $\chi_{p,h}$, vom putea scrie

$$\chi_{p,h} = (-1)^{p-h-1}\,(p-h-1)!\,h!\,\Omega_{2h-p}\,\Omega_{2h-p+1} \ldots \Omega_{h-1}\,H_{h,\,2h-p} \qquad (1.97)$$

unde $H_{h,\,2h-p}$ are expresia

$$H_{h,\,2h-p} = \sum_{i=0}^{h} (-1)^{h-i}\, C_{p-i-1}^{h-i}\, C_p^i\ \Omega_{h-i}\,\Omega_{h-i+1} \ldots \Omega_{2h-i-1}$$

astfel că este suficient să calculăm pe $H_{h,\,2h-p}$ pentru a avea imediat expresia lui $\chi_{h,\,p}$. Vrem să arătăm că

$$H_{h,\,2h-p} = E_{h,\,2h-p} = \Omega_{h-p}\ \Omega_{h-p+1} \ldots \Omega_{2h-p-1}. \qquad (1.98)$$

Pentru aceasta, vom observa că $H_{h,\,2h-p}$ este un operator diferențial de ordinul h și vom demonstra că el este divizibil prin operatorul diferențial Ω_{h-p+j} $(j = 0, 1, \ldots, h-1)$.

In adevăr, luând ca operatori de bază pentru familia (Ω) operatorul unitate $E = 1.$ și pe Ω_{h-p+j}, vom avea după a doua relație (1.42)

$$\Omega_r = \Omega_{h-p+j} + 4\,(r + p - h - j)\,E,$$

Ω_r fiind un operator oarecare din (Ω). Dacă exprimăm în $H_{h,\,2h-p}$ toți operatorii Ω în funcție de operatorii de bază aleși și dacă scriem peste tot 1. în loc de E, vom obține un polinom simbolic de ordinul h în Ω_{h-p+j}. Dacă demonstrăm că nu există termen independent de Ω_{h-p+j}, atunci acest polinom simbolic și deci $H_{h,\,2h-p}$ va fi divizibil prin Ω_{h-p+j}. Dar se poate ușor vedea că termenul independent de Ω_{h-p+j} este în afara unui factor numeric

$$\sum_{i=0}^{h} (-1)^{h-i}\, C_{p-i-1}^{h-i}\, C_p^i (p-i-j)\,(p-i-j+1) \ldots (p-i-j+h-1) =$$

$$= \frac{(-1)^h\, p!}{(p-h-1)!\,h!} \sum_{i=0}^{h} (-1)^i\, C_h^i\, (p-i-j) \ldots (p-i-1) \qquad (1.99)$$

$$(p-i+1) \ldots (p-i-j+h-1).$$

Să considerăm acum șirul al cărui termen general este

$$t_\nu = (\nu - h)(\nu - h + 1) \ldots (\nu - h + j - 1)(\nu - h + j + 1) \ldots (\nu - 2)(\nu - 1).$$

Cum t_ν este un polinom de ordinul $h - 1$ în ν, diferența sa de ordinul h va fi nulă. Scriind formula care exprimă diferența de ordinul h a lui t_ν în funcție de $t_{\nu+h-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, h)$ și apoi punând $\nu = p - j$, deducem că ultima sumă din (1.99) este nulă, ceea ce arată că termenul independent de Ω_{h-p+j} în polinomul simbolic considerat este nul, altfel spus operatorul $H_{h,\,2h-p}$ este divizibil prin Ω_{h-p+j} $(j = 0, 1, \ldots, h-1)$. Vom avea prin urmare

$$H_{h,\,2h-p} = m\,\Omega_{h-p}\,\Omega_{h-p+1} \ldots \Omega_{2h-p-1},$$

m fiind o funcțiune pe care trebue să o determinăm. Se vede imediat că m este o constantă care are valoarea

$$m = \sum_{i=0}^{h} (-1)^{h-i} C_{p-i-1}^{h-i} C_p^i = \frac{(-1)^h p!}{(p-h-1)!\,h!} \sum_{i=0}^{h} \frac{(-1)^i C_h^i}{p-i} \tag{1.100}$$

Pentru a determina valoarea lui m, să considerăm șirul cu termenul general $t_\nu = \dfrac{1}{\nu}$ a cărui diferență de ordinul h este egală cu

$$\frac{(-1)^h h!}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+h)}.$$

Folosind iarăși formula care exprimă diferența de ordinul h a lui t_ν în funcție de $t_{\nu+h-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, h)$, ajungem la relația

$$\sum_{i=0}^{h} (-1)^i \frac{C_h^i}{\nu+h-i} = \frac{(-1)^h h!}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+h)}$$

în care făcând $\nu = p - h$ și ținând seama de (1.100), deducem $m = 1$, astfel că formula (1.98) este complet demonstrată.

Formulele (1.97) și (1.98) ne permit în definitiv să scriem

$$\chi_{p,h} = (-1)^{p-h-1}(p-h-1)!\,h!\,E_{p,h} \tag{1.101}$$

și ecuația (1.92) pe care trebue să o verifice V_h $(0 \leqslant h < p)$ capătă deci forma

$$E_{p,h}V_h + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1^{h-i}(p-i-1)!}{(p-h-1)!\,h!} A_{h-i+j}^j \Psi_{p,2(h-i+j)}^{i,j} V_{h-i+j} + \\ + \sum_{i=1}^{p-h} \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!\,h!} \Phi_{p,-i}^{h+i} U_{-q-i} = 0, \tag{1.102}$$

unde pentru $h = 0$ trebue să suprimăm suma dublă.

Pe bicaracteristice, ecuația (1.102) admite o singură integrală regulată în origine a cărei expresie este

$$V_h=\frac{-U_0}{4^p\,h!\,s^{p+h-q-1}}\int_0^s\cdots\int_0^s\frac{s^{h-q-1}}{U_0}\left\{\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{h-i}C_{p-i-1}^{h-i}(h-i+j)!\times\right.$$
$$\left.\times\Psi_{p,2(h-i+j)}^{i,j}V_{h-i+j}+\sum_{i=1}^{p-h}\frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\Phi_{p,-i}^{h+i}U_{-q-i}\right\}ds\ldots ds \tag{1.103}$$

și pe care o vom lua ca valoare a lui V_h în tot domeniul R. Funcțiunea V_h va fi olomorfă în origine, deoarece $V_0, V_1, \ldots, V_{h-1}$ sunt de asemenea olomorfe.

Toate aceste calcule fiind făcute, dacă presupunem că am introdus în (1.81) valorile lui U_h ($h=0, 1\ldots, -q-1$) date de formulele (1.51), (1.60) și valorile lui V_h ($h=0, 1, \ldots$) procurate de formulele (1.84) și (1.103), deducem din însuși modul de calcul că în rezultatul acestei înlocuiri, termenii în $\Gamma^{q-p}, \ldots, \Gamma^{-p+1}, \Gamma^{-p}, \ldots, \Gamma^{-1}$ și în *log* Γ vor dispare și nu va mai rămâne, prin urmare, decât o funcțiune olomorfă, pe care o vom nota cu Ψ. Pentru a avea soluția elementară, trebue deci să adăugăm expresiei

$$u=\Gamma^q\sum_{h=0}^{-q-1}U_h\Gamma^h+V\log\Gamma,$$

o soluție olomorfă oarecare w a ecuației $F^p u=-\Psi$.

Existența acestei soluții w rezultă din teorema fundamentală a lui Cauchy-Kowalewsky și construcția sa efectivă, cu gradul de nedeterminare pe care ea îl comportă, de asemenea poate fi obținută printr'un procedeu ca acela întrebuințat mai înainte. Pentru aceasta, vom pune

$$w=U_{-q}+U_{-q+1}\Gamma+\ldots+U_{-q+h}\Gamma^h+\ldots \tag{1.104}$$

și cum avem

$$\Psi=\sum_{h=p}^{\infty}L_{h,p}(V)\,\Gamma^{h-p},$$

unde am notat

$$L_{h,p}(V)=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{p-i-1}(p-i-1)!\,A_{h-i+j}^{j}\Psi_{p,2(h-i+j)}^{j,j}V_{h-i+}$$

dacă anulăm coeficientul lui Γ^{-p+h} ($h\geqslant p$) în desvoltarea lui $F^p w+\Psi$, vom putea scrie

$$E_{p,h}\,U_{-q+h}+\sum_{i=1}^{p}\frac{\Phi_{p,h-i}^{i}\,U_{-q+h-i}}{h(h-1)\ldots(h-i+1)}+\frac{L_{h,p}(V)}{h(h-1)\ldots(h-p+1)}=0. \tag{1.105}$$

Obținem astfel pentru $h \geqslant p$ singura integrală olomorfă în origine (în ipoteza că $U_{-q}, U_{-q+1}, \ldots, U_{-q+p-1}$ sunt de asemenea olomorfe)

$$U_{-q+h} = \frac{-U_0}{4^p s^{p+h-q-1}} \int_0^s \cdots \int_0^s \frac{s^{h-q-1}}{U_0} \left\{ \sum_{i=1}^{p} \frac{\Phi^i_{p,h-i} U_{-q+h-i}}{h(h-1)\ldots(h-i+1)} + \right. \tag{1.106}$$
$$\left. + \frac{L_{h,p}(V)}{h(h-1)\ldots(h-p+1)} \right\} ds \ldots ds$$

care va fi luată ca valoare a lui U_{-q+h} în tot domeniul R.

Termenii $U_{-q}, U_{-q+1}, \ldots, U_{-q+p-1}$ vor rămâne deci arbitrari, cu condiția de a fi funcțiuni olomorfe, ceea ce precizează nedeterminarea lor.

Prin urmare, în cazul secundar $q < 0$, soluția elementară astfel obținută nu mai este bine determinată și ea are pe $\Gamma = 0$, o *singularitate algebrico-logaritmică.*

Este de observat, ca și în cazul impar, că această soluție elementară poate fi complet caracterizată prin forma expresiei sale. Mai precis, *dacă ecuația* $\mathrm{F'u} = 0$ *admite o soluție de forma*

$$u = U(x; a)\,\Gamma^q + V(x; a)\log\Gamma + w \qquad \left(q = -\frac{n}{2} + p < 0,\ n = 2m\right)$$

funcțiunile $\mathrm{U(x; a)}, \mathrm{V(x; a)}$ *fiind regulate chiar pentru* $\mathrm{x=a}$, *când* $\mathrm{U(a; a)=1}$, *iar* w *fiind o funcțiune olomorfă în vecinătatea lui* $\Gamma = 0$, *atunci această soluție este în mod necesar o soluție elementară a ecuației menționate.*

In acest scop, este suficient să refacem calculele noastre, care utilizează ecuații Fuchs cu o singură integrală olomorfă, dacă $q = -\frac{n}{2} + p < 0$ și $n = 2m$, pentru a ajunge la concluzia că $F^pV = 0$, că $U(x; a)$ și $V(x; a)$ sunt nu numai regulate, ci chiar olomorfe (în vecinătatea lui $\Gamma = 0$), având expresiile găsite mai sus și că w trebue să fie o soluție olomorfă a ecuației $F^pu = -\Psi$.

Din cauza rolului său accesoriu în problema pe care o studiem, dar care nu este lipsit de importanță, vom numi funcțiunea w în mod larg nedeterminată, *funcțiune de corecție.*

b) *Cazul secundar logaritmic.* Să considerăm acum cazul $q \geqslant 0$, adică $n \leqslant 2p$, deci $m \leqslant p$, ceea ce cere $q = 0, 1, \ldots, p-1$ sau $n = 2, 4, \ldots, 2p$.

Analiza cazului lui Riemann ($p=1$, $n=2$) făcută de Hadamard și anumite rezultate din teoria funcțiunilor poliarmonice, datorite lui Miron Nicolescu, ne conduc la ideea de a căuta o *soluție pur logaritmică*, de forma

$$u = \Gamma^q V \log\Gamma \qquad \left(q = -\frac{n}{2} + p,\ n = 2m\right) \tag{1.107}$$

V fiind ca și în cazul secundar examinat mai sus o funcțiune regulată în R.

Inlocuind în relația (1.79) pe V cu $V\Gamma^q$, ajungem la concluzia că trebue să avem $F^p(V\Gamma^q) = 0$, adică $V\Gamma^q$ *trebue să fie o soluție a ecuației* $\mathrm{F^pu} = 0$.

Luând pentru V desvoltarea

$$V = V_q + V_{q+1}\Gamma + \ldots + V_{q+h}\Gamma^h + \ldots \tag{1.108}$$

funcţiunile V_{q+h} fiind regulate, vom avea deci de determinat o soluţie a ecuaţiei $F^p u = 0$ de forma $u = V\Gamma^q$, ceea ce pare o încercare destinată să rămână fără rezultat, deoarece q are în acest caz tocmai una din valorile excluse în metoda care conducea la o soluţie elementară algebrică şi care prin excluderea lor asigurau rigoarea raţionamentului.

Dar nu este aşa. In adevăr, este clar că în ceea ce priveşte forma soluţiei căutate, noul caz secundar se obţine din cel studiat mai înainte luând $U = 0$ în expresia (1.80) şi $V_0 = V_1 = \ldots = V_{q-1} = 0$ în desvoltarea (1.82). Observarea făcută la începutul cazului par trebue interpretată pentru $q \geqslant 0$, în sensul că putem determina coeficienţii V_{q+h} din (1.108), când $q + h \geqslant p$, primii $m = p - q$ coeficienţi V_q, $V_{q+1}, \ldots, V_{p-1}$ rămânând nedeterminaţi. Ca şi în primul caz secundar, această nedeterminare poate fi ridicată dacă ţinem seamă că (1.107) trebue să fie de asemenea o soluţie a lui $F^p u = 0$.

Ecuaţia pe care trebue să o verifice V_{q+h}, pentru $h \geqslant p - q = m$, se deduce imediat anulând coeficientul lui Γ^{q-p+h} în desvoltarea lui $F^p(V\Gamma^q)$, sau — conform cu observarea precedentă — schimbând pe h în $q + h$ în ecuaţia (1.83). Ea va avea deci forma (cu convenţia de a lua $V_{q+i} = 0$, dacă $i < 0$)

$$E_{p,q+h} V_{q+h} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\Phi^i_{p,q+h-i} V_{q+h-i}}{(q+h)(q+h-1)\ldots(q+h-i+1)} = 0 \tag{1.109}$$

şi va procura pe bicaracteristice, ca şi ecuaţia (1.58), singura integrală olomorfă în origine (pentrucă V_q, $V_{q+1}, \ldots, V_{p-1}$ vor fi de asemenea olomorfe)

$$V_{q+h} = -\frac{U_0}{4^p s^{p+h-1}} \int_0^s \ldots \int_0^s \frac{s^{h-1}}{U_0} \sum_{i=1}^{p} \frac{\Phi^i_{p,q+h-i} V_{q+h-i}}{(q+h)(q+h-1)\ldots(q+h-i+1)} ds \ldots ds \tag{1.110}$$

dacă o considerăm drept expresie a lui V_{q+h} în tot domeniul R.

Seria (1.108) şi seriile care se deduc din ea prin derivări parţiale vor fi evident uniform convergente în vecinătatea lui $\Gamma = 0$.

In acelaşi mod, pentru $h < p - q = m$, anulând coeficientul lui Γ^{q-p+h} în desvoltarea lui $F^p(\Gamma^q V \log \Gamma)$, sau — în virtutea aceleeaşi observări precedente — schimbând pe h în $q + h$ în ecuaţia (1.102) în care am avut grije să luăm coeficienţii U_i nuli şi $V_0 = V_1 = \ldots = V_{q-1} = 0$, vom obţine mai întâi pentru $h = 0$ ecuaţia pe care trebue să o verifice V_q, anume

$$E_{p,q} V_q = 0. \tag{1.111}$$

Pe bicaracteristice, această ecuaţie este o ecuaţie diferenţială omogenă de tip Fuchs cu o singură integrală olomorfă, egală cu unitatea în origine, condiţie pe care o vom impune lui V_q, astfel că vom avea ca şi pentru (1.48)

$$V_{q=e} \int_0^s \frac{1}{s}\left(\frac{M}{4} + q - p\right) ds \tag{1.112}$$

valoare pe care o vom lua pentru V_q în tot domeniul R.

In general, pentru $0 < h < m$, vom obține în același mod ecuația pe care trebue să o satisfacă V_{q+h} și care se scrie

$$E_{p,q+h}\, V_{q+h} + \sum_{i=1}^{q+h} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^{q+h-i}(p-i-1)!}{(p-q-h-1)!\,(q+h)!} \times \tag{1.113}$$

$$\times\, A_{q+h-i+j}\, \Psi^{i,j}_{p,2(q+h-i+j)}\, V_{q+h-i+j} = 0$$

cu convenția de a lua $V_0 = V_1 = \ldots = V_{q-1} = 0$.

Tot pe bicaracteristice, singura integrală olomorfă în origine a acestei ecuații este

$$V_{q+h} = \frac{-U_0}{4^p\,(q+h)!\,s^{p+h-1}} \int_0^s \cdots \int_0^s \frac{s^{h-1}}{U_0} \sum_{i=1}^{q+h} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{q+h-i}\, C^{q+h-i}_{p-i-1}\, (q+h-i+j)! \times \tag{1.114}$$

$$\times\, \Psi^{i,j}_{p,2(q+h-i+j)}\, V_{q+h-i+j}\, ds \ldots ds$$

pe care o vom lua ca valoare a lui V_{q+h} în tot domeniul R.

Ca și în primul caz secundar, dacă introducem în (1.79) valorile găsite pentru $V_{q+h}\,(h = 0,1,\ldots)$, termenii în Γ^{-m}, Γ^{-m+1}, $\ldots$ Γ^{-1} și în $\log\Gamma$ vor dispare și nu va rămâne decât o funcție olomorfă Ψ. Pentru a obține soluția elementară căutată, trebue deci să adăugăm expresiei

$$u = \Gamma^q\, V \log\Gamma$$

o soluție olomorfă oarecare a ecuației $F^p u = -\Psi$, a cărei existență rezultă din teorema lui Cauchy-Kowalewsky și pe care o vom nota cu w. Această funcțiune w, *funcțiunea de corecție* corespunzătoare acestui caz secundar, poate fi obținută într'un mod asemănător cu procedeele utilizate până acum. Vom pune

$$w = U_0 + U_1\,\Gamma + \ldots + U_h\,\Gamma^h + \ldots \tag{1.115}$$

și cum valoarea lui Ψ este

$$\Psi = \sum_{h=p}^{\infty} L^*_{h,p}(V)\, \Gamma^{h-p}$$

$L^*_{h,p}(V)$ obținându-se din expresia lui $L_{h,p}(V)$ din primul caz secundar schimbând pe h în $q+h$, dacă anulăm coeficientul lui Γ^{-p+h} în desvoltarea lui $F^p_w + \Psi$, vom avea

$$E_{p,h}\, U_h + \sum_{i=1}^{p} \frac{\Phi^i_{p,h-1}\, U_{h-i}}{h\,(h-1)\ldots(h-i+1)} + \frac{L^*_{h,p}(V)}{h\,(h-1)\ldots(h-p+1)} = 0. \tag{1.116}$$

Vom obține deci pentru $h \geqslant p$, singura integrală olomorfă în origine (în ipoteza că $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}$ sunt de asemenea olomorfe)

$$U_h = -\frac{U_0}{4^p s^{p+h-q-1}} \int_0^s \cdots \int_0^s \frac{s^{h-q-1}}{U_0} \left\{ \sum_{i=1}^{p} \frac{\Phi^i_{p,h-i} U_{h-i}}{h(h-1)\ldots(h-i+1)} + \right. \tag{1.117}$$

$$\left. + \frac{L^*_{h,p}(V)}{h(h-1)\ldots(h-p+1)} \right\} ds \ldots ds$$

care va fi luată ca valoare a lui U_h în tot domeniul R.

Termenii $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}$ vor rămâne astfel arbitrari, cu condiția de a fi funcțiuni olomorfe, ceea ce precizează nedeterminarea lui w.

Prin urmare, în cazul secundar $q \geqslant 0$, soluția elementară nu este de asemenea bine determinată. Ea este *regulată* pe $\Gamma = 0$, dacă $q > 0$ și ea are o *singularitate logaritmică* pe $\Gamma = 0$, dacă $q = 0$.

Trebue să observăm iarăși, ca și în primul caz secundar examinat, că această soluție poate fi în întregime caracterizată prin forma expresiei sale. Intr'un mod mai precis, *dacă ecuația* $F^p u = 0$ *admite o soluție de forma*

$$u = \Gamma^q V(x; a) \log \Gamma + w \qquad \left(q = -\frac{n}{2} + p \geqslant 0,\ n = 2m\right)$$

funcțiunea V (x ; a) *fiind regulată chiar pentru* x = a, *când* V (a ; a) = 1, *iar* w *fiind o funcțiune olomorfă în vecinătatea lui* $\Gamma = 0$, *atunci această soluție este în mod necesar o soluție elementară a ecuației considerate.*

Pentru aceasta, este suficient să reluăm calculele noastre care utilizează ecuații Fuchs cu o singură integrală olomorfă dacă $q = -\frac{n}{2} + p \geqslant 0$ și $n = 2m$, pentru a conchide că $F^p(V\Gamma^q) = 0$, că V este nu numai regulată, ci chiar olomorfă (în vecinătatea lui $\Gamma = 0$), având expresia de mai sus și în fine, că w trebue să fie o soluție olomorfă arbitrară a ecuației $F^p u = -\Psi$.

10. Relații între soluțiile elementare ale ecuațiilor Fu = 0, F²u = 0, ..., F^p u = 0. Să însemnăm, în general, cu u_j soluția elementară a ecuației $F^j u = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$.

Pentru cazul impar, vom face dela început două observări simple. In primul rând, dacă punem

$$R_j = \frac{1}{\xi_1(j)} \left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^{2j}$$

$$\xi_1(j) = \frac{\alpha' j^2}{\sqrt[j]{(2j\alpha'' + 1)^j + 1} - (2j\alpha'' + 1)}, \quad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

este sigur că seria corespunzătoare lui u_j este uniform convergentă pentru $|\Gamma| < R_j$. Din expresia $\xi_1(j)$ sau din ecuația cu o singură variație (1.75)

pe care ea o verifică (vom lua, evident, $p = j$ în această ecuație) urmează că $\xi_1(j+1) > \xi_1(j)$ și prin urmare

$$\frac{R_{j+1}}{R_j} = \frac{\xi_1(j)}{\xi_1(j+1)}\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^2 < 1,$$

astfel că vom avea

$$R_1 > R_2 > \ldots > R_p .$$

De asemenea, cum pentru orice u_j avem $q = -\frac{n}{2} + j$ și deci

$$U_0 = e^{-\int_0^s \frac{1}{s}\left(\frac{M}{4}+q-j\right)ds} = e^{-\int_0^s \frac{1}{2s}\left(\frac{M}{2}-n\right)ds} \tag{1.118}$$

rezultă că U_0 are aceeași valoare pentru toate soluțiile elementare u_j.

Aceste observări preliminare fiind făcute, ne propunem să calculăm pe Fu_p. Pentru $|\Gamma| < R_p$, vom putea scrie

$$u_p = U\Gamma^q, \quad Fu_p = q\Gamma^{q-1}\,\Omega_{q-1}\,U + \Gamma^q FU \qquad \left(q = -\frac{n}{2} + p\right)$$

Pe de altă parte, cum avem

$$\Omega_{q-1}\,U_0 = 4s\frac{dU_0}{ds} + [M + 4(q-1)]\,U_0 = 4(p-1)\,U_0 \tag{1.119}$$

se vede imediat că funcțiunea $\dfrac{Fu_p}{4q(p-1)}$, care este evident o soluție a ecuației $F^{p-1}u = 0$, are forma

$$\frac{Fu_p}{4q(p-1)} = U^*(x;a)\,\Gamma^{q-1}, \quad \left(q - 1 = -\frac{n}{2} + p - 1\right) \tag{1.120}$$

funcțiunea $U^*(x;a)$ fiind regulată pentru $|\Gamma| < R_p < R_{p-1}$ și reducându-se la unitate pentru $x = a$. Această proprietate fiind caracteristică pentru soluția elementară u_{p-1}, conchidem că

$$Fu_p = 4q(p-1)\,u_{p-1} = -2(n-2p)(p-1)\,u_{p-1}.$$

Aplicând de $p-1$ ori operatorul F lui u_p, găsim astfel relațiile

$$\begin{cases} Fu_p = -2(n-2p)(p-1)\,u_{p-1} \\ F^2u_p = 2^2(n-2p)(n-2p+2)(p-1)(p-2)\,u_{p-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^iu_p = (-2)^i(n-2p)(n-2p+2)\ldots(n-2p+2i-2)(p-1)(p-2)\ldots(p-i)\,u_{p-i} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{p-1}u_p = (-2)^{p-1}(n-2p)(n-2p+2)\ldots(n-4)(p-1)!\,u_1, \end{cases} \tag{1.121}$$

u_1 fiind în ultima relație tocmai soluția elementară a lui Hadamard pentru ecuația $Fu = 0$ în cazul impar.

Pentru cazul par, în cazul secundar algebrico-logaritmic ($q < 0$), observarea relativă la U_0 este evident valabilă și trebue să adăugăm o observare asemănătoare asupra domeniilor de convergență uniformă ale seriilor care dau pe V și care corespund diverselor soluții elementare u_j ($j = 1, 2, \ldots p$).

Dacă, printre toate soluțiile elementare u_p posibile, considerăm una oarecare dintre ele (ceea ce revine la a alege funcțiunea de corecție), vom putea scrie, într'o vecinătate suficient de mică a lui $\Gamma = 0$,

$$u_p = U\Gamma^q + V\log\Gamma + w \quad \left(q = -\frac{n}{2} + p < 0,\ n = 2m\right)$$

$$Fu_p = q\Gamma^{q-1}\Omega_{q-1}U + \Gamma^q FU + \frac{1}{\Gamma}\Omega_{-1}V + FV\log\Gamma + Fw$$

și se vede ușor, ca și în cazul impar, că funcțiunea $\dfrac{Fu_p}{4q(p-1)}$, care este o soluție a ecuației $F^{p-1}u = 0$ are forma

$$\frac{Fu_p}{4q(p-1)} = \Gamma^{q-1}U^*(x;a) + V^*(x;a)\log\Gamma + w^* \qquad (1.122)$$

$$\left(q - 1 = -\frac{n}{2} + p - 1,\ n = 2m\right)$$

$U^*(x;a)$, $V^*(x;a)$ fiind funcțiuni regulate, prima satisfăcând condiția $U^*(a;a) = 1$, iar w^* fiind o funcțiune olomorfă în vecinătatea lui $\Gamma = 0$. Această proprietate caracterizând o soluție elementară U_{p-1}, deducem de aici, întâi valabilitatea pentru acest caz secundar a primei relații (1.121) și apoi a tuturor acestor relații. Egalând coeficienții lui $\log\Gamma$ în cei doi membri ai relației (1.122), urmează de asemenea că relațiile (1.121) sunt valabile și pentru coeficienții termenilor logaritmici care intervin în diversele soluții elementare u_j.

In cazul secundar algebrico-logaritmic, relațiile (1.121) sunt deci valabile pentru anumite soluții elementare u_p, $u_{p-1}, \ldots, u_1$ și pentru coeficienții termenilor logaritmici corespunzători (u_1 este una din soluțiile elementare ale lui Hadamard pentru ecuația $Fu = 0$, în cazul par).

Pentru cazul secundar logaritmic ($q \geqslant 0$), observarea din cazurile precedente relativă la U_0 este acum valabilă pentru V_q, în virtutea relației (1.112) și trebue să adăugăm de asemenea o observare asemănătoare cu cele precedente asupra domeniilor de convergență uniformă ale seriilor care dau pe V și care corespund diverselor soluții elementare u_j ($j = 1, 2, \ldots, p$).

Dacă printre toate soluțiile elementare u_p posibile, considerăm una anumită dintre ele, calculul lui Fu_p, F^2u_p, $\ldots$, $F^{p-1}u_p$ cere să luăm anumite precauții. In vecinătatea lui $\Gamma = 0$, putem mai întâi scrie

$$u_p = \Gamma^q V\log\Gamma + w \qquad \left(q = -\frac{n}{2} + p \geqslant 0,\ n = 2m\right)$$

$$Fu_p = \frac{1}{\Gamma}\Omega_{-1}(\Gamma^q V) + F(\Gamma^q V)\log\Gamma + Fw =$$

$$= \Gamma^{q-1}\Omega_{2q-1}V + \Gamma^{q-1}(q\Omega_{q-1}V + \Gamma FV)\log\Gamma + Fw.$$

Cum însă $\Omega_{q-1}V_q = 4(p-1V)_q$, se vede ușor că funcțiunea $\dfrac{Fu_p}{4q(p-1)}$ care este o soluție a ecuației $F^{p-1}u = 0$, este de forma

$$\frac{Fu_p}{4q(p-1)} = \Gamma^{q-1}V^*(x;a)\log\Gamma + w^* \left(q-1 = -\frac{n}{2} + p - 1,\ n = 2m\right) \qquad (1.123)$$

$V^*(x;a)$ fiind o funcțiune regulată care satisface condiția $V^*(a;a)=1$, iar w^* fiind o funcțiune olomorfă în vecinătatea lui $\Gamma=0$, dacă $q>0$. Această proprietate caracterizând o anumită soluție elementară u_{p-1}, deducem relația

$$Fu_p = 4q\,(p-1)\,u_{p-1} = 4\,(p-m)\,(p-1)\,u_{p-1}.$$

Putem aplica de $q=p-m$ ori operatorul F lui u_p și vom obține astfel relațiile

$$\left.\begin{aligned} Fu_p &= 4\,(p-m)\,(p-1)\,u_{p-1}\\ F^2u_p &= 4^2\,(p-m)\,(p-m-1)\,(p-1)\,(p-2)\,u_{p-2}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F^{p-m}u_p &= 4^{p-m}\,(p-m)\,!\,(p-1)\,(p-2)\ldots(m+1)\,m\,u_m, \end{aligned}\right\} \tag{1.124}$$

ultima soluție elementară u_m având natural forma (deoarece $q=0$)

$$u_m = V^{**}(x;a)\log\Gamma + w^{**}$$

$V^{**}(x;a)$ fiind o anumită funcțiune regulată verificând condiția $V^{**}(a;a)=1$, iar w^{**} fiind o funcțiune olomorfă în vecinătatea lui $\Gamma=0$.

Pentru soluția elementară u_m, dacă $m>1$, vom avea de asemenea

$$Fu_m = \frac{1}{\Gamma}\,\Omega_{-1}\,V^{**} + F\,V^{**}\log\Gamma + F\,w^{**}$$

și cum primul coeficient V_0^{**}, din desvoltarea lui V^{**} după puterile lui Γ, verifică relația

$$\Omega_{-1}\,V_0^{**} = 4s\,\frac{dV_0^{**}}{ds} + (M-4)\,V_0^{**} = 4\,(m-1)\,V_0^{**},$$

rezultă că funcțiunea $\dfrac{Fu_m}{4\,(m-1)}$, care este o soluție a ecuației $F^{m-1}u=0$, are forma

$$\frac{Fu_m}{4\,(m-1)} = U_*(x;a)\,\Gamma^{-1} + V_*(x;a)\log\Gamma + w_* \tag{1.125}$$

$U_*(x;a)$, $V_*(x;a)$ fiind funcțiuni regulate, prima verificând condiția $U_*(a;a)=1$, iar w_* fiind o funcțiune olomorfă în vecinătatea lui $\Gamma=0$, ceea ce caracterizează o anumită soluție elementară u_{m-1} și deci

$$Fu_m = 4\,(m-1)\,u_{m-1}.$$

Prin același procedeu, găsim astfel

$$\begin{aligned} Fu_{m-1} &= -\,4.1\cdot(m-2)\cdot u_{m-2}\\ Fu_{m-2} &= -\,4.2\cdot(m-3)\cdot u_{m-3}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ Fu_3 &= -\,4\cdot(m-3)\cdot 2\cdot u_2\\ Fu_2 &= -\,4\cdot(m-2)\cdot 1\cdot u_1 \end{aligned}$$

și deci putem completa relațiile (1.124) cu următoarele

$$\begin{cases} F^{p-m+1}u_p = 4^{p-m+1}(p-m)!\,(p-1)(p-2)\ldots m(m-1)\,u_{m-1} \\ F^{p-m+2}u_p = -4^{p-m+2}(p-m)!\,(p-1)(p-2)\ldots(m-1)(m-2)u_{m-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F^{p-2}u_p = (-1)^{m-1}4^{p-2}(p-m)!\,(p-1\,(p-2)\ldots 3.2.(m-3)!u_2 \\ F^{p-1}u_p = (-1)^m 4^{p-1}(p-m)!\,(p-1)!\,(m-2)!\,u_1 \end{cases} \tag{1.126}$$

u_1 fiind în ultima relație o soluție elementară a lui Hadamard pentru ecuația $Fu = 0$, în cazul par.

Egalând coeficienții lui log Γ respectiv în cei doi membri ai relațiilor (1.123) și (1.125), deducem că relațiile (1.124) și (1.126) sunt de asemenea valabile pentru coeficienții termenilor logaritmici care intervin în fiecare soluție elementară u_j.

Deci, în cazul secundar logaritmic, între anumite soluții elementare $u_p, u_{p-1}, \ldots, u_m, u_{m-1}, \ldots, u_1$ și între coeficienții termenilor logaritmici corespunzători există relațiile(1.124) și (1.126).

Relațiile (1,121), (1.124) și (1.126) sunt extensiunea relațiilor găsite prin calcule directe de Miron Nicolescu în cazul funcțiunilor poliarmonice elementare [19, 20, 21] [1]).

11. Concluzie. In vederea aplicațiilor pe care le vom face în a doua parte a acestei lucrări, este necesar să rezumăm în mod succint rezultatele găsite mai sus. Cum aceste rezultate au fost obținute cu singura condiție $|g^{\alpha\beta}| \neq 0$, ele vor fi evident valabile pentru un operator F de tip hiperbolic sau de tip eliptic, astfel că le putem sintetiza în modul următor.

O ecuație lineară cu derivate parțiale de forma $F^p u = 0$ *în care operatorul* F *(scris sub formă invariantă) este de tip neparabolic și cu coeficienți analitici, admite o soluție elementară ce se poate construi cu ajutorul unui punct arbitrar* $P(a^1, \ldots, a^n)$, *din spațiul* E_n, *luat drept vârf al conoidului caracteristic.* $\Gamma = 0$.

I. *Cazul impar.* Dacă $n = 2m + 1$, *soluția elementară este algebrică*, complet determinată și are forma

$$u = \frac{U}{I^{m-p+\frac{1}{2}}}, \text{ cu } U = U_0 + U_1\Gamma + \ldots + U_h\Gamma^h + \ldots$$

funcțiunea U fiind olomorfă și reducându-se la unitate în punctul P, adică $U(x; a) = 1$, pentru $x = a$. Funcțiunile U_h sunt date de formulele (1.51) și (1.60).

Pe conoidul caracteristic $\Gamma = 0$, această soluție elementară are o *singularitate algebrică*, dacă $n > 2p$ sau ea este *nulă*, dacă $n < 2p$.

Soluțiile elementare ale ecuațiilor $Fu = 0$, $F^2u = 0$, ... $F^p u = 0$ sunt legate prin relațiile (1.121).

---

[1]) Există anumite diferențe între formulele noastre (1.124), (1.126) și formulele lui Miron Nicolescu [19], [20], diferențe semnalate și de G. Fichera și C. Tolotti, însă concordanța este perfectă cu acelea din [21].

II. *Cazul par.* Dacă $n = 2m$, soluția elementară este determinată cu excepția unei anumite funcțiuni olomorfe w în mod larg nedeterminată, pe care am numit-o *funcțiune de corecție* și ea are forme diferite prezentate în cele două cazuri:

a) *Cazul secundar algebrico-logaritmic.* Dacă $n > 2p$, pe lângă funcțiunea de corecție, soluția elementară conține o *parte algebrico-logaritmică* bine determinată și ea are forma

$$u = \frac{U}{\Gamma^{m-p}} + V \log \Gamma + w,$$

unde avem

$$U = U_0 + U_1 \Gamma + \ldots + U_{m-p-1} \Gamma^{m-p-1}$$

$$V = V_0 + V_1 \Gamma + \ldots + V_h \Gamma^h + \ldots$$

U, V ca și w, fiind funcțiuni olomorfe, prima reducându-se la unitate în punctul P, adică $U(x; a) = 1$, pentru $x = a$. Funcțiunile U_h sunt date de aceleași formule (1.51) și (1.60) pentru $h < -q = m - p$, iar funcțiunile V_h au expresiile (1.91), (1.103) și (1.84).

Pe conoidul caracteristic $\Gamma = 0$, această soluție elementară are o *singularitate algebrico-logaritmică.*

Alegând într'un mod convenabil funcțiunile de corecție, soluțiile elementare ale ecuațiilor $Fu = 0$, $F^2 u = 0$, $\ldots$, $F^p u = 0$ sunt legate de asemenea în acest caz secundar prin relațiile (1.121) care sunt valabile și pentru funcțiunile V ce corespund diferitelor soluții elementare u_j.

b) *Cazul secundar logaritmic.* Dacă $n \leqslant 2p$, soluția elementară conține pe lângă funcțiunea de corecție, *o parte pur logaritmică* bine determinată și ea are forma

$$u = \Gamma^{p-m} V \log \Gamma + w,$$

în care

$$V = V_{p-m} + V_{p-m+1} \Gamma + \ldots + V_{p-m+h} \Gamma_+^h \cdots$$

V, ca și w, fiind o funcțiune olomorfă, care se reduce în punctul P la unitate, adică $V(x; a) = 1$, pentru $x = a$. Funcțiunile V_{q+h} $(q = p - m)$ sunt date de formulele (1.112), (1.114) și (1.110).

Pe conoidul caracteristic $\Gamma = 0$, această soluție elementară este *regulată*, dacă $n < 2p$ (valoarea sa fiind în general diferită de zero) sau ea are o *singularitate logaritmică*, dacă $n = 2p$.

Alegând în mod convenabil funcțiunile de corecție, soluțiile elementare ale ecuațiilor $Fu = 0$, $F^2 u = 0$, $\ldots$, $F^p u = 0$ sunt legate prin relațiile (1.124) și (1.126), care sunt valabile și pentru coeficienții lui $\log \Gamma$ din expresiile acestor soluții elementare.

Este inutil să menționăm că pentru $p = 1$, soluțiile noastre elementare se reduc la acelea construite de H a d a m a r d pentru ecuațiile de ordinul II neparabolice.

PARTEA A DOUA

PROBLEMA LUI CAUCHY

12. Determinarea soluției printr'un procedeu de recurență. Chestiunea centrală a acestei lucrări este rezolvarea problemei lui Cauchy pentru ecuațiile cu derivate parțiale de forma

$$F^p u = \varphi, \tag{2.1}$$

unde F are expresia (1.9) considerată în prima parte și unde φ este o funcțiune cunoscută de variabilele x^α, regulată în domeniul R.

Mai mult, vom presupune că operatorul F este de tip hiperbolic normal. Atunci ecuația (2.1) aparține tipului total hiperbolic, dar dat fiind forma sa cu totul specială, vom zice că este o *ecuație polihiperbolică normală.*

Cu toate că avem la dispoziție aproape tot ce este necesar pentru a aborda această chestiune, este totuși util — înainte de a trece la examinarea directă a problemei — să dăm o soluție prin recurență, procedeu ce se impune dela sine, și care ne va sugera cum trebue alese datele cele mai convenabile când vom utiliza metoda directă, singura indicată pentru rezolvarea problemei, procurându-ne totdeodată o teoremă de existență și unicitate.

Pentru aceasta să punem

$$Fu = \overset{1}{\omega}, \quad F^2 u = \overset{2}{\omega}, \ldots, F^{p-1} u = \overset{p-1}{\omega} \tag{2.2}$$

sau altfel

$$Fu = \overset{1}{\omega}, \quad F\overset{1}{\omega} = \overset{2}{\omega}, \ldots, F\overset{p-2}{\omega} = \overset{p-1}{\omega}. \tag{2.3}$$

Cu aceste notații, ecuația (2.1) se scrie

$$F\overset{p-1}{\omega} = \varphi. \tag{2.4}$$

Problema lui Cauchy pentru ecuația (2.1) și o anumită suprafață S din spațiul E_n constă în determinarea unei soluții u a ecuației (2.1), cunoscând valorile pe S ale funcțiunii necunoscute u și ale derivatelor sale parțiale până la ordinul $2p-1$ inclusiv, luate în raport cu o singură variabilă independentă, de exemplu în raport cu x^1. Insă este știut că, dacă se cunosc pe suprafața S funcțiunea u și o derivată primă a lui u, atunci se cunosc pe S toate derivatele parțiale de primul ordin ale lui u [14] [1]) Pe urmă, cunoașterea pe S a unei derivate parțiale de ordinul II a lui u conduce la determinarea pe S a tuturor derivatelor secunde ale lui u. Continuând astfel, deducem că putem determina pe S toate derivatele parțiale ale lui u până la ordinul $2p-1$

[1]) p. 264.

inclusiv și deci că putem presupune cunoscute pe S funcțiunile $Fu, F^2u, \ldots, F^{p-1}u$ și toate derivatele lor parțiale prime.

Introducând noțiunea de derivată transversală la S, definită de relațiile

$$\frac{d}{d\nu} = \Delta(\cdot, f) = \frac{dx^\alpha}{d\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \frac{dx^\alpha}{d\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \pi_\alpha} = g^{\alpha\beta} \pi_\beta, \tag{2.5}$$

$f(x^1, \ldots, x^n) = 0$ fiind ecuația suprafeței S, iar π_α însemnând acum derivata $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$, evident că putem considera drept cunoscute pe S, odată cu funcțiunile $u, Fu, \ldots, F^{p-1}u$, derivatele lor transversale $\frac{du}{d\nu}, \frac{dFu}{d\nu}, \ldots, \frac{dF^{p-1}u}{d\nu}$, cu condiția de a alege ca suprafață S, care poartă datele, o suprafață necaracteristică, deoarece atunci direcția transversală la S nu-i este tangentă.

Aceste observări simple ne permit să alegem ca date ale lui Cauchy pentru ecuația (2.1) și suprafața S, în loc de datele clasice, valorile pe S ale lui $u, Fu, \ldots, F^{p-1}u$, și ale derivatelor lor transversale $\frac{du}{d\nu}, \frac{dFu}{d\nu}, \ldots, \frac{dF^{p-1}u}{d\nu}$.

Pentru a determina acum soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația (2.1), în ipoteza că operatorul F este de tip hiperbolic normal și că suprafața S care poartă datele este necaracteristică și are o direcție de spațiu în raport cu $\Gamma = 0$ — toate aceste condiții fiind suficiente pentru ca problema lui Cauchy să fie *corect pusă* pentru ecuația (2.4) — se știe din lucrările lui Hadamard că putem determina și într'un mod unic funcțiunea ϖ_{p-1}, dacă se dau pe S valorile lui ϖ_{p-1} și ale derivatei transversale $\frac{d\varpi_{p-1}}{d\nu}$. In aceste condiții, trebue să considerăm funcțiunea ϖ_{p-1} cunoscută în orice punct al spațiului sau cel puțin într'un anumit domeniu al spațiului.

In aceleași condiții, ultima ecuație (2.3) va determina pe ϖ_{p-2}, în același domeniu al spațiului, dacă se cunosc pe S funcțiunile ϖ_{p-2} și $\frac{d\varpi_{p-2}}{d\nu}$. Continuând astfel, ajungem la concluzia că dacă suprafața S și ecuația $Fu = \varphi$ sunt în așa fel încât problema lui Cauchy este corect pusă, *putem determina o integrală a ecuației polihiperbolice normale* $\mathrm{F}^p\mathrm{u} = \varphi$ *și numai una, dacă se cunosc valorile luate pe suprafața* S *de* u, $\mathrm{Fu}, \ldots, \mathrm{F}^{p-1}\mathrm{u}$ *și* $\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}\nu}, \frac{\mathrm{dFu}}{\mathrm{d}\nu}, \ldots, \frac{\mathrm{Fd}^{p-1}\mathrm{u}}{\mathrm{d}\nu}$.

Rezultă atunci, cu aceste date pe S, că determinarea integralei u necesită rezolvarea de p ori a problemei lui Cauchy pentru ecuația $F\varpi_{i-1} = \varpi_i$ și pentru suprafața S, unde trebue să luăm întâi $\varpi_p = \varphi$ și apoi de fiecare dată membrul al doilea ϖ_i, fiind furnizat de rezolvarea precedentă (la sfârșit se va lua $\varpi_0 = u$).

Problema lui Cauchy pentru ecuația (2.1) și suprafața S poate fi astfel considerată ca rezolvată, însă procedeul recurent care ne-a procurat soluția, absolut analog al celui relativ la problema lui Riquier pentru funcțiunile poliarmonice, ne demonstrează numai *existența și unicitatea soluției*, dar are desavantajul că nu ne dă nicio indicație asupra structurii sale.

Mai mult decât atât, rezolvarea problemei pe acestă cale cere alte condiţii pe care trebue să le impunem lui φ, datelor pe S şi funcţiunii necunoscute u, condiţii care rezultă din acelea ce se introduc în mod obişnuit relativ la o ecuaţie hiperbolică normală şi care au fost precizate de Hadamard. Pentru ceea ce urmează, este însă important faptul că am demonstrat existenţa şi unicitatea soluţiei pentru ecuaţia polihiperbolică normală $F^p u = \varphi$, în cazul când problema lui Cauchy este corect pusă pentru ecuaţia $Fu = \varphi$ şi suprafaţa S, ceea ce nu ne va mai obliga să facem *sinteza soluţiei* obţinute pe cale directă.

Condiţiile pe care trebue să le impunem pe rând lui φ, datelor pe S şi funcţiunii necunoscute u vor apare mai departe în mod clar prin rezolvarea directă a problemei, care ne va conduce la *soluţia sa efectivă*. Pentru aceasta, este necesar să introducem o formulă fundamentală adecvată soluţiei elementare construită mai înainte, care va fi în măsură să ne procure dintr'odată integrala căutată u.

13. Formula fundamentală. Formula pe care o vom introduce face trecerea dela un domeniu cu n dimensiuni la frontiera acestui domeniu şi ea derivă din formula generalizată a lui Green. Ea va pune în evidenţă utilitatea soluţiei elementare şi avantajele care decurg din structura sa analitică.

Cum toate calculele noastre relative la soluţia elementară sunt invariante faţă de o schimbare oarecare de variabile independente, este convenabil să scriem această formulă tot sub formă invariantă. Pentru aceasta, să reamintim câteva rezultate privind noţiuni curente în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale lineare de ordinul II şi de tip neparabolic.

Să considerăm polinomul diferenţial de ordinul II

$$Fu = g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\beta} u + h^{\alpha} \nabla_{\alpha} u + ku \qquad (cu\,|\,g^{\alpha\beta}\,| \neq 0) \tag{2.6}$$

şi polinomul diferenţial adjunct

$$G\varrho = g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\beta} \varrho - \nabla_{\alpha} (h^{\alpha} \varrho) + k\varrho\,, \tag{2.7}$$

u şi ϱ fiind funcţiuni de x^{α}, regulate în domeniul R şi invariante faţă de orice schimbare de variabile independente, ceea ce ne dă dreptul să considerăm pe Fu şi $G\varrho$ de asemenea ca nişte invarianţi. Relaţia dintre Fu şi $G\varrho$ este în mod vizibil reciprocă, adică dacă $G\varrho$ este polinomul diferenţial adjunct al lui Fu, atunci invers, Fu este polinomul diferenţial adjunct al lui $G\varrho$, ceea ce rezultă şi din relaţia pe care o putem uşor obţine

$$\varrho Fu - uG\varrho = \nabla_{\alpha} (\varrho g^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} u - u g^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} \varrho + h^{\alpha} u\varrho) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\,g\,|}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left[\sqrt{|\,g\,|} \left(\varrho g^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x^{\beta}} - u g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varrho}{\partial x^{\beta}} + h^{\alpha} u\varrho \right) \right].$$

Să considerăm în spaţiul E_n un domeniu T cu n dimensiuni, simplu conex şi în întregime la distanţă finită, mărginit de una sau mai multe varietăţi

cu $n-1$ dimensiuni, regulate în sensul lui Hadamard și pe care le vom nota cu S. Introducând elementul de volum $d\tau$ al spațiului riemannian E_n

$$d\tau = \sqrt{|g|}\, dx^1 \ldots, dx^n \tag{2.8}$$

vom putea scrie, în virtutea formulei lui Green în spațiul cu n dimensiuni,

$$\int_T (\varphi Fu - uG\varphi)\, d\tau = \int_T \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\sqrt{|g|}\left(\varphi g^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x^\beta} - u g^{\alpha\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} + h^\alpha u\varphi\right)\right] dx^1 \ldots dx^n =$$

$$= \int_S (-1)^{\alpha-1}\sqrt{|g|}\left(\varphi g^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x^\beta} - u g^{\alpha\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} + h^\alpha u\varphi\right) dx^1 \ldots dx^{\alpha-1}\, dx^{\alpha+1} \ldots dx^n,$$

forma exterioară de gradul n, scrisă sub integrala multiplă de ordinul n relativă la T, fiind tocmai diferențiala exterioară a aceleia scrisă sub integrala multiplă de ordinul $n-1$, întinsă la S. Se presupune, în plus, că T și S sunt orientați în modul următor [2] [1]).

Se orientează domeniul T construind un n—edru cu n vectori linear independenți aranjați în ordinea $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$, pe care convenim să-l numim n—edru direct, iar volumul construit cu acești vectori va fi considerat ca pozitiv. Se va orienta de asemenea suprafața S, ducând prin unul oarecare din punctele sale n vectori $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \ldots, \bar{\varepsilon}_n$, formând un n—edru direct, dintre care primul este exterior lui T (de exemplu, dirijat după normala exterioară la S), ceilalți fiind tangenți lui S, iar aria construită cu acești ultimi vectori va fi privită ca pozitivă, ceea ce orientează suprafața S.

Dacă $f(x^1, \ldots, x^n) = 0$ este ecuația suprafeței S, vom defini elementul de suprafață $d\sigma$ prin relațiile

$$\pi_\alpha\, d\sigma = (-1)^\alpha \sqrt{|g|}\, dx^1 \ldots dx^{\alpha-1}\, dx^{\alpha+1} \ldots dx^n \quad \left(\pi_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha};\ \alpha = 1, \ldots, n\right) \tag{2.9}$$

funcțiiunile π_α fiind parametrii directori ai normalei interioare la S și definiția fiind justificată prin faptul că în membrul al doilea, în baza unei observări a lui K o e n i g s, figurează componentele covariante ale unui vector [15] [2]).

Ținând seamă de convenția asupra orientării lui T și S și de expresia (2.5) a derivatei transversale la S, obținem imediat formula

$$\int_T (\varphi Fu - uG\varphi)\, d\tau + \int_S \left(\varphi\frac{du}{d\nu} - u\frac{d\varphi}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha u\varphi\right) d\sigma = 0, \tag{2.10}$$

unde trebue totdeauna să construim derivatele transversale cu ajutorul parametrilor directori ai normalei interioare la S. In formula (2.10), care este cea utilizată de H a d a m a r d pentru ecuațiile de ordinul II, elementele $d\tau$, $d\sigma$ și cantitățile de integrat sunt niște invarianți. In plus, pentru ca ea să fie valabilă, trebue să admitem că funcțiunile u și φ precum și derivatele lor parțiale prime sunt continue și uniforme în domeniile de integrare (în ipoteza subînțeleasă că $g^{\alpha\beta}$, h^α, k sunt olomorfe).

---

[1]) p. 206.

[2]) p. 447.

Zic că avem în general formula

$$\int_T (\varphi F^p u - u G^p \varphi)\, d\tau + \sum_{i=0}^{p-1} \int_S \left(G^{p-i-1} \varphi \frac{dF^i u}{d\nu} - \right.$$
$$\left. - F^i u \frac{dG^{p-i-1}\varphi}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha G^{p-i-1} \varphi F^i u \right) d\sigma = 0 \tag{2.11}$$

funcțiunile u și φ satisfăcând condiției de a admite derivate parțiale până la ordinul $2p-1$, continue și uniforme în T și pe S.

In adevăr, este clar că relația (2.11) este valabilă pentru $p = 1$, fiindcă atunci dăm peste formula (2.10). Raționând prin recurență, vom presupune că ea este valabilă pentru o valoare oarecare a lui p și vom demonstra că ea rămâne valabilă pentru valoarea consecutivă $p + 1$.

In acest scop, substituind lui φ pe $G^p\varphi$ în (2.10) și apoi lui u, pe Fu, în (2.11) și sumând, vom obține — cum este ușor de văzut — aceeași relație (2.11) în care p este schimbat în $p + 1$, ceea ce probează că această relație este generală. Trebue însă să observăm că prima substituție pe care am făcut-o cere ca derivatele parțiale prime ale lui $G^p\varphi$ să fie uniforme și continue, iar a doua impune de asemenea o condiție similară derivatelor parțiale de ordinul $2p - 1$ ale lui Fu. Aceasta înseamnă că relația (2.11), în care p este schimbat în $p + 1$, este valabilă dacă u și φ și derivatele lor parțiale până la ordinul $2p + 1$ sunt continue și uniforme în domeniile de integrare — condiție absolut analoagă celei impuse lui u și φ în formula (2.11) cu valoarea lui p neschimbată.

Relația integrală (2.11), care este *formula fundamentală* pe care o vom utiliza în cele ce urmează, este extensiunea formulei lui A. Gutzmer [20] [1]) ce intervine în problemele la frontieră din teoria funcțiunilor poliarmonice și la care, de altfel, se reduce dacă spațiul E_n este euclidian, dacă F coincide cu laplacianul și dacă am făcut o schimbare convenabilă de variabile independente.

14. Introducerea soluției elementare. Vom presupune, ca mai sus, că ecuația (2.1) aparține tipului polihiperbolic normal într'un anumit domeniu R al spațiului E_n, ceea ce înseamnă că putem aduce forma caracteristică

$$A = g^{\alpha\beta}\pi_\alpha\pi_\beta,$$

printr'o substituție lineară și omogenă asupra parametrilor π_α, la o formă patratică având toate patratele de același semn, afară de unul dintre ele.

Cu variabilele normale ξ^α luate ca variabile independente, conoidul caracteristic $\Gamma = 0$ fiind un con patratic ordinar, care — după o observare a lui C o u l o n [5] [2]) și în ipoteza specificată mai sus — posedă două pânze și împarte spațiul în trei regiuni, dintre care două interioare, iar a treia exterioară, urmează că aceste proprietăți calitative rămân valabile și pentru spațiul primitiv E_n, dat fiind că transformarea (x,ξ) este regulată. Vom presupune de asemenea că am scris ecuația (2.1) astfel încât să avem $\Gamma > 0$ în regiunile sale

[1]) p. 26.
[2]) p. 30.

interioare, ceea ce cere ca forma caracteristică A să aibă un patrat pozitiv, iar celelalte rămase, negative. In aceste condiții, discriminantul $D = |g^{\alpha\beta}| = \frac{1}{g}$ va fi pozitiv.

Printr'o transformare regulată convenabilă asupra variabilelor x^α, care aduce cu sine o substituție lineară asupra variabilelor normale ξ^α, ecuația conoidului caracteristic se va scrie atunci

$$\Gamma = (\xi^n)^2 - (\xi^1)^2 - \ldots - (\xi^{n-1})^2 = 0, \tag{2.12}$$

unde am păstrat literele ξ^α pentru noile variabile, deoarece nu există nicio teamă de ambiguitate.

Inainte de a trece mai departe, vom introduce noi ipoteze privind rând pe rând suprafața S care poartă datele, însăși aceste date, funcțiunea necunoscută u și funcțiunea cunoscută φ, toate aceste ipoteze impunându-se în calculele ce vor urma.

Vom presupune mai întâi că este vorba de *problema interioară* adică una din pânzele conoidului caracteristic Γ (*pânza retrogradă*, în nomenclatura lui Hadamard) determină pe S o porțiune S_0, complet conținută în S, această porțiune S_0 și susnumita pânză a lui Γ formând împreună frontiera unui anumit domeniu T din spațiul E_n, ceea ce este posibil dacă operatorul F este de tip hiperbolic normal. Pe lângă aceasta, suprafața S care poartă datele va fi presupusă regulată în sensul lui Hadamard, ceea ce înseamnă că una oarecare din coordonate admite, în raport cu celelalte derivate parțiale, până la un anumit ordin convenabil.

Dacă punem $n = 2m + 1$, în cazul unui număr impar de variabile independente și $n = 2m$, în cazul unui număr par de variabile independente, vom putea exprima într'un mod mai succint celelalte ipoteze pe care trebue să le introducem.

In ceea ce privește datele pe S, adică valorile pe această suprafață luate de $u, Fu, \ldots, F^{p-1}u, \frac{du}{d\nu}, \frac{dFu}{d\nu}, \ldots, \frac{dF^{p-1}u}{d\nu}$, vom presupune în general că $F^i u$ și $\frac{dF^i u}{d\nu}$ admit derivate parțiale până la ordinul $m - i > 0$, sau că ele sunt numai continue dacă $m - i \leqslant 0, (i = 0, 1\ldots, p-1)$.

De asemenea, funcțiunea necunoscută u va fi presupusă că admite derivate parțiale până la ordinul N, numărul N fiind cel mai mare număr dintre cele două numere $m + p - 1$ și $2p$; în fine, funcțiunea cunoscută φ va fi presupusă că posedă derivate parțiale până la ordinul $m - p > 0$ sau că ea este numai continuă, dacă $m - p \leqslant 0$.

Fie acum $P(a^1, \ldots, a^n)$ un punct al domeniului R, în care ne propunem să calculăm valoarea lui u. Conoidul caracteristic determină pe S, o porțiune S_0 și această porțiune, împreună cu pânza retrogradă a lui $\Gamma = 0$, formează frontiera domeniului T [1]).

Dacă $\varepsilon > 0$ este un număr arbitrar de mic, suprafața Γ_ε, de ecuație $\Gamma = \varepsilon$, va conține o pânză în mod necesar interioară lui T și această pânză va deter-

[1]) O figură schematică poate fi ușor făcută.

mina pe S_0 o porțiune S_ε, complet interioară lui S_0. Suprafețele Γ_ε și S_ε vor delimita un alt domeniu T_ε, care va tinde la T, când $\varepsilon = 0$.

Să înconjurăm punctul P cu o suprafață Σ_η a cărei parte utilă este cea interioară lui T și a cărei ecuație în sistemul de variabile ξ^α utilizat în ecuația (2.12) se scrie

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \ldots + (\xi^\eta)^2 = \eta^2, \tag{2.13}$$

$\eta > 0$ fiind un alt număr arbitrar de mic. Luând pe ε suficient de mic, putem presupune că o porțiune a lui T_ε este interioară lui Σ_η și deci că Γ_ε determină pe Σ_η o porțiune $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$ depinzând și de ε și de η.

Numind Γ_0 porțiunea determinată de S_0 și Σ_η pe pânza retrogradă a lui $\Gamma=0$, vom însemna cu T_η domeniul a cărui frontieră este formată din S_0, Σ_η, Γ_0 și cu $T_{\varepsilon,\eta}$ acela delimitat de S_ε, $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$ și Γ_ε.

Dacă în formula fundamentală (2.11) luăm pe v egală cu soluția elementară a ecuației adjuncte $G^p v = 0$, construită cu ajutorul punctului $P(a^1, \ldots, a^n)$ și pentru u soluția ecuației (2.1) care satisface condițiile de regularitate impuse și condițiile la limită ale lui Cauchy, această formulă va fi sigur valabilă dacă o aplicăm domeniului $T_{\varepsilon,\eta}$ și frontierei sale $F_{\varepsilon,\eta}$ formată din S_ε, $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$, și Γ_ε, deoarece în $T_{\varepsilon,\eta}$ și pe $F_{\varepsilon,\eta}$ sunt verificate condițiile de continuitate și uniformitate pentru u, v și derivatele lor parțiale. Deci putem scrie în toate cazurile posibile

$$\int_{T_{\varepsilon,\eta}} v\varphi d\tau + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{F_{\varepsilon,\eta}} \left(G^{p-i-1} v \frac{dF^i u}{d\nu} - F^i u \frac{dG^{p-i-1} v}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha G^{p-i-1} {}_\nu F^i u \right) d\sigma = 0. \tag{2.14}$$

Trebue să examinăm fiecare din termenii formulei precedente și să facem să tindă respectiv ε și η către zero. Este clar că trebue să distingem două cazuri, după cum numărul variabilelor independente este impar sau par.

I. CAZUL UNUI NUMĂR IMPAR DE VARIABILE INDEPENDENTE

15. Soluția efectivă în cazul impar. Să presupunem deci $n = 2m + 1$ și să considerăm întâi cazul $n = 2m + 1 > 2p$, când soluția elementară este singulară pe conoidul $\Gamma = 0$. Expresia sa, pentru ecuația adjunctă $G^p v = 0$, va fi

$$v = v_p(x; a) = \frac{V_p(x; a)}{\Gamma^{m-p+\frac{1}{2}}},$$

$V_p(x; a)$ fiind o funcțiune olomorfă de variabilele x^α, care este egală cu unitatea pentru $x = a$ și unde am pus în evidență indicele p în v_p și $V_p(x; a)$, pentru a arăta că această soluție elementară corespunde ecuației $G^p v = 0$ și deci pentru a o deosebi de soluțiile elementare ale ecuațiilor $G^{p-1} v = 0, \ldots,$ $Gv = 0$, care vor interveni de asemenea în cele ce urmează.

Să ducem prin $P(a^1, \ldots, a^n)$ geodezicele interioare lui T. Ele vor depinde de $n-1$ parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ și pe fiecare din ele un punct va fi determinat prin valoarea lui Γ, astfel că putem considera, oricare ar fi paritatea lui n, că un punct arbitrar din T este definit prin coordonatele curbilinii $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \Gamma$. Este de observat totuși că, în general, această reprezentare nu este valabilă decât în vecinătatea lui $\Gamma = 0$, de exemplu în domeniul cuprins între $\Gamma = 0$ și $\Gamma = \alpha$, unde $\alpha > \varepsilon$ este un număr pozitiv suficient de mic, dar cum se va vedea mai departe, ceea ce este esențial este tocmai posibilitatea acestei reprezentări în vecinătatea lui $\Gamma = 0$.

Să însemnăm cu T_α porțiunea domeniului $T_{\varepsilon,\eta}$ pentru care $\Gamma \geqslant \alpha$ și cu $T^*_{\varepsilon,\eta}$, cealaltă porțiune a aceluiași domeniu; pe urmă, să numim S_α partea lui S_ε care aparține frontierei lui T_α și S^*_ε cealaltă parte a lui S_ε, aparținând frontierei lui $T^*_{\varepsilon,\eta}$. Putem presupune că am ales $\eta < \alpha$ și deci că Σ_η nu întâlnește pe T_α.

α) In aceste ipoteze, putem scrie

$$\int_{T_{\varepsilon,\eta}} \rho\varphi d\tau = \int_{T_\alpha} \rho_p(x; a)\,\varphi d\tau + \int_{T^*_{\varepsilon,\eta}} \rho_p(x; a)\,\varphi d\tau \tag{2.15}$$

integrala întinsă la T_α nedepinzând de ε și rămânând deci finită când ε tinde către zero.

In domeniul $T^*_{\varepsilon,\eta}$ și cu sistemul de coordonate curbilinii $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \Gamma$, vom avea

$$\rho_p(x; a) = \frac{V_p(\lambda; \Gamma)}{\Gamma^{m-p+\frac{1}{2}}}, \quad d\tau = \sqrt{|g|}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m}\, d\Gamma$$

$V_p(\lambda; \Gamma)$ și g fiind funcțiuni olomorfe de λ și Γ, ultima dintre ele fiind diferită de zero în R.

Vom putea deci scrie

$$\int_{T^*_{\varepsilon,\eta}} \rho_p(x; a)\,\varphi d\tau = \int_{D_{2m}} \int_\varepsilon^\alpha \frac{V_p(\lambda;\Gamma)\,\varphi(\lambda;\Gamma)\sqrt{|g|}}{\Gamma^{m-p+\frac{1}{2}}}\, d\Gamma\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m} \tag{2.16}$$

integrala multiplă de ordinul $2m$ raportându-se la domeniul D_{2m} de variație al lui $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m}$, domeniu care depinde evident de ε.

Să presupunem că funcțiunea φ admite derivate parțiale până la ordinul $m-p$. Funcțiunile V_p și g fiind olomorfe, deducem că funcțiunea $V_p\,\varphi\sqrt{|g|}$ admite de asemenea derivate parțiale până la ordinul $m-p$. Astfel fiind, pentru $m > p$, vom putea scrie după formula lui Taylor

$$V_p(\lambda; \Gamma)\,\varphi(\lambda; \Gamma)\sqrt{|g|} = \sum_{i=0}^{m-p-1} a_i(\lambda)\,\Gamma^i + a_{m-p}(\lambda; \theta\Gamma)\,\Gamma^{m-p}$$

funcțiunile a calculându-se prin derivări parțiale, iar numărul $0 < \theta < 1$ depinzând eventual de λ.

Integrând în raport cu Γ și punând

$$-\left(i - m + p + \frac{1}{2}\right) A_i(\varepsilon) = \int_{D_{2m}} a_i(\lambda)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m} \quad (i = 0,1, \ldots, m-p-1)$$

integrala (2.16) se scrie

$$\int_{T^*_{\varepsilon,\eta}} \varphi_p(x;a)\,\varphi\,d\tau = \sum_{i=0}^{m-p-1} A_i(\varepsilon)\,\varepsilon^{i-m+p+\frac{1}{2}} - \sum_{i=0}^{m-p-1} A_i(\varepsilon)\,\alpha^{i-m+p+\frac{1}{2}} + \tag{2.17}$$

$$+ \int_{D_{2m}} \int_{\varepsilon}^{\alpha} \frac{a_{m-p}(\lambda;\theta\Gamma)}{\sqrt{\Gamma}}\,d\Gamma\,d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m},$$

ultimul termen din partea a doua tinzând către o valoare finită, când $\varepsilon \to 0$.

Integrala (2.15) va avea deci expresia

$$\int_{T_{\varepsilon,\eta}} \varphi\varphi\,d\tau = \sum_{i=0}^{m-p-1} A_i(\varepsilon)\,\varepsilon^{i-m+p+\frac{1}{2}} + A(\varepsilon), \tag{2.18}$$

coeficienții $A_i(\varepsilon)$ și $A(\varepsilon)$ tinzând către limite finite, când $\varepsilon \to 0$ și valorile acestor limite rezultând din relațiile de mai sus. Pentru $m = p$, trebue evident să luăm în relația (2.17) coeficienții $A_i(\varepsilon)$ nuli, integrala (2.16) având sens în acest caz.

β) Trecând la integralele relative la $F_{\varepsilon,\eta}$, putem scrie

$$\sum_{i=0}^{p-1} \int_{F_{\varepsilon,\eta}} \left(G^{p-i-1}\varphi \frac{dF^i u}{d\nu} - F^i u \frac{dG^{p-i-1}\varphi}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha G^{p-i-1}\varphi F^i u \right) d\sigma =$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} \int_{S_\varepsilon} + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\Sigma_{\varepsilon,\eta}} + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\Gamma_\varepsilon} \tag{2.19}$$

și va trebui să considerăm separat integralele întinse la S_ε, $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$ și Γ_ε.

Pentru integralele întinse la S_ε, vom avea

$$\sum_{i=0}^{p-1} \int_{S_\varepsilon} = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{S_\alpha} + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{S^*_\varepsilon} \tag{2.20}$$

integralele relative la S_η nedepinzând de ε și deci rămânând finite când $\varepsilon \to 0$.

Pentru a evalua integralele întinse la S^*_ε, să presupunem că suprafața S are ecuația $f = 0$. Relațiile (1.121) ne permit să scriem (deoarece $\varphi = \varphi_p$)

$$G^{p-i-1}\varphi = \alpha_{p-i-1}\,\varphi_{i+1} = \alpha_{p-i-1} \frac{V_{i+1}(x;a)}{\Gamma^{m-i-\frac{1}{2}}},$$

α_{p-i-1} fiind o constantă numerică a cărei valoare este

$$\alpha_{p-i-1} = (-2)^{p-i-1}(n-2p)(n-2p+2)\ldots(n-2i-4)(p-1)(p-2)\ldots(i+1), \qquad (\alpha_0 = 1)$$

iar $V_{i+1}(x;a)$ fiind o funcțiune olomorfă de x^α care este egală cu unitatea pentru $x = a$. Luând derivata transversală la S, vom avea

$$\frac{dG^{p-i-1}\varphi}{d\nu} = \alpha_{p-i-1}\left[\frac{\Delta(V_{i+1}, f)}{\Gamma^{m-i-\frac{1}{2}}} - \left(m - i - \frac{1}{2}\right) \frac{V_{i+1}\,\Delta(\Gamma, f)}{\Gamma^{m-i+\frac{1}{2}}} \right].$$

Să reprezentăm punctele spațiului E_n vecine cu S_ε^* cu ajutorul unui sistem de coordonate curbilinii $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}, \Gamma, f$. Cum avem $\pi_n = 1$, în noul sistem de coordonate vom putea scrie

$$d\sigma = -\sqrt{|g|}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m-1}\, d\Gamma$$

și prin urmare

$$\sum_{i=0}^{p-1} \int_{S_\varepsilon^*} = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{D_{2m-1}} \int_\varepsilon^\alpha \alpha_{p-i-1} \left[F^i u \left(\frac{\Delta(V_{i+1}, f)}{\Gamma^{m-i-\frac{1}{2}}} - \left(m - i - \frac{1}{2} \right) V_{i+1} \frac{\Delta(\Gamma, f)}{\Gamma^{m-i+\frac{1}{2}}} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{V_{i+1}}{\Gamma^{m-i-\frac{1}{2}}} \left(\frac{dF^i u}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha F^i u \right) \right] \sqrt{|g|}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m-1}\, d\Gamma \tag{2.21}$$

integrala multiplă de ordinul $2m-1$ referindu-se la domeniul de variație D_{2m-1} al lui $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m-1}$, domeniu care depinde de ε, iar funcțiunile V_{i+1}, h^α, g fiind funcțiuni olomorfe de λ, Γ, f.

Să presupunem că datele pe S, anume funcțiunile $F^i u$ și $\frac{dF^i u}{d\nu}$ admit derivate parțiale până la ordinul $m-i$ $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$. Funcțiunile V_{i+1}, h^α, g fiind olomorfe, dacă utilizăm iarăși formula lui Taylor, putem scrie funcțiunea de integrat (după ce am intervertit semnele de integrare cu semnul Σ) sub forma

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{\Gamma^{m-i+\frac{1}{2}}} \left(\sum_{j=0}^{m-i-1} b_j(\lambda)\, \Gamma^j + b_{m-i}(\lambda; \theta_i \Gamma)\, \Gamma^{m-i} \right),$$

funcțiunile b calculându-se prin derivări, iar $0 < \theta_i < 1$ depinzând eventual de λ. Integrând în raport cu Γ și punând

$$-\left(i + j - m + \frac{1}{2} \right) B_j(\varepsilon) = \int_{D_{2m-1}} b_j(\lambda)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m-1} \quad (j = 0, 1, \ldots, m-i-1)$$

suma (2.21) se poate scrie

$$\sum_{i=0}^{p-1} \int_{S_\varepsilon^*} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{m-i-1} B_j(\varepsilon)\, \varepsilon^{i+j-m+\frac{1}{2}} - \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{m-i-1} B_j(\varepsilon)\, \alpha^{i+j-m+\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{p-1} \int_{D_{2m-1}} \int_\varepsilon^\alpha \frac{b_{m-i}(\lambda; \theta_i \Gamma)}{\sqrt{\Gamma}}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m-1}\, d\Gamma \tag{2.22}$$

ultimul termen din membrul al doilea tinzând către o limită finită când $\varepsilon \to 0$.

Vom avea, prin urmare

$$\sum_{i=0}^{p-1} \int_{S_\varepsilon} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{m-i-1} B_j(\varepsilon)\, \varepsilon^{i+j-m+\frac{1}{2}} + B(\varepsilon) \tag{2.23}$$

coeficienții $B_j(\varepsilon)$ și $B(\varepsilon)$ tinzând către limite finite când $\varepsilon \to 0$, iar valorile acestor limite rezultând din calculele precedente.

γ) Integralele întinse la $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$ se evaluează în mod analog, cu diferența că nu vom mai descompune această suprafață în două părți înainte de a introduce noi coordonate curbilinii, deoarece pentru toate punctele lui $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$ și pentru acelea din vecinătatea sa, avem prin ipoteză $\Gamma < \alpha$. Relația (2.21) va fi încă valabilă, cu condiția de a scrie $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$ în loc de S_ε^* și de a presupune că $f = 0$ este de data aceasta ecuația lui $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$, ceea ce va schimba de asemenea domeniul D_{2m-1}. Introducând apoi ipoteza că funcțiunea necunoscută u admite derivate parțiale până la ordinul $m + p - 1$, vom obține ca mai sus

$$\sum_{i=0}^{p-1} \int_{\Sigma_{\varepsilon,\eta}} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{m-i-1} C_j(\varepsilon)\varepsilon^{i+j-m+\frac{1}{2}} + C(\varepsilon) \tag{2.24}$$

coeficienții $C_j(\varepsilon)$ și $C(\varepsilon)$ fiind bine determinați și tinzând către limite finite când $\varepsilon \to 0$.

δ) Pentru a calcula integralele întinse la Γ_ε, conform relației (1.38), vom observa că avem în acest caz

$$\frac{dG^{p-i-1}\varphi}{d\nu} = \frac{\alpha_{p-i-1}}{\Gamma^{m-i-\frac{1}{2}}}\left[\Delta(V_{i+1}, \Gamma) - 4\left(m - i - \frac{1}{2}\right)V_{+1}\right].$$

Utilizând din nou sistemul de coordonate curbilinii $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m}, \Gamma$, în care

$$d\sigma = -\sqrt{|g|}\, d\lambda_1, \ldots d\lambda_{2m},$$

vom putea scrie

$$\sum_{i=0}^{p-1} \int_{\Gamma_\varepsilon} = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{D_{2m}^*} \frac{\alpha_{p-i-1}}{\Gamma^{m-i-\frac{1}{2}}}\left[F^i u\left(\Delta(V_{i+1}, \Gamma) - 4\left(m - i - \frac{1}{2}\right)V_{i+1}\right) - \right.$$

$$\left. - V_{i+1}\left(\frac{dF^i u}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha F^i u\right)\right]\sqrt{|g|}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m}$$

integrala multiplă de ordinul $2m$ raportându-se la domeniul de variație D_{2m}^* al lui $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m}$, domeniu care depinde de ε, iar V_{i+1}, h^α, g fiind funcțiuni olomorfe de λ, Γ.

Să presupunem că $F^i u$ admite derivate parțiale până la ordinul $m - i$, ceea ce revine la ipoteza că u admite derivate parțiale până la ordinul $m + i$ și cum $i = 0, 1, \ldots, p - 1$, urmează că trebue să admitem că funcțiunea necunoscută u posedă derivate parțiale până la ordinul $m + p - 1$. Această ipoteză a mai fost introdusă relativ la integralele întinse la $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$, fără a face un calcul mai amănunțit, cum vom face acum.

Intervertind semnul de integrare și semnul Σ, cantitatea de integrat care nu conține pe $\frac{dF^i u}{d\varphi}$ poate fi scrisă după formula lui Taylor

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{\Gamma^{m-i-\frac{1}{2}}}\left(\sum_{j=0}^{m-i-1} d_j'(\lambda)\Gamma^j + d_{m-i}'(\lambda; \theta_i'\Gamma)\Gamma^{m-i}\right), \quad (0 < \theta_i' < 1)$$

iar aceea care conține pe $\frac{dF^i u}{d\nu}$ se poate de asemenea scrie

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{\Gamma^{m-i-\frac{1}{2}}} \left(\sum_{j=0}^{m-i-2} d_j''(\lambda)\Gamma^j + d_{m-i-1}''(\lambda; \theta_i'' \Gamma)\Gamma^{m-i-1} \right). \quad (0 < \theta_i'' < 1)$$

Funcțiunea de integrat din (2.25) are deci forma

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{\Gamma^{m-i-\frac{1}{2}}} \left(\sum_{j=0}^{m-i-2} d_j(\lambda)\Gamma^j + d_{m-i-1}(\lambda; \theta_i \Gamma)\Gamma^{m-i-1} + d_{m-i}(\lambda; \theta_i^* \Gamma)\Gamma^{m-i} \right.$$

funcțiunile d calculându-se cu ajutorul lui d' și d'', iar $0 < \theta_i, \theta_i^* < 1$ depinzând eventual de λ. Punând

$$D_j(\varepsilon) = \int_{D_{2m}^*} d_j(\lambda)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m} \qquad (j = 0,1,\ldots, m-i-2)$$

$$D_{m-i-1}(\varepsilon) = \int_{D_{2m}^*} d_{m-i-1}(\lambda; \theta_i \varepsilon)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m}, \quad D(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{D_{2m}^*} d_{m-i}(\lambda; \theta_i^* \varepsilon) d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m}$$

deducem că avem

$$\sum_{i=0}^{p-1} \int_{\Gamma_\varepsilon} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{m-i-1} D_j(\varepsilon)\varepsilon^{i+j-m+\frac{1}{2}} + \sqrt{\varepsilon} \cdot D(\varepsilon), \qquad (2.26)$$

coeficienții $D_j(\varepsilon)$ și $D(\varepsilon)$ tinzând către limite finite când $\varepsilon \to 0$ și valorile acestor limite rezultând din relațiile precedente.

ε) In virtutea relațiilor (2.18), (2.23), (2.24) și (2.26), formula fundamentală (2.14) devine

$$A(\varepsilon) + B(\varepsilon) + C(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} \cdot D(\varepsilon) + \ldots = 0, \qquad (2.27)$$

punctele desemnând termeni care conțin puteri negative și fracționare ale lui ε (exponenții fiind jumătăți de numere impare negative), ai căror coeficienți sunt A_i, B_j, C_j și D_j.

Această ultimă relație fiind valabilă pentru orice ε arbitrar de mic, iar $A(\varepsilon)$, $A_i(\varepsilon)$ etc. tinzând către limite finite când $\varepsilon \to 0$, urmează că vom avea în mod necesar

$$\lim_{\varepsilon = 0} \big(A(\varepsilon) + B(\varepsilon) + C(\varepsilon) \big) = 0. \qquad (2.28)$$

Calculele noastre precedente au pus astfel în evidență limitele lui $A(\varepsilon)$ $B(\varepsilon)$ și $C(\varepsilon)$, pentru $\varepsilon \to 0$; aceste limite le vom nota respectiv cu

$$\text{p. fin.} \int_{T_\eta}, \quad \text{p. fin.} \sum_{i=0}^{p-1} \int_{S_0}, \quad \text{p. fin.} \sum_{i=0}^{p=1} \int_{\Sigma_\eta}$$

şi le vom numi, cu H a d a m a r d, *părţile finite* ale integralelor corespunzătoare, valorile lor putând fi considerate că au fost obţinute neglijând infiniţi mari de ordin fracţionar. Utilizând acest simbol, formula (2.28) se scrie

$$\text{p. fin.}\int_{T_\eta}\varrho\varphi d\tau+\text{p. fin.}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\left(G^{p-i-1}\varrho\frac{dF^iu}{d\nu}-\dots\right)d\sigma+$$
$$+\text{p. fin.}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Sigma_\eta}\left(G^{p-i-1}\varrho\frac{dF^iu}{d\nu}-\dots\right)d\sigma=0 \tag{2.29}$$

şi ea constitue o relaţie pentru funcţiunea necunoscută u, invariantă faţă de transformările parametrului ε [6] [1]). Această relaţie va fi în măsură să ne rezolve complet problema.

După cum se vede, *conoidul* $\Gamma=0$ *nu aduce nicio contribuţie în formula precedentă*, sau, în alţi termeni, partea finită a integralelor întinse la Γ este nulă.

Să facem acum pe η să tindă către zero şi să calculăm mai întâi limita

$$I=\lim_{\eta=0}\text{p}\cdot\text{fin.}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Sigma_\eta}\left(G^{p-i-1}\varrho\frac{dF^iu}{d\nu}-F^iu\frac{dG^{p-i-1}\varrho}{d\nu}+h^\alpha\pi_\alpha G^{p-i-1}\varrho F^iu\right)d\sigma. \tag{2.30}$$

Pentru aceasta, vom utiliza schimbarea de variabile care ne permite să trecem dela variabilele x^α la variabilele ξ^α utilizate în ecuaţia (2.12) a conoidului $\Gamma=0$ şi în ecuaţia (2.13) a suprafeţei Σ_η (cum s'a menţionat mai înainte, aceste variabile sunt combinaţii lineare de variabilele normale ale lui Riemann). Transformarea (x,ξ) este regulată în vecinătatea lui P, de exemplu într'o anumită sferă cu centrul în P şi de rază ρ_0, unde ρ_0 este suficient de mic.

Vom alege un număr ρ destul de mic şi fix, astfel încât suprafaţa având drept ecuaţie

$$(\Sigma_\rho)\qquad (\xi^1)^2+(\xi^2)^2+\dots+(\xi^n)^2=\rho^2$$

să fie în întregime interioară sferei de centru P şi de rază ρ_0. In aceste condiţii, luând de asemenea $\eta<\rho$, suprafaţa Σ_η de ecuaţie (2.13) va fi evident interioară lui Σ_ρ.

In sistemul de variabile ξ^α, partea finită a cărei limită este I poate să fie scrisă

$$\text{p}\cdot\text{fin.}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Sigma_\eta}\alpha_{p-i-1}\left[\frac{1}{\Gamma^{m-i-\frac12}}\left(V_{i+1}\frac{dF^iu}{d\nu}-F^iu\frac{dV_{i+1}}{d\nu}+h^\alpha\pi_\alpha V_{i+1}F^iu\right)+\right.$$
$$\left.+\left(m-i-\frac12\right)\frac{V_{i+1}F^iu}{\Gamma^{m-i+\frac12}}\cdot\frac{d\Gamma}{d\nu}\right]d\sigma, \tag{2.31}$$

[1]) V, Bd. II, p. 436.

unde elementul de suprafață este definit prin relațiile

$$\pi_\alpha \, d\sigma = (-1)^\alpha \sqrt{|g|}\, d\xi^1 \dots d\xi^{\alpha-1} d\xi^{\alpha+1} \dots d\xi^{2m+1} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 2m+1)$$

Efectuând omotetia care schimbă pe ξ^α în $\frac{\eta}{\rho}\xi^\alpha$ și deci care transformă suprafața Σ_η în Σ_ρ (a cărei poziție nu depinde de η), expresia $\pi_\alpha \, d\sigma$ va fi multiplicată cu $\left(\frac{\eta}{\rho}\right)^{2m}$, Γ^i cu $\left(\frac{\eta}{\rho}\right)^{2i}$, iar $\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi^\alpha}$ cu $\frac{\eta}{\rho}$. Urmează imediat că în expresia (2.31) contribuția termenilor care nu conțin pe $\frac{d\Gamma}{d\nu}$ va fi de ordinul lui η^{2i+1} $(i = 0, 1, \dots, p-1)$ și deci va tinde către zero odată cu η; de asemenea, contribuția termenilor care conțin pe $\frac{d\Gamma}{d\nu}$ va fi de ordinul lui η^{2i} $(i = 0, 1, \dots, p-1)$ și va tinde tot către zero odată cu η, dacă $i \neq 0$.

Excluzând părțile finite, care după observările precedente sunt nule la limită, rezultă

$$I = \alpha_{p-1}\left(m - \frac{1}{2}\right) \lim_{\eta=0} \text{p·fin.} \int_{\Sigma_\eta} \frac{uV_1}{\Gamma^{m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d\Gamma}{d\nu} d\sigma, \tag{2.32}$$

unde α_{p-1} are valoarea

$$\alpha_{p-1} = (-2)^{p-1}(p-1)!\,(2m-2p+1)\dots(2m-5)(2m-3),$$

iar V_1 este funcțiunea care intervine în soluția elementară a ecuației $G v = 0$, soluție construită de H a d a m a r d.

Rămâne deci de calculat numai expresia

$$I_1 = \lim_{\eta=0} \text{p·fin.} \int_{\Sigma_\eta} \frac{uV_1}{\Gamma^{m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d\Gamma}{d\nu} d\sigma. \tag{2.33}$$

H a d a m a r d, în baza unei observări ingenioase, a adus expresia I_1 la calculul părții finite a volumului hiperboloidului cu două pânze în spațiul cu n dimensiuni [15] [1]) Fl. B u r e a u, reluând studiul metodei lui Hadamard în scopul de a o face mai accesibilă, a calculat direct valoarea lui I_1, în conformitate cu definiția simbolului parte finită [1].

In ceea ce urmează, vom utiliza o metodă care poate fi legată în anumite puncte de procedeul lui Fl. Bureau, iar în altele de observarea lui H a d a m a r d.

Pentru aceasta, dacă presupunem că am desvoltat pe u, V_1 și $g^{\alpha\beta}$, în vecinătatea lui P, după formula lui Taylor pentru variabilele ξ^α și că pe urmă am efectuat din nou omotetia care schimbă pe Σ_η în Σ_ρ, este vizibil că numai primii termeni din desvoltările lui u, V_1 și $g^{\alpha\beta}$ vor aduce o contribuție în limita I_1, astfel că putem scrie

$$I_1 = u(P) \lim_{\eta=0} \text{p·fin.} \int_{\Sigma_\eta} \frac{1}{\Gamma^{m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d\Gamma}{d\nu} d\sigma, \tag{2.34}$$

[1]) p. 224.

coeficienții $g^{\alpha\beta}$ care intervin în $\frac{d\Gamma}{d\nu}$ având valorile $g^{\alpha\beta} = 0$ (dacă $\alpha \neq \beta$), $g^{\alpha\alpha} = -1$ (dacă $\alpha \neq 2m+1$) și $g^{\alpha\alpha} = 1$ (dacă $\alpha = 2m+1$).

In sistemul de coordonate ξ^α, punând

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \ldots (\xi^{2m})^2 = r^2, \quad \xi^{2m+1} = \xi,$$

ecuațiile conoidului Γ și a suprafeței Σ_ρ se vor scrie

$$\Gamma = \xi^2 - r^2 = 0, \quad f = \xi^2 + r^2 - \rho^2 = 0$$

și cum normala interioară lui T_η este evident exterioară lui Σ_η, vom avea pe Σ_ρ

$$\frac{d\Gamma}{d\nu} = \frac{\partial\Gamma}{\partial\xi^{2m+1}} \cdot \frac{\partial f}{\partial\xi^{2m+1}} - \sum_{\alpha=1}^{2m} \frac{\partial\Gamma}{\partial\xi^\alpha} \cdot \frac{\partial f}{\partial\xi^\alpha} = 4(\xi^2 + r^2) = 4\rho^2$$

$$d\sigma = \frac{1}{\pi_{2m+1}} d\xi^1 \ldots d\xi^{2m} = \frac{1}{2\xi} d\xi^1 \ldots d\xi^{2m}.$$

Rezultă astfel că

$$I_1 = 2u(P)\ \text{p} \cdot \text{fin.} \int_{\Sigma_\eta} \rho^2 \frac{d\xi^1 \ldots d\xi^{2m}}{\xi(\xi^2 - r^2)^{m+\frac{1}{2}}}$$

și printr'o nouă omotetie care schimbă pe ξ^α în $\rho\xi^\alpha$ și care deci aduce pe Σ_ρ la sfera unitate Σ_1, obținem

$$I_1 = 2u(P)\ \text{p. fin.} \int_{\Sigma_1} \frac{d\xi^1 \ldots d\xi^{2m}}{\xi(\xi^2 - r^2)^{m+\frac{1}{2}}}. \tag{2.35}$$

In spațiul variabilelor $\xi^1, \ldots, \xi^{2m}$ introducând un sistem de coordonate polare $r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2m-1}$, putem scrie

$$d\xi^1 \ldots d\xi^{2m} = r^{2m-1}\, dr\, d\Omega_{2m-1},$$

unde $d\Omega_{2m-1}$ este elementul de suprafață al sferei unitate în spațiul cu $2m$ dimensiuni. Ținând seamă și de ecuația lui Σ_1, anume

$$\xi^2 + r^2 = 1,$$

integrala I_1 devine

$$I_1 = 2u(P)\ \text{p. fin.} \int_{\Sigma_1} \frac{r^{2m-1}\, dr\, d\Omega_{2m-1}}{(1-2r^2)^{m+\frac{1}{2}} \sqrt{1-r^2}} =$$

$$= 2u(P)\ \Omega_{2m-1}\ \text{p. fin.} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{r^{2m-1}\, dr}{(1-2r^2)^{m+\frac{1}{2}} \sqrt{1-r^2}}, \tag{2.36}$$

unde Ω_{2m-1} este suprafața sferei unitate în spațiul cu $2m$ dimensiuni cu valoarea

$$\Omega_{2m-1} = \frac{2\pi^m}{(m-1)!}.$$

Dacă acum, în partea finită a integralei simple (2.36), facem schimbarea de variabilă

$$z = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r},$$

ceea ce este permis, fiindcă ea este regulată în $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (adică una din variabile are în raport cu cealaltă o derivată finită și diferită de zero pentru $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$), vom obține

$$I_1 = 2u(P)\,\Omega_{2m-1}\,\text{p. fin.}\int_1^\infty \frac{dz}{(z^2-1)^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Cum însă avem [15][1])

$$\text{p. fin.}\int_1^\infty \frac{dz}{(z^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^m 2^{m-1}(m-1)!}{1.3.5\ldots(2m-1)},$$

această ultimă integrală multiplicată cu $\frac{1}{2m+1}\Omega_{2m-1}$, fiind după calculele lui Hadamard tocmai partea finită a volumului cuprins între o pânză a hiperboloidului cu două pânze din spațiul cu n dimensiuni și conul său asimptot, în virtutea relațiilor precedente vom putea scrie în definitiv

$$I = (-2)^{m+p-1}(p-1)!\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots(2m-2p+1)\pi^m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\cdot u(P)$$

Fără teamă de confuzie cu ecuația conoidului, vom introduce funcțiunea euleriană $\Gamma(z)$ cu ajutorul căreia valoarea lui I se scrie sub forma mai sugestivă

$$I = \frac{(-1)^{m+p-1}2^{2p-1}(p-1)!\,\pi^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(m-p+\frac{1}{2}\right)}\cdot u(P)$$

Din ceea ce precede, rezultă că dacă în formula (2.29) facem pe η să tindă către zero, primul termen va tinde către o limită finită, pentrucă al doilea termen nu depinde de η și are o limită finită, iar ultimul termen are de asemenea o limită determinată, pe care am evaluat-o mai sus.

Mai mult decât atât, să arătăm că putem înlocui domeniul T_η cu T, când $\eta \to 0$, oricare ar fi poziția lui P într'un domeniu în care funcțiunea φ este regulată și coeficienții ecuației sunt olomorfi.

---

[1]) p. 207.

In acest scop, introducând sistemul de coordonate curbilinii ξ^α, vom putea scrie

$$\text{p. fin.} \int_{T-T\eta} \nu\varphi d\tau = \text{p. fin.} \int_{T-T\eta} \frac{V_p \varphi \sqrt{|g|}}{\Gamma^{m-p+\frac{1}{2}}} \cdot d\xi^1 \ldots d\xi^{2m+1}, \tag{2.40}$$

domeniul $T - T_\eta$ obţinându-se evident prin extragerea lui T_η din T. Cu omotetia care schimbă pe Σ_η în Σ_ρ, domeniul $T - T_\eta$ va deveni un anumit domeniu T_ρ care nu va depinde de η, iar produsul $d\xi^1 \ldots d\xi^{2m+1}$ va fi multiplicat cu $\left(\frac{\eta}{\rho}\right)^{2m+1}$. De asemenea, desvoltând în prealabil funcţiunea $V_p \varphi \sqrt{|g|}$, în vecinătatea lui P, după formula lui Taylor până la termenii de ordinul $m - p$, rezultă că integrala transformată a lui (2.40) va conţine pe η^{2p}, în factor. Vom putea atunci limita valoarea absolută a lui (2. 40) în funcţie de η, de limitele superioare ale valorilor absolute ale derivatelor lui V_p şi φ în raport cu x^α, până la ordinul $m - p$ şi de derivatele corespunzătoare ale lui x^α în raport cu ξ^α, aceste ultime cerând — după o observare a lui H a d a m a r d [15][1]) — cunoaşterea limitelor superioare ale derivatelor parţiale ale coeficienţilor $g^{\alpha\beta}$ până la ordinul $m - p + 1$. Această limitare fiind valabilă, oricare ar fi poziţia lui P în domeniul în care φ este regulată şi coeficienţii $g^{\alpha\beta}$ olomorfi, deducem că primul termen al formulei (2.29) converge uniform, când η tinde către zero şi deci putem înlocui la limită pe T_η cu T.

In concluzie, în cazul $n = 2m + 1 > 2p$, valoarea lui $u(P)$ va fi dată de formula

$$(-1)^{m+p} \frac{2^{2p-1}(p-1)!\,\pi^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(m-p+\frac{1}{2}\right)} \cdot u(P) = \text{p. fin.} \int_T \nu\varphi d\tau +$$

$$+ \text{p. fin.} \sum_{i=0}^{p-1} \int_{S_0} \left(G^{p-i-1} \nu \frac{dF^i u}{d\nu} - F^i u \frac{dG^{p-i-1}\nu}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha G^{p-i-1} \nu F^i u \right) d\sigma \tag{2.41}$$

în care prima parte finită se reduce la o integrală obişnuită, dacă $m = p$.

Să trecem acum la examinarea cazului $n = 2m + 1 < 2p$, când soluţia elementară este nulă pe conoidul $\Gamma = 0$.

Vom aplica formula fundamentală (2.14) aceluiaşi domeniu $T_{\varepsilon,\eta}$ delimitat de frontierea $F_{\varepsilon,\eta}$, luând de asemenea $\nu = \nu_p(x; a)$.

Este uşor de reluat calculele făcute în primul caz examinat şi de introdus modificările necesare privind ipotezele de derivabilitate a lui φ, ale datelor pe S şi ale funcţiunii necunoscute u.

In adevăr, funcţiunea φ care intervine în integrala întinsă la $T_{\varepsilon,\eta}$ (sau întinsă chiar la domeniul T, fiindcă această integrală este o integrală obişnuită) trebue să fie numai continuă în R. De asemenea, pe S, datele $F^i u$ şi $\frac{dF^i u}{d\nu}$ trebue să admită derivate parţiale până la ordinul $m - i$ ($i = 0,1,\ldots,$ $m - 1$) sau trebue să fie numai continue ($i = m,\ m + 1,\ldots, p - 1$). In

[1]) p. 156.

fine, funcțiunea necunoscută u trebue să satisfacă la condiția impusă de însăși ecuația cu derivate parțiale pe care o verifică, aceea de a admite derivate parțiale până la ordinul $2p$.

Cu aceste ipoteze, raționamentele și rezultatele din primul caz examinat rămân în linii mari valabile, însă trebue să menționăm că anumite integrale întinse la Γ și la S_0, ca și aceea relativă la T, sunt integrale obișnuite. Contribuția conoidului $\Gamma = 0$ va fi iarăși nulă în integralele ordinare, deoarece cantitățile de integrat conțin pe Γ în factor la o putere pozitivă, iar părțile finite ale celorlalte integrale se vor anula tot ca în primul caz.

Rezultatul final va fi evident același, dacă observăm că în raționamentele noastre precedente nu a intervenit ipoteza $n > 2p$ decât în legătură cu contribuția conoidului, astfel că formula (2.41) va fi valabilă și în cazul $n = 2m + 1 < 2p$, cu specificarea că partea finită a primei integrale și părțile finite ale altor anumite integrale următoare (care nu sunt greu de precizat) se reduc la integrale obișnuite.

In formula (2.41) intervine, pe lângă datele la limită, soluția elementară $v = v_p$ și cum aceasta figurează și sub forma $G^i v\,(i = 1, \ldots, p-1)$, urmează că în menționata formulă intervin în mod virtual și soluțiile elementare v_1, $v_2, \ldots, v_{p-1}$

16. Proprietatea de schimb a soluției elementare. Să luăm ca suprafață S, în formula (2.41), pânza conoidului $\overline{\Gamma} = 0$ cu vârful în $\overline{P}(\overline{a}^1, \ldots, \overline{a}^n)$ și care limitează cu o anumită pânză a conoidului $\Gamma = 0$, cu vârful în $P(a^1, \ldots, a^n)$, un domeniu T; de asemenea, să alegem în menționata formulă $u = u_p(x; \overline{a})$, unde $u_p(x; \overline{a})$ este soluția elementară a ecuației $F^p u = 0$ construită cu ajutorul punctului $\overline{P}$.

In aceste condiții, primul termen din partea a doua a formulei (2.41) va dispare, dat fiind că va trebui să luăm $\varphi = 0$.

Pentru a calcula al doilea termen, trebue să înlocuim pânza lui $\overline{\Gamma} = 0$ cu suprafața auxiliară $\overline{\Gamma} = \overline{\varepsilon}$, completată cu o suprafață $\Sigma_{\overline{\varepsilon},\overline{\eta}}$ care înconjură punctul $\overline{P}$, numerele pozitive $\overline{\varepsilon}$ și $\overline{\eta}$ fiind destul de mici. Vom putea atunci să evaluăm partea finită care figurează în al doilea termen, aplicând în același timp procedeele de calcul relative la integralele întinse la S și la Γ_ε. In acest scop, vom introduce suprafețele $\Gamma = \varepsilon$ și $\Gamma = \alpha$ numerele ε și α fiind foarte mici și $0 < \varepsilon < \alpha$.

Partea finită considerată va fi egală cu suma integralelor întinse la porțiunea lui $\overline{\Gamma} = \overline{\varepsilon}$ cuprinsă între $\Gamma = \varepsilon$ și $\Gamma = \alpha$, la care trebue să adăugăm integralele întinse respectiv la cealaltă porțiune a lui $\overline{\Gamma} = \overline{\varepsilon}$ și la $\Sigma_{\overline{\varepsilon},\overline{\eta}}$; din rezultatul obținut, trebue să excludem, când ε tinde către zero, infiniții mari de ordin fracționar în ε.

Utilizând coordonatele curbilinii $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\ \Gamma$, este ușor de observat că integralele întinse la porțiunea $\overline{\Gamma} = \overline{\varepsilon}$, cuprinsă între $\Gamma = \alpha$ și $\Sigma_{\overline{\varepsilon},\overline{\eta}}$, sunt o sumă de infiniți mari de ordin fracționar în $\overline{\varepsilon}$, mărită cu un termen care se anulează pentru $\overline{\varepsilon} \to 0$.

De asemenea, utilizând coordonatele curbilinii $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}, \Gamma, \overline{\Gamma}$, vom obține ca valoare a integralelor întinse la porțiunea lui $\overline{\Gamma} = \overline{\varepsilon}$ cuprinsă între $\Gamma = \varepsilon$ și $\Gamma = \alpha$, o sumă de infiniți mari în $\varepsilon, \overline{\varepsilon}$ sau simultan în ε și $\overline{\varepsilon}$, la această sumă adăugându-se un termen care este nul pentru $\varepsilon \to 0$ sau $\overline{\varepsilon} \to 0$.

Făcând pe ε să tindă către zero și excluzând infiniții mari în ε, vom obține astfel valoarea părții finite a integralelor întinse la $\overline{\Gamma} = \bar{\varepsilon}$ și această valoare va fi pentru $\bar{\varepsilon} \to 0$ o sumă de infiniți mari în $\bar{\varepsilon}$ de ordin fracționar.

Cu procedee absolut asemănătoare celor utilizate, vom obține de asemenea ca valoare a părții finite a integralelor întinse la $\overline{\Sigma_{\varepsilon,\eta}}$ o cantitate care are o limită finită când $\bar{\varepsilon} \to 0$ și $\bar{\eta} \to 0$, această limită fiind analoagă aceleia găsite în cazul suprafeței $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$

Pe de altă parte, cum primul membru al lui (2.41) are de asemenea o valoare determinată, deducem că infiniții mari în $\bar{\varepsilon}$ procurați de integralele întinse la $\Gamma = \bar{\varepsilon}$ vor dispare și la limită vom fi conduși la relația remarcabilă

$$u_p(a; \bar{a}) = v_p(\bar{a}; a)$$

ceea ce arată că *soluția elementară a unei ecuații polihiperbolice normale își păstrează valoarea, dacă schimbăm în acelaș timp cele două puncte de care ea depinde și ecuația de referință cu ecuația sa adjunctă.*

Rezultă imediat că dacă ecuația de referință este autoadjunctă, adică vectorul h^α este nul, soluția elementară va fi simetrică în raport cu cele două puncte de care ea depinde.

In cazul general, relația de schimb stabilită mai sus exprimă că soluția elementară $v_p(x; a)$, considerată ca funcțiune de punctul $P(a^1, \ldots, a^n)$, este o soluție a ecuației $F^p u = 0$. Această observare ar putea fi utilă pentru sinteza soluției, adică pentru a arăta că soluția obținută verifică ecuația dată și condițiile la limită impuse, însă aceasta nu mai este necesar să facem, dacă admitem că suprafața S este necaracteristică și are o direcție de spațiu în raport cu $\Gamma = 0$, deoarece în acest caz am demonstrat prin recurență, existența și unicitatea soluției.

Să facem însă o ultimă observare.

Este clar că dacă am reușit să construim soluția elementară $v_p(x; a)$ a ecuației adjuncte $G^p v = 0$, atunci putem obține imediat, în virtutea relației de schimb și soluția elementară $u_p(x; a)$ a ecuației inițiale $F^p u = 0$ și deci vom putea rezolva, cu această soluție elementară, problema lui Cauchy pentru ecuația adjunctă $G^p v = 0$.

Prin urmare, *integrarea unei ecuații polihiperbolice normale și integrarea ecuației sale adjuncte sunt două probleme echivalente.*

II. CAZUL UNUI NUMĂR PAR DE VARIABILE INDEPENDENTE

17. Soluția efectivă în cazul par. Soluția obținută în cazul impar ne-ar permite să deducem cu metoda coborîrii a lui Hadamard soluția corespunzătoare în cazul par. Totuși, în acest nou caz vom urma o cale directă, care își are originea tot în lucrările marelui geometru [15][1]) și care a fost apoi precizată sub aspecte puțin schimbate de K. Friedrichs [12], [13] și Fl. Bureau [1].

Să presupunem deci $n = 2m$ și să examinăm pe rând cele două cazuri secundare $m > p$ și $m \leqslant p$.

[1]) p. 316.

a) *Cazul secundar algebrico-logaritmic.* Dacă $m > p$, soluția elementară posedă o singularitate algebrico-logaritmică pe conoidul $\Gamma = 0$ și expresia sa pentru ecuația adjunctă $G^p v = 0$ este

$$v = v_p^{\varepsilon}(x; a) = \frac{V_p(x; a)}{\Gamma^{m-p}} + W_p(x; a) \log \Gamma + w_p,$$

$V_p(x; a)$, $W_p(x; a)$ fiind funcțiuni olomorfe de variabilele x^α, bine determinate, dintre care prima se reduce la unitate pentru $x = a$, w_p fiind o anumită funcțiune de corecție pe care nu este necesar să o precizăm și unde am pus indicele p pentru același motiv ca în cazul impar.

Păstrând notațiile utilizate înainte, să evaluăm fiecare termen din formula (2.14).

α) Ca și în cazul impar, putem scrie

$$\int_{T_{\varepsilon,\eta}} v\, \varphi\, d\tau = \int_{T_\alpha} v_p(x; a)\, \varphi\, d\tau + \int_{T^*_{\varepsilon,\eta}} v_p(x; a)\, \varphi\, d\tau \tag{2.42}$$

În $T^*_{\varepsilon,\eta}$ și cu sistemul de coordonate curbilinii $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \Gamma$, vom avea

$$\int_{T^*_{\varepsilon,\eta}} \frac{V_p(x; a)\, \varphi}{\Gamma^{m-p}}\, d\tau = \int_{D_{2m-1}} \int_{\varepsilon}^{\alpha} \frac{V_p(\lambda; \Gamma)\, \varphi \sqrt{|g|}}{\Gamma^{m-p}}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m-1}\, d\Gamma.$$

Dacă presupunem că φ admite derivate parțiale până la ordinul $m - p$, vom putea scrie

$$V_p(\lambda; \Gamma)\, \varphi \sqrt{|g|} = \sum_{i=0}^{m-p-1} a_i(\lambda)\, \Gamma^i + a_{m-p}(\lambda; \theta\Gamma)\, \Gamma^{m-p}, \qquad (0 < \theta < 1)$$

coeficienții $a_i(\lambda)$ având expresii bine determinate, dintre care vom menționa numai pe

$$a_{m-p-1}(\lambda) = \frac{1}{(m-p-1)!} \cdot \frac{d^{m-p-1}}{d\Gamma^{m-p-1}} \left(V_p\, \varphi \sqrt{|g|}\right)_{(\Gamma = 0)} \tag{2.43}$$

Integrând în raport cu Γ și punând

$$-A(\varepsilon) = \int_{D_{2m-1}} a_{m-p-1}(\lambda)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m-1}, \tag{2.44}$$

rezultă că avem relația

$$\int_{T^*_{\varepsilon,\eta}} \frac{V_p(x; a)\, \varphi\, d\tau}{\Gamma^{m-p}} = \sum_{i=0}^{m-p-2} A_i(\varepsilon)\, \varepsilon^{i-m+p+1} + A(\varepsilon) \log \varepsilon + \alpha_1(\varepsilon), \tag{2.45}$$

coeficienții $A_i(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)$ și $\alpha_1(\varepsilon)$ tinzând către limite finite, când $\varepsilon \to 0$.

Cu aceleași coordonate curbilinii și desvoltând de asemenea funcțiunea $W_p(\lambda;\ \Gamma)\ \varphi\sqrt{|g|}$, după puterile lui Γ, până la termenul de ordinul $j \leqslant m-p$ și ținând seamă că integrala

$$\int_{\varepsilon}^{\alpha} \Gamma^i \log \Gamma\, d\Gamma \qquad (i = 0,1, \ldots, j)$$

are o limită finită când $\varepsilon \to 0$ (utilizând și formula mediei pentru ultimul termen al desvoltării), deducem imediat

$$\int_{T^*_{\varepsilon,\eta}} W_p(x; a)\ \varphi \log \Gamma\, d\tau = \alpha_2(\varepsilon), \tag{2.46}$$

$\alpha_2(\varepsilon)$ tinzând de asemenea către o limită finită, când $\varepsilon \to 0$.

In ceea ce privește funcțiunea de corecție ϖ_p, ea fiind olomorfă, contribuția sa în integrală (2.42) va fi evident o cantitate care va avea o limită finită pentru $\varepsilon \to 0$.

Rezultă deci, după observările și relațiile precedente, că vom putea scrie

$$\int_{T_{\varepsilon,\eta}} \nu\ \varphi\, d\tau = \sum_{i=0}^{m-p-2} A_i(\varepsilon)\ \varepsilon^{i-m+p+1} + A(\varepsilon) \log \varepsilon + \alpha(\varepsilon), \tag{2.47}$$

$\alpha(\varepsilon)$ tinzând ca și $A_i(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)$ către o limită finită, când $\varepsilon \to 0$.

β) Evaluarea integralelor întinse la $F_{\varepsilon,\eta}$ se face în același mod ca și în cazul impar, calculând separat integralele relative la S_ε, $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$ și Γ_ε. Pentru integralele întinse la S_ε, vom putea scrie

$$\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_\varepsilon} = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_\alpha} + \sum_{i=0}^{p-1}\int_{S^*_\varepsilon} \tag{2.48}$$

și pentru a calcula integralele întinse la S^*_ε, fie ca mai înainte $f = 0$, ecuația lui S. In virtutea relațiilor (1.121), vom avea

$$G^{p-i-1}\varphi = \alpha_{p-i-1}\varphi_{i+1} = \alpha_{p-i-1}\left[\frac{V_{i+1}(x; a)}{\Gamma^{m-i-1}} + W_{i+1}(x; a) \log \Gamma + \varpi_{i+1}\right],$$

α_{p-i-1} fiind numărul definit în cazul impar, $V_{i+1}(x; a)$ și $W_{i+1}(x; a)$ fiind funcțiuni olomorfe de x^α, bine determinate, prima reducându-se la unitate pentru $x = a$, iar ϖ_{i+1} fiind o anumită funcțiune de corecție pe care nu o vom preciza.

Derivata transversală la S va avea expresia

$$\frac{dG^{p-i-1}\varphi}{d\nu} = \alpha_{p-i-1}\left[\frac{\Delta(V_{i+1}, f)}{\Gamma^{m-i-1}} - (m-i-1)\frac{V_{i+1}\Delta(\Gamma, f)}{\Gamma^{m-i}} + \right.$$

$$\left. + \frac{W_{i+1}\Delta(\Gamma, f)}{\Gamma} + \Delta(W_{i+1}, f) \log \Gamma + \Delta(\varpi_{i+1}, f)\right].$$

In sistemul de coordonate curbilinii $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}, \Gamma, f$, vom avea $\pi_n = 1$ și deci

$$d\sigma = \sqrt{|g|}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m-2}\, d\Gamma,$$

astfel că vom putea scrie

$$\sum_{i=0}^{p-1} \int_{S_\varepsilon^*} = \sum_{i=0}^{p-1} \iint_{D^{2m-2}} \int_\varepsilon^\alpha \alpha_{p-i-1} \left[\left(\frac{dF^i u}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha F^i u \right) \right. \tag{2.49}$$

$$\left(\frac{V_{i+1}}{\Gamma^{m-i-1}} + W_{i+1} \log \Gamma + w_{i+1}, \right) - F^i u \left(\frac{\Delta (V_{i+1}, f)}{\Gamma^{m-i-1}} - (m-i-1) \frac{V_{i+1} \Delta (\Gamma, f)}{\Gamma^{m-i}} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{W_{i+1} \Delta (\Gamma, f)}{\Gamma} + \Delta (W_{i+1}, f) \log \Gamma + \Delta (w_{i+1}, f) \right) \right] \sqrt{|g|}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m-2}\, d\Gamma.$$

Termenii care conțin pe $\log \Gamma$ sau w_{i+1} fiind excluși, punând în evidență coeficienții lui Γ^{-m+i+1}, Γ^{-m+i}, Γ^{-1} și cu ipoteza că datele pe S, anume $F^i u$ și $\frac{dF^i u}{d\nu}$ admit derivate parțiale până la ordinul $m-i$, cantitatea de integrat, după intervertirea semnului Σ cu semnul de integrare, poate fi scrisă ca sumă a celor trei expresii următoare

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{\Gamma^{m-i-1}} \left(\sum_{j=0}^{m-i-2} b_j' (\lambda)\, \Gamma^j + b_{m-i-1}' (\lambda; \theta_i' \Gamma)\, \Gamma^{m-i-1} \right) \\ \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{\Gamma^{m-i}} \left(\sum_{j=0}^{m-i-1} b_j'' (\lambda)\, \Gamma^j + b_{m-i}'' (\lambda; \theta_i'' \Gamma)\, \Gamma^{m-i} \right) \\ \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{\Gamma} \left(b_{0i}^* (\lambda) + b_{1i}^* (\lambda; \theta_i^* \Gamma)\, \Gamma \right) \quad , \quad (0 < \theta_i', \theta_i'', \theta_i^* < 1) \end{cases} \tag{2.50}$$

Pentru cele ce urmează, este necesar să specificăm numai valorile coeficienților $b_{m-i-2}' (\lambda)$, $b_{m-i-1}'' (\lambda)$, $b_{0i}^* (\lambda)$, anume

$$\begin{cases} b_{m-i-2}' (\lambda) = \frac{\alpha_{p-i-1}}{(m-i-2)!} \cdot \frac{d^{m-i-2}}{d\Gamma^{m-i-2}} \left[\left(V_{i+1} \frac{dF^i u}{d\nu} - F^i u \frac{dV_{i+1}}{d\nu} + \right. \right. \\ \qquad \left. \left. + h^\alpha \pi_\alpha V_{i+1} F^i u \right) \sqrt{|g|} \right]_{(\Gamma=0)} \\ b_{m-i-1}'' (\lambda) = \frac{\alpha_{p-i-1}}{(m-i-2)!} \cdot \frac{d^{m-i-1}}{d\Gamma^{m-i-1}} \left(F^i u\, V_{i+1} \frac{d\Gamma}{d\nu} \sqrt{|g|} \right)_{(\Gamma=0)} \\ b_{0i}^* (\lambda) = -\alpha_{p-i-1} \left(F^i u\, W_{i+1} \frac{d\Gamma}{d\nu} \sqrt{|g|} \right)_{(\Gamma=0)} = -\left(F^i u\, G^{p-i-1} W_p \frac{d\Gamma}{d\nu} \sqrt{|g|} \right)_{(\Gamma=0)} \end{cases} \tag{2.51}$$

unde am înlocuit peste tot $\Delta(\cdot, f)$ cu $\frac{d}{d\nu}$ și în plus, am ținut seamă în expresia lui b_{0i}^{*} de formulele (1.121) verificate de W_{i+1}. Punând acum

$$-B(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{D_{2m-2}} \left(b'_{m-i-2}(\lambda) + b''_{m-i-1}(\lambda) + b_{0i}^{*}(\lambda) \right) d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m-2} \tag{2.52}$$

și ținând seamă de asemenea de contribuțiile termenilor care conțin pe ceilalți coeficienți b, pe $\log \Gamma$ și funcțiunile de corecție w_{i+1} (observarea făcută mai sus asupra termenilor în $\log \Gamma$ și a celor ce conțin funcțiunile de corecție rămânând valabilă), putem scrie, conform calculelor precedente

$$\sum_{i=0}^{p-1} \int_{S_\varepsilon} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{m-i-2} B_j(\varepsilon)\, \varepsilon^{i+j-m+1} + B(\varepsilon) \log \varepsilon + \beta(\varepsilon), \tag{2.53}$$

coeficienții $B_j(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$ și $\beta(\varepsilon)$ tinzând către limite finite când $\varepsilon \to 0$.

γ) Integralele relative la $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$ se calculează într'un mod asemănător, cu condiția de a înlocui ecuația lui S cu cea a lui $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$ și datele pe S cu valorile lui $F^i u$ și $\frac{dF^i u}{d\nu}$ $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$ luate pe $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$ — ceea ce va introduce ipoteza de derivabilitate până la ordinul $m + p - 1$ a funcțiunii necunoscute u. Vom obține la sfârșit

$$\sum_{=0}^{p-1} \int_{\Sigma_{\varepsilon,\eta}} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{m-i-2} C_j(\varepsilon)\, \varepsilon^{i+j-m+1} + C(\varepsilon) \log \varepsilon + \gamma(\varepsilon), \tag{2.54}$$

coeficienții $C_j(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$ și $\gamma(\varepsilon)$ tinzând către limite finite, când $\varepsilon \downarrow 0$.

δ) In fine, pentru a calcula integralele întinse la Γ_ε, putem scrie, ținând seama de relațiile (1.121) verificate de funcțiunile W_{i+1}

$$G^{p-i-1} \varphi = \alpha_{p-i-1} \left(\frac{V_{i+1}}{\Gamma^{m-i-1}} + w_{i+1} \right) + G^{p-i-1} W_p \log \Gamma.$$

In virtutea relației (1.38), derivata transversală la Γ_ε va avea expresia

$$\frac{dG^{p-i-1}\varphi}{d\nu} = \alpha_{p-i-1} \left(\frac{\Delta(V_{i+1}, \Gamma) - 4(m-i-1) V_{i+1}}{\Gamma^{m-i-1}} + 4W_{i+1} + \Delta(w_{i+1}, \Gamma) \right) +$$

$$+ \frac{dG^{p-i-1} W_p}{d\nu} \log \Gamma.$$

In sistemul de coordonate curbilinii $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \Gamma$, în care

$$d\sigma = \sqrt{|g|}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m-1},$$

vom putea deci scrie

$$\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Gamma_\varepsilon} = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{D_{2m-1}} \alpha_{p-i-1}\left[\left(\frac{dF^i u}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha F^i u\right)\left(\frac{V_{i+1}}{\Gamma^{m-i-1}} + w_{i+1}\right) - \right.$$

$$\left. - F^i u\left(\frac{\Delta(V_{i+1}, \Gamma) - 4(m-i-1)V_{i+1}}{\Gamma^{m-i-1}} + 4W_{i+1} + \Delta(w_{i+1}, \Gamma)\right)\right] \sqrt{|g|}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m-1} \tag{2.55}$$

$$+ \log\varepsilon \cdot \sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left(G^{p-i-1}W_p \frac{dF^i u}{d\nu} - F^i u \frac{dG^{p-i-1}W_p}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha G^{p-i-1} W_p F^i u\right) d\sigma.$$

Ca și în cazul impar, introducând ipoteza că funcțiunea necunoscută u admite derivate parțiale până la ordinul $m + p - 1$, cantitatea de integrat din integralele care nu conțin pe log Γ se poate scrie sub forma

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{\Gamma^{m-i-1}}\left(\sum_{j=0}^{m-i-2} d_j(\lambda)\Gamma^i + d_{m-i-1}(\lambda; \theta_i \Gamma)\Gamma^{m-i-1} + d_{m-i}(\lambda; \theta_i^* \Gamma)\Gamma^{m-i}\right),$$

astfel că ne este permis să scriem

$$\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Gamma_\varepsilon} = \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{m-i-2} D_j(\varepsilon)\,\varepsilon^{i+j-m+1} + \delta(\varepsilon) + \tag{2.56}$$

$$+ \log\varepsilon \cdot \sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left(G^{p-i-1} W_p \frac{dF\, u}{d\nu} - F^i u \frac{dG^{p-i-1}W_p}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha G^{p-i-1} W_p F^i u\right) d\sigma$$

coeficienții $D_j(\varepsilon)$ și $\delta(\varepsilon)$ având limite finite pentru $\varepsilon \to 0$.

ε) In virtutea relațiilor (2.47), (2.53), (2.54) și (2.56), formula fundamentală (2.14) devine

$$\left[A(\varepsilon) + B(\varepsilon) + C(\varepsilon) + \sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left(G^{p-i-1} W_p \frac{dF^i u}{d\nu} - \ldots\right) d\sigma\right] \log\varepsilon + \ldots = 0, \tag{2,57}$$

ultimele puncte indicând termeni care conțin puteri întregi negative sau nule ale lui ε, ai căror coeficienți sunt A_j, α, etc.

Relația (2.57) fiind valabilă pentru orice ε arbitrar de mic, coeficientul lui log ε va tinde în mod necesar către zero, când $\varepsilon \to 0$. Prin urmare, limita lui Γ_ε fiind evident Γ_0, vom putea scrie

$$\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Gamma_0}\left(G^{p-i-1} W_p \frac{dF^i u}{d\nu} - \ldots\right) d\sigma + \lim_{\varepsilon=0}\left(A(\varepsilon) + B(\varepsilon) + C(\varepsilon)\right) = 0. \tag{2,58}$$

Calculele de mai sus au pus astfel în evidență limitele lui $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$ și $C(\varepsilon)$, pentru $\varepsilon \to 0$; aceste limite le vom nota de data aceasta respectiv cu

$$p \cdot \log. \int_{T_\eta}, \quad p.\log. \sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}, \quad p.\log. \sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Sigma_\eta}$$

şi le vom numi, cu F r i e d r i c h s, *părţile logaritmice* ale integralelor corespunzătoare, valorile lor putând fi considerate că au fost obţinute neglijând infiniţi mari de ordin întreg şi cantităţi finite, nepăstrând decât coeficienţii termenilor logaritmici. Cu acest simbol, formula (2.58) se scrie

$$\begin{aligned} &\mathrm{p\cdot log.}\int_{T_\eta} \nu\varphi\, d\tau + p\cdot \mathrm{log.} \sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\left(G^{p-i-1}\,\nu\,\frac{dF^i u}{d\nu} - \ldots\right) d\sigma + \\ &+ \mathrm{p\cdot log.} \sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Sigma_\eta}\left(G^{p-i-1}\,\nu\,\frac{dF^i u}{d\nu} - \ldots\right) d\sigma + \qquad (2.59) \\ &+ \sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Gamma_0}\left(G^{p-i-1} W_p \frac{dF^i u}{d\nu} - \ldots\right) d\sigma = 0 \end{aligned}$$

şi ea constitue o relaţie pentru funcţiunea necunoscută u, invariantă faţă de transformările parametrului ε [6][2]) şi această relaţie o vom utiliza pentru rezolvarea problemei.

Este de remarcat că formula (2.59) *nu conţine funcţiunile de corecţie* w_i $(i = 1,2,\ldots,p)$, pentrucă $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$ nu depind de asemenea de ele, ceea ce justifică numele lor, ele având numai rolul să facă să dispară prin prezenţa lor o anumită integrală din formula fundamentală, dar neaducând, din punctul nostru de vedere, nicio contribuţie în celelalte integrale.

Formula (2.59) are inconvenientul de a conţine integrale întinse la Γ_0, care depind de valorile luate pe conoidul caracteristic de către $F^i u$ şi $\frac{dF^i u}{d\nu}$ $(i = 0,1,\ldots,\ p-1)$, valori evident necunoscute. Acest inconvenient se elimină dacă aplicăm formula fundamentală (2.11) domeniului T_η delimitat de S_0, Σ_η, Γ_0 şi funcţiunilor u şi $\nu = W_p$. Cum W_p este o soluţie olomorfă a ecuaţiei $G^p\,\nu = 0$, suntem conduşi la relaţia

$$\begin{aligned} &\int_{T_\eta} W_p\,\varphi d\tau + \sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\left(G^{p-i-1} W_p \frac{dF^i u}{d\nu} - \ldots\right) d\sigma + \\ &+ \sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Sigma_\eta}\left(G^{p-i-1} W_p \frac{dF^i u}{d\nu} - \ldots\right) d\sigma + \sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Gamma_0}\left(G^{p-i-1} W_p \frac{dF^i u}{d\nu} - \ldots\right) d\sigma = 0. \end{aligned} \qquad (2.60)$$

Introducând valoarea integralelor întinse la Γ_0 în (2.59), aceasta devine

$$\begin{aligned} &\mathrm{p\cdot log.}\int_{T_\eta} \nu\varphi\, d\tau + \mathrm{p\cdot log.} \sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\left(G^{p-i-1}\,\nu\,\frac{dF^i u}{d\nu} - \ldots\right) d\sigma - \\ &- \sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\left(G^{p-i-1} W_p \frac{dF^i u}{d\nu} - \ldots\right) d\sigma - \int_{T_\eta} W_p\,\varphi\, d\tau + \qquad (2.61) \\ &\mathrm{p\cdot log.} \sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Sigma_\eta}\left(G^{p-i-1}\,\nu\,\frac{dF^i u}{d\nu} - \ldots\right) d\sigma - \sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Sigma_\eta}\left(G^{p-i-1} W_p \frac{dF^i u}{d\nu} - \ldots\right) d\sigma = 0 \end{aligned}$$

şi se vede că *în această ultimă formulă, conoidul* $\Gamma = 0$ *nu aduce nicio contribuţie.*

---

[1]) p. 437.

Să facem acum pe η să tindă către zero și să calculăm mai întâi limitele integralelor întinse la Σ_η care figurează în (2.61).

Funcțiunea W_p fiind olomorfă, este clar că expresia

$$\sum_{i=0}^{p-1} \int_{\Sigma_\eta} \left(G^{p-i-1} W_p \frac{dF^i u}{d\nu} - F^i u \frac{dG^{p-i-1} W_p}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha G^{p-i-1} W_p F^i u \right) d\sigma$$

va tinde către zero, când $\eta \to 0$.

Pentru a calcula limita

$$I = \lim_{\eta=0} \text{p} \cdot \log. \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\Sigma_\eta} \left(G^{p-i-1} \varphi \frac{dF^i u}{d\nu} - F^i u \frac{dG^{p-i-1} \varphi}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha G^{p-i-1} \varphi F^i u \right) d\sigma \tag{2.62}$$

vom utiliza, ca și în cazul impar, schimbarea de variabile care conduce dela variabilele x^α la variabilele ξ^α. In sistemul de variabile ξ^α, partea logaritmică a cărei limită este I se poate scrie

$$\text{p} \cdot \log. \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\Sigma_\eta} \alpha_{p-i-1} \left[\left(\frac{dF^i u}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha F^i u \right) \cdot \left(\frac{V_{i+1}}{\Gamma^{m-i-1}} + \right. \right.$$

$$+ W_{i+1} \log \Gamma + w_{i+1} \Big) - F^i u \left(\frac{1}{\Gamma^{m-i-1}} \cdot \frac{dV_{i+1}}{d\nu} - \right. \tag{2.63}$$

$$\left. \left. - (m-i-1) \frac{V_{i+1}}{\Gamma^{m-i}} \cdot \frac{d\Gamma}{d\nu} + \frac{W_{i+1}}{\Gamma} \cdot \frac{d\Gamma}{d\nu} + \frac{dW_{i+1}}{d\nu} \log \Gamma + \frac{dw_{i+1}}{d\nu} \right) \right] d\sigma$$

unde elementul de suprafață este definit de relațiile

$$\pi_\alpha \, d\sigma = (-1)^\alpha \sqrt{|g|} \, d\xi^1 \ldots d\xi^{\alpha-1} \, d\xi^{\alpha+1} \ldots d\xi^{2m} \, . \, (\alpha = 1, \ldots, 2m).$$

Efectuând omotetia care schimbă pe Σ_η în Σ_ρ, este vizibil că în (2.63), contribuția termenilor având pe Γ^{-m+i+1} în factor va fi de ordinul lui η^{2i+1} ($i = 0,1, \ldots, p-1$) și deci va tinde către zero odată cu η; de asemenea, contribuția termenilor având pe Γ^{-m+i} în factor va fi de ordinul lui η^{2i} ($i = 0,1, \ldots, p-1$) și va tinde tot către zero odată cu η, dacă $i \neq 0$; în fine, contribuția termenilor având pe Γ^{-1} în factor va fi de ordinul lui η^{2m-2} și va tinde deci către zero cu η, pentrucă $m > p$ și $p \geqslant 1$. Contribuțiile celorlalți termeni fiind de ordinul lui $\eta^{2m-1} \log \eta$ sau de ordinul lui η^{2m-1}, excluzând părțile logaritmice ale integralelor care se anulează la limită în baza observărilor precedente, rezultă că vom putea scrie

$$I = (m-1) \, \alpha_{p-1} \lim_{\eta=0} \text{p} \cdot \log \int_{\Sigma_\eta} \frac{u V_1}{\Gamma^m} \cdot \frac{d\Gamma}{d\nu} \, d\sigma, \tag{2.64}$$

unde α_{p-1} are valoarea

$$\alpha_{p-1} = (-1)^{p-1} \, 2^{2p-2} \, (p-1)! \, (m-p) \, (m-p+1) \ldots (m-2),$$

iar V_1 este funcțiunea care intervine în partea algebrică a soluției elementare φ_1 a ecuației $G\varphi = 0$, soluție construită de Hadamard.

Deci vom calcula numai expresia

$$I_1 = \lim_{\eta=0} \mathrm{p} \cdot \log. \int_{\Sigma_\eta} \frac{uV_1}{\Gamma^m} \cdot \frac{d\Gamma}{d\nu} d\sigma. \tag{2.65}$$

Vom urma în acest calcul, cu anumite diferențe, procedeul lui Fl. Bureau [1] și vom face, în plus, o observare care leagă rezultatul de partea logaritmică a volumului hiperboloidului cu două pânze în spațiul cu n dimensiuni.

Ca și în cazul impar, dacă presupunem că am desvoltat pe u, V_1, și $g^{\alpha\beta}$, în vecinătatea lui P, după formula lui Taylor pentru variabilele ξ^α și că, pe urmă, am efectuat omotetia care schimbă pe Σ_η în Σ_ρ, este clar că numai primii termeni din desvoltările lui u, V_1 și $g^{\alpha\beta}$ vor aduce o contribuție în limita I_1, astfel că vom avea

$$I_1 = u(P) \lim_{\eta=0} \mathrm{p} \cdot \log. \int_{\Sigma_\eta} \frac{1}{\Gamma^m} \cdot \frac{d\Gamma}{d\nu} d\sigma, \tag{2.66}$$

coeficienții $g^{\alpha\beta}$ care intervin în $\dfrac{d\Gamma}{d\nu}$ având valorile $g^{\alpha\beta} = 0$ (dacă $\alpha \neq \beta$), $g^{\alpha\alpha} = -1$ (dacă $\alpha \neq 2m$) și $g^{\alpha\alpha} = 1$ (dacă $\alpha = 2m$).

In sistemul de coordonate ξ^α, punând

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \ldots + (\xi^{2m-1})^2 = r^2, \quad \xi^{2m} = \xi,$$

ecuațiile conoidului Γ și a suprafeței Σ_ρ se vor scrie

$$\Gamma = \xi^2 - r^2 = 0, \quad f = \xi^2 + r^2 - \rho^2 = 0$$

și ținând seama că normala interioară la T_η este exterioară lui Σ_η, deducem că pe Σ_ρ avem

$$\frac{d\Gamma}{d\nu} = \frac{\partial\Gamma}{\partial\xi^{2m}} \cdot \frac{\partial f}{\partial\xi^{2m}} - \sum_{\alpha=1}^{2m-1} \frac{\partial\Gamma}{\partial\xi^\alpha} \cdot \frac{\partial f}{\partial\xi^\alpha} = 4(\xi^2 + r^2) = 4\rho^2$$

$$d\sigma = -\frac{1}{\pi_{2m}} d\xi^1 \ldots d\xi^{2m-1} = -\frac{1}{2\xi} d\xi^1 \ldots d\xi^{2m-1}.$$

După o nouă omotetie care aduce pe Σ_ρ la sfera unitate Σ_1, rezultă că

$$I_1 = 2u(P) \, \mathrm{p} \cdot \log. \int_{\Sigma_1} \frac{d\xi^1 \ldots d\xi^{2m-1}}{\xi(\xi^2 - r^2)^m}. \tag{2.67}$$

In spațiul variabilelor $\xi^1, \ldots, \xi^{2m-1}$, introducând sistemul de coordonate polare r, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2m-2}$, vom putea scrie

$$d\xi^1 \ldots d\xi^{2m-1} = r^{2m-2} dr \, d\Omega_{2m-2},$$

în care $d\Omega_{2m-2}$ este elementul de suprafață al sferei unitate în spațiul cu $2m-1$ dimensiuni. Ecuația lui Σ_1 fiind

$$\xi^2 + r^2 = 1$$

integrala I_1 se va scrie

$$I_1 = -2u(P)\ \mathrm{p}\cdot\log.\int_{\Sigma_1}\frac{r^{2m-2}\,dr\,d\Omega_{2m-2}}{(1-2r^2)^m\sqrt{1-r^2}} = -$$

$$-2u(P)\ \Omega_{2m-2}\ \mathrm{p}\cdot\log.\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{r^{2m-2}\,dr}{(1-2r^2)^m\sqrt{1-r^2}}, \tag{2.68}$$

unde Ω_{2m-2} are valoarea

$$\Omega_{2m-2} = \frac{2^m\,\pi^{m-1}}{1.3.5\ldots(2m-3)}.$$

Dacă în partea logaritmică a ultimei integrale (2.68) facem, ca și în cazul impar, schimbarea de variabilă

$$z = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}$$

regulată în $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (această posibilitate fiind justificată de proprietățile simbolului parte logaritmică asemănătoare cu acelea ale simbolului parte finită și dintre care unele au fost schițate de Fl. Bureau în lucrarea citată, obținem

$$I_1 = -2u(P)\ \Omega_{2m-2}\ \mathrm{p}\cdot\log.\int_1^\infty\frac{dz}{(z^2-1)^m}. \tag{2.69}$$

Calculând prin recurență partea logaritmică a integralei de mai sus, ceea ce a făcut Fl. Bureau, deducem

$$p\cdot\log.\int_1^\infty\frac{dz}{(z^2-1)^m} = \frac{(-1)^{m-1}1.3.5\ldots(2m-3)}{2^m\,(m-1)!} \tag{2.70}$$

și această ultimă integrală, multiplicată cu $\frac{1}{2m}\,\Omega_{2m-2}$ va reprezenta tocmai partea logaritmică a volumului cuprins între o pânză a hiperboloidului cu două pânze în spațiul cu n dimensiuni și conul său asimptot, care înlocuește acum în interpretarea lui Hadamard [1]) din cazul impar, partea finită a aceluiași volum.

Ținând seamă de relațiile precedente, vom putea scrie în definitiv

$$I = \frac{(-1)^{m+p-1}2^{2p-1}(p-1)!\,\pi^{m-1}}{(m-p-1)!}\cdot u(P). \tag{2.71}$$

[1]) Aceasta rezultă imediat din formula utilizată de Hadamard pentru a calcula în cazul impar partea finită a volumului menționat [15], p. 213.

In virtutea tuturor acestor calcule, dacă facem pe η să tindă către zero în formula (2.61), al doilea și al treilea termen nedepinzând de η și având valori finite, al patrulea termen tinzând către aceeași integrală întinsă la T, iar ultimii termeni având limite finite pe care le-am calculat mai sus, rezultă că și primul termen va avea o limită finită.

Ca și în cazul impar, să demonstrăm că putem înlocui domeniul T_η cu T, când $\eta \to 0$, oricare ar fi poziția lui P într'un domeniu în care φ este regulată și coeficienții ecuației sunt olomorfi.

In adevăr, cu sistemul de coordonate ξ^α și după definiția simbolului parte logaritmică, vom avea

$$\mathrm{p}\cdot\log.\int_{T-T_\eta}\rho\varphi\,d\tau=\mathrm{p}\cdot\log.\int_{T-T_\eta}\frac{V_p\,\varphi\sqrt{|g|}}{\Gamma^{m-p}}\,d\xi^1\ldots d\xi^{2m}. \tag{2.72}$$

Cu omotetia care schimbă domeniul $T-T_\eta$ în T_ρ, produsul $d\xi^1\ldots d\xi^{2m}$ va fi multiplicat cu $\left(\frac{\eta}{\rho}\right)^{2m}$. Desvoltând funcțiunea $V_p\,\varphi\sqrt{|g|}$, în vecinătatea lui P, după formula lui Taylor, până la termenii de ordinul $m-p$, rezultă că integrala transformată a lui (2.72) va conține pe η^{2p} în factor. Va fi posibil atunci să limităm valoarea absolută a lui (2.72) în funcție de η, de limitele superioare ale valorilor absolute ale derivatelor lui V_p și φ în raport cu x^α până la ordinul $m-p-1$ și de derivatele corespunzătoare ale lui x^α în raport cu ξ^α, acestea ultime cerând cunoașterea limitelor superioare ale derivatelor parțiale ale coeficienților $g^{\alpha\beta}$ până la ordinul $m-p$. Această limitare fiind valabilă oricare ar fi poziția lui P într'un domeniu în care φ este regulată și coeficienții $g^{\alpha\beta}$ olomorfi, urmează că primul termen al formulei (2.61) converge uniform când η tinde către zero și deci putem înlocui la limită domeniul T_η cu T.

In concluzie, în cazul secundar algebrico-logaritmic ($n=2m>2p$), valoarea lui $u(P)$ va fi dată de formula

$$\begin{aligned}(-1)^{m+p}\frac{2^{2p-1}(p-1)!\,\pi^{m-1}}{(m-p-1)!}\cdot u(P)=&\mathrm{p}\cdot\log.\int_T\rho\varphi\,d\tau-\int_T W_p\,\varphi\,d\tau+\\+p\cdot\log.\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}&\left(G^{p-i-1}\rho\frac{dF^i u}{d\nu}-F^i u\frac{dG^{p-i-1}\rho}{d\nu}+h^\alpha\pi_\alpha G^{p-i-1}\rho F^i u\right)d\sigma-\\-\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}&\left(G^{p-i-1}W_p\frac{dF^i u}{d\nu}-F^i u\frac{dG^{p-i-1}W_p}{d\nu}+h^\alpha\pi_\alpha G^{p-i-1}W_p F^i u\right)d\sigma.\end{aligned} \tag{2.73}$$

Ținând seamă de calculele anterioare, putem da formulei (2.73) o altă formă, în care nu figurează simbolul parte logaritmică și în care apare în mod vizibil că funcțiunile de corecție nu aduc nicio contribuție.

In adevăr, conform definiției simbolului parte logaritmică și în virtutea relațiilor (2.43) și (2.44), în locul primului termen din membrul al doilea al formulei (2.73) putem scrie expresia echivalentă

$$\frac{-1}{(m-p-1)!}\int\limits_{\Delta_{2m-1}}\frac{d^{m-p-1}}{d\Gamma^{m-p-1}}\Big(V_p\,\varphi\sqrt{|g|}\Big)\,d\lambda_1\ldots d\lambda_{2m-1}$$
$$(\Gamma=0)$$

domeniul Δ_{2m-1} fiind limita domeniului D_{2m-1}, când ε tinde către zero. Pentru a da o formă mai sugestivă expresiei de mai sus, vom scrie γ în loc de Γ în funcțiunea $V_p\,\varphi\sqrt{|g|}$ și după ce am efectuat derivările în raport cu γ, vom face evident $\gamma=0$. Schimbând apoi semnele de integrare și de derivare, ceea ce este permis fiindcă domeniul Δ_{2m-1} nu depinde de γ și ținând seamă de o observare a lui H a d a m a r d [1]), vom putea scrie termenul menționat sub forma

$$\frac{-1}{(m-p-1)!}\cdot\frac{d^{m-p-1}}{d\gamma^{m-p-1}}\int\limits_{\Delta_{2m-1}}V_p\,\varphi\sqrt{|g|}\,d\lambda_1\ldots d\lambda_{2m-1}=$$
$$(\gamma=0)$$
$$=\frac{-1}{(m-p-1)!}\cdot\frac{d^{m-p}}{d\gamma^{m-p}}\int\limits_{T^*}V_p\,\varphi\,d\tau,$$
$$(\gamma=0)$$

unde T^* este porțiunea domeniului T cuprinsă între $\Gamma=0$ și $\Gamma=\gamma$.

De asemenea, în virtutea relațiilor (2.51), (2.52) și datorită aceleiași observări a lui H a d a m a r d, al treilea termen din membrul al doilea al formulei (2.73) se poate scrie ca sumă a celor trei expresii următoare

$$-\sum_{i=0}^{p-1}\frac{\alpha_{p-i-1}}{(m-i-2)!}\cdot\frac{d^{m-i-1}}{d\gamma^{m-i-1}}\int\limits_{S_0^*}\left(V_{i+1}\frac{dF^i\,u}{d\nu}-F^i\,u\frac{dV_{i+1}}{d\nu}+h^\alpha\pi_\alpha\,V_{i+1}F^i\,u\right)d\sigma$$
$$(\gamma=0)$$

$$-\sum_{i=0}^{p-1}\frac{\alpha_{p-i-1}}{(m-i-2)!}\cdot\frac{d^{m-i}}{d\gamma^{m-i}}\int\limits_{S_0^*}F^i\,u\,V_{i+1}\frac{d\Gamma}{d\nu}\,d\sigma$$
$$(\gamma=0)$$

$$\sum_{i=0}^{p-1}\frac{d}{d\gamma}\int\limits_{S_0^*}F^i\,u\,G^{p-i-1}\,W_p\frac{d\Gamma}{d\nu}\,d\sigma$$
$$(\gamma=0)$$

unde S_0^* este porțiunea suprafeței S_0 cuprinsă între $\Gamma=0$ și $\Gamma=\gamma$.

---

[1]) Această observare exprimă egalitatea derivatelor în raport cu γ ale integralelor întinse la T^* sau S_0^* și ale integralelor corespunzătoare relative la D_{2m-1} și D_{2m-2} [15], p. 300 și 313.

Formula (2.73), care dă valoarea lui $u(P)$, va lua deci forma

$$(-1)^{m+p}\frac{2^{2p-1}(p-1)!\pi^{m-1}}{(m-p-1)!}\cdot u(P)=-\int_T W_p\varphi\,d\tau$$

$$-\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\left(G^{p-i-1}W_p\frac{dF^iu}{d\nu}-F^iu\frac{dG^{p-i-1}W_p}{d\nu}+h^\alpha\pi_\alpha G^{p-i-1}W_pF^iu\right)d\sigma-$$

$$-\frac{1}{(m-p-1)!}\cdot\frac{d^{m-p}}{d\gamma^{m-p}}\Big|_{(\gamma=0)}\int_T^*V_p\varphi\,d\tau+\sum_{i=0}^{p-1}\frac{d}{d\gamma}\Big|_{(\gamma=0)}\int_{S_0}^*F^iuG^{p-i-1}W_p\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma- \tag{2.74}$$

$$-\sum_{i=0}^{p-1}\frac{\alpha_{p-i-1}}{(m-i-2)!}\left\{\frac{d^{m-i}}{d\gamma^{m-i}}\Big|_{(\gamma=0)}\int_{S_0}^*F^iuV_{i+1}\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma+\right.$$

$$\left.+\frac{d^{m-i-1}}{d\gamma^{m-i-1}}\Big|_{(\gamma=0)}\int_{S_0}^*\left(V_{i+1}\frac{dF^iu}{d\nu}-F^iu\frac{dV_{i+1}}{d\nu}+h^\alpha\pi_\alpha V_{i+1}F^iu\right)d\sigma\right\}.$$

Se observă că în această ultimă formulă, pe lângă datele la limită, intervin funcţiunile $V_1,\ldots,V_p$, care figurează în termenii algebrici ai soluţiilor elementare $v_1,\ldots,v_p$, precum şi funcţiunea W_p care figurează în termenul logaritmic al soluţiei elementare $v=v_p$ şi cum această funcţiune intervine sub forma G^iW_p $(i=0,1,\ldots,p-1)$, înseamnă că de fapt în formula (2.74) intervin şi funcţiunile $W_1,\ldots,W_{p-1}$ corespunzătoare soluţiilor elementare $v_1,\ldots,v_{p-1}$.

b) *Cazul secundar logaritmic.* Dacă $m\leqslant p$, soluţia elementară este regulată pe conoidul $\Gamma=0$ când $m<p$, sau are pe el o singularitate logaritmică, când $m=p$. Expresia sa, pentru ecuaţia adjunctă $G^pv=0$, se scrie

$$v=v_p(x;a)=\Gamma^{p-m}W_p(x;a)\log\Gamma+w_p,$$

$W_p(x;a)$ fiind o funcţiune olomorfă de variabilele x^α, bine determinată, a cărei valoare este egală cu unitatea pentru $x=a$, w_p fiind o anumită funcţiune de corecţie inutil de precizat şi unde am pus indicele p pentru acelaşi motiv ca şi în cazurile studiate.

Cu notaţiile utilizate, să evaluăm fiecare din termenii formulei fundamentale (2.14).

α) Dacă presupunem că φ este numai continuă, dat fiind că funcţiunile $W_p(x;a)$ şi w_p sunt olomorfe, este clar că putem scrie

$$\int_{T_{\varepsilon,\eta}}v\varphi\,d\tau=\alpha(\varepsilon), \tag{2.75}$$

$\alpha(\varepsilon)$ tinzând către o limită finită, când $\varepsilon\to 0$.

Trecând la evaluarea integralelor întinse la $F_{\varepsilon,\eta}$, vom calcula ca şi mai înainte separat integralele relative la S_ε, $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$, şi Γ_ε.

β) Pentru integralele întinse la S_ε, vom avea de evaluat contribuţiile lor relative la S_α, care ne vor procura o valoare finită, şi la S_ε^*.

Pentru a evalua integralele întinse la S_ε^*, dacă ecuația lui S este $f = 0$, ținând seamă de relațiile (1.124) sau (1.126), când $i \geqslant m-1$ vom putea scrie

$$G^{p-i-1}\varphi = \alpha_{p-i-1}\,\varphi_{i+1} = \alpha_{p-i-1}(\Gamma^{i-m+1}\,W_{i+1}\,\log\,\Gamma + \varpi_{i+1}),$$

unde W_{i+1} se reduce la unitate pentru $x = a$, iar numărul α_{p-i-1} este tocmai cel utilizat în cazurile studiate mai înainte și a cărui expresie se scrie acum sub forma

$$\alpha_{p-i-1} = 4^{p-i-1}(p-m)(p-m-1)\ldots(i-m+2)(p-1)(p-2)\ldots(i+1). \qquad (\alpha_0 = 1)$$

Dacă $i < m-1$, vom avea de asemenea

$$G^{p-i-1}\varphi = \beta_{p-i-1}\varphi_{i+1} = \beta_{p-i-1}\left(\frac{V_{i+1}(x;a)}{\Gamma^{m-i-1}} + W_{i+1}(x;a)\log\Gamma + \varpi_{i+1}\right),$$

unde de data aceasta V_{i+1} se reduce la unitate pentru $x = a$, iar numărul β_{p-i-1} are valoarea

$$\beta_{p-i-1} = (-1)^{m-i}\,4^{p-i-1}\,(p-m)\,!\,(m-i-2)\,!\,(p-1)(p-2)\ldots(i+1).$$

In ambele cazuri $V_{i+1}(x;a)$ sau $W_{i+1}(x;a)$ sunt funcțiuni olomorfe de x^α bine determinate, iar funcțiunile ϖ_{i+1} sunt anumite funcțiuni de corecție, pe care nu le vom preciza.

Derivata transversală la S, în cazul când $i \geqslant m-1$, va fi

$$\frac{dG^{p-i-1}\varphi}{d\nu} = \alpha_{p-i-1}(\Gamma^{i-m+1}\,\Delta(W_{i+1},f)\log\Gamma + \Delta(\varpi_{i+1},f) +$$
$$+ (i-m+1)\,\Gamma^{i-m}W_{i+1}\,\Delta(\Gamma,f)\log\Gamma + \Gamma^{i-m}W_{i+1}\,\Delta(\Gamma,f))$$

iar în cazul când $i < m-1$, ea va avea expresia

$$\frac{dG^{p-i-1}\varphi}{d\nu} = \beta_{p-i-1}\left(\frac{\Delta(V_{i+1},f)}{\Gamma^{m-i-1}} - (m-i-1)\,\frac{V_{i+1}\Delta(\Gamma,f)}{\Gamma^{m-i}} +\right.$$
$$\left. + \frac{W_{i+1}\,\Delta(\Gamma,f)}{\Gamma} + \Delta(W_{i+1},f)\log\Gamma + \Delta(\varpi_{i+1},f)\right).$$

Prin urmare, utilizând sistemul de coordonate curbilinii $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$, Γ, f, integralele întinse la S_ε^* se pot scrie ca sumă a două expresii, dintre care prima este

$$\sum_{i=0}^{m-2}\int_{D_{2m-2}}\int_{\varepsilon}^{\alpha}\beta_{p-i-1}\left[\left(\frac{dF^iu}{d\nu} + h^\alpha\pi_\alpha F^iu\right)\cdot\left(\frac{V_{i+1}}{\Gamma^{m-i-1}} + W_{i+1}\log\Gamma + \varpi_{i+1}\right) -\right.$$
$$- F^iu\left(\frac{\Delta(V_{i+1},f)}{\Gamma^{m-i-1}} - (m-i-1)\,\frac{V_{i+1}\Delta(\Gamma,f)}{\Gamma^{m-i}} + \frac{W_{i+1}\Delta(\Gamma,f)}{\Gamma} + \right. \qquad (2.76)$$
$$\left.\left. + \Delta(W_{i+1},f)\log\Gamma + \Delta(\varpi_{i+1},f)\right)\right]\sqrt{|g|}\,d\lambda_1\ldots d\lambda_{2m-2}\,d\Gamma,$$

iar a doua are forma

$$\sum_{i=m-1}^{p-1}\int_{D_{2m-2}}\int_{\varepsilon}^{\alpha}\alpha_{p-i-1}\Big[\Big(\frac{dF^iu}{d\nu}+h^\alpha\pi_\alpha F^iu\Big)\big(\Gamma^{i-m+1}W_{i+1}\log\Gamma+\varpi_{i+1}\big)-$$

$$-F^iu\Big(\Gamma^{i-m+1}\Delta(W_{i+1},f)\log\Gamma+\Gamma^{i-m}W_{i+1}\Delta(\Gamma,f)+ \tag{2.77}$$

$$+(i-m+1)\,\Gamma^{i-m}W_{i+1}\Delta(\Gamma,f)\log\Gamma+\Delta(\varpi_{i+1},f)\Big)\Big]\sqrt{|g|}\,d\lambda_1\ldots d\lambda_{2m-2}\,d\Gamma$$

Este clar că această descompunere este valabilă numai dacă $m>1$ și că pentru $m=1$, ea se reduce la expresia (2.77) în care integrala întinsă la D_{2m-2} va dispare. Vom conveni să luăm totdeauna $\beta_{p-i-1}=0$, dacă $m=1$, astfel că vom putea să tratăm pentru un moment împreună cele două cazuri care se prezintă.

Dacă ne fixăm acum atenția asupra expresiei (2.76), observăm că ea nu diferă de expresia (2.49) din cazul secundar algebrico-logaritmic, decât prin schimbarea limitelor în semnul Σ și prin înlocuirea lui α_{p-i-1} cu β_{p-i-1}. Rezultă deci că dacă admitem ipoteza că datele F^iu și $\dfrac{dF^iu}{d\nu}$ posedă derivate parțiale până la ordinul $m-i$ $(i=0,1,\ldots,m-2)$, introducând funcțiunile

$$\begin{cases} b'_{m-i-2}(\lambda)=\dfrac{\beta_{p-i-1}}{(m-i-2)!}\cdot\dfrac{d^{m-i-2}}{d\Gamma^{m-i-2}}\Big[\Big(V_{i+1}\dfrac{dF^iu}{d\nu}-F^iu\dfrac{dV_{i+1}}{d\nu}+ \\ \qquad\qquad +h^\alpha\pi_\alpha V_{i+1}F^iu\Big)\sqrt{|g|}\Big]_{(\Gamma=0)} \\ b''_{m-i-1}(\lambda)=\dfrac{\beta_{p-i-1}}{(m-i-2)!}\cdot\dfrac{d^{m-i-1}}{d\Gamma^{m-i-1}}\Big(F^iuV_{i+1}\dfrac{d\Gamma}{d\nu}\sqrt{|g|}\Big)_{(\Gamma=0)} \\ b^*_{0i}(\lambda)=-\beta_{p-i-1}\Big(F^iuW_{i+1}\dfrac{d\Gamma}{d\nu}\sqrt{|g|}\Big)_{(\Gamma=0)}=-\Big[F^iuG^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)\dfrac{d\Gamma}{d\nu}\sqrt{|g|}\Big]_{(\Gamma=0)} \end{cases} \tag{2.78}$$

unde am ținut seamă în expresia lui b^*_{0i} de formulele (1.126) verificate de W_{i+1} și punând

$$-B(\varepsilon)=\sum_{i=0}^{m-2}{}'\int_{D_{2m-2}}\big(b'_{m-i-2}(\lambda)+b''_{m-i-1}(\lambda)+b^*_{0i}(\lambda)\big)\,d\lambda_1\ldots d\lambda_{2m-2} \tag{2.79}$$

vom putea scrie expresia (2.76) sub forma

$$\sum_{i=0}^{m-2}\sum_{j=0}^{m-i-2}B_j(\varepsilon)\,\varepsilon^{i+j-m+1}+B(\varepsilon)\log\varepsilon+\beta'(\varepsilon), \tag{2.80}$$

coeficienții $B_j(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $\beta'(\varepsilon)$ tinzând către limite finite când $\varepsilon\to 0$.

De asemenea, dacă aplicăm procedeul utilizat pentru expresia (2.49), cu ipoteza că datele pe S, anume $F^{m-1}u$ și $\dfrac{dF^{m-1}u}{d\nu}$, admit derivate parțiale de ordinul I, iar celelalte date $F^i u$, $\dfrac{dF^i u}{d\nu}$ $(i = m,\ m+1, \ldots, p-1)$ sunt numai continue, introducând funcțiunea

$$b_0(\lambda) = -\alpha_{p-m}\left(F^{m-1}uW_m\frac{d\Gamma}{d\nu}\sqrt{|g|}\right)_{(\Gamma=0)} = -\left[F^{m-1}uG^{p-m}(\Gamma^{p-m}W_p)\frac{d\Gamma}{d\nu}\sqrt{|g|}\right]_{(\Gamma=0)} \quad (2.81)$$

în expresia căreia am ținut seamă de relațiile (1.124) și dacă notăm

$$-B^*(\varepsilon) = \int_{D_{2m-2}} b_0(\lambda)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m-2} \quad (2.82)$$

se ajunge ușor să se arate că expresia (2.77) se poate scrie sub forma

$$B^*(\varepsilon)\log\varepsilon + \beta''(\varepsilon), \quad (2.83)$$

coeficienții $B^*(\varepsilon)$ și $\beta''(\varepsilon)$ având limite finite pentru $\varepsilon \to 0$.

Relațiile precedente ne permit să scriem

$$\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_\varepsilon} = \sum_{i=0}^{m-2}\sum_{j=0}^{m-i-2} B_j(\varepsilon)\,\varepsilon^{i+j-m+1} + \big(B(\varepsilon) + B^*(\varepsilon)\big)\log\varepsilon + \beta(\varepsilon) \quad (2.84)$$

$\beta(\varepsilon)$ tinzând către o limită finită când $\varepsilon \to 0$.

γ) In același mod, se calculează integralele întinse la $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$, cu condiția de a înlocui ecuația lui S cu aceea a lui $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$ și datele pe S cu valorile funcțiunilor $F^i u$ și $\dfrac{dF^i u}{d\nu}$ pe $\Sigma_{\varepsilon,\eta}$ ceea ce conduce la ipoteza că funcțiunea necunoscută u trebue să admită derivate parțiale până la ordinul $2p$, condiție evidentă pentru ca ecuația (2.1) să aibă sens.

Vom avea astfel

$$\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Sigma_{\varepsilon,\eta}} = \sum_{i=0}^{m-2}\sum_{j=0}^{m-i-2} C_j(\varepsilon)\,\varepsilon^{i+j-m+1} + \big(C(\varepsilon) + C^*(\varepsilon)\big)\log\varepsilon + \gamma(\varepsilon), \quad (2.85)$$

coeficienții $C_j(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$, $C^*(\varepsilon)$ și $\gamma(\varepsilon)$ având limite finite pentru $\varepsilon \to 0$.

δ) In fine, să calculăm integralele întinse la Γ_ε. Ținând seamă de relațiile (1.124) și (1.126) verificate de coeficienții termenilor logaritmici ai soluției lor elementare v_{i+1}, vom putea scrie pentru $i \geqslant m-1$

$$G^{p-i-1}v = \alpha_{p-i-1}w_{i+1} + G^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)\log\Gamma$$

iar dacă $i < m-1$, vom avea de asemenea

$$G^{p-i-1}v = \beta_{p-i-1}\left(\frac{V_{i+1}}{\Gamma^{m-i-1}} + w_{i+1}\right) + G^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)\log\Gamma.$$

Derivata transversală la Γ_ε, dacă $i \geqslant m-1$, se va scrie prin urmare

$$\frac{dG^{p-i-1}\varphi}{d\nu} = \alpha_{p-i-1}\left(4\,\Gamma^{i-m+1}W_{i+1} + \Delta(w_{i+1},\Gamma)\right) + \frac{dG^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)}{d\nu}\log\Gamma$$

iar dacă $i < m-1$, va avea forma

$$\frac{dG^{p-i-1}\varphi}{d\nu} = \beta_{p-i-1}\left(\frac{\Delta(V_{i+1},\Gamma) - 4(m-i-1)\,V_{i+1}}{\Gamma^{m-i-1}} + \right.$$

$$\left. + 4W_{i+1} + \Delta(w_{i+1},\Gamma)\right) + \frac{dG^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)}{d\nu}\log\Gamma.$$

In sistemul de coordonate curbilinii $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, Γ, integralele relative la Γ_ε se pot scrie ca sumă a trei expresii, dintre care prima este

$$\sum_{i=0}^{m-2}{}' \int_{D_{2m-1}} \beta_{p-i-1}\left[\left(\frac{dF^i u}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha F^i u\right)\left(\frac{V_{i+1}}{\Gamma^{m-i-1}} + w_{i+1}\right) - \right.$$

$$\left. - F^i u\left(\frac{\Delta(V_{i+1},\Gamma) - 4(m-i-1)\,V_{i+1}}{\Gamma^{m-i-1}} + 4\,W_{i+1} + \right.\right. \qquad (2.86)$$

$$\left.\left. + \Delta(w_{i+1},\Gamma)\right)\right]\sqrt{|g|}\,d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m-1},$$

a doua se scrie

$$\sum_{i=m-1}^{p-1}{}' \int_{D_{2m-1}} \alpha_{p-i-1}\left[\left(\frac{dF^i u}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha F^i u\right) w_{i+1} - F^i u\left(4\Gamma^{i-m+1}W_{i+1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \Delta(w_{i+1},\Gamma)\right)\right]\sqrt{|g|}\,d\lambda_1 \ldots d\lambda_{2m-1}, \qquad (2.87)$$

iar ultima are forma

$$\log\varepsilon \cdot \sum_{i=0}^{p-1}{}' \int_{\Gamma_\varepsilon}\left(G^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)\frac{dF^i u}{d\nu} - \ldots\right)d\sigma, \qquad (2.88)$$

unde cantitatea de integrat se obține înlocuind pe φ cu $\Gamma^{p-m}W_p$ în expresia analoagă care figurează în formula fundamentală (2.14).

Ca și în celelalte cazuri studiate, dar cu ipoteza că funcțiunea necunoscută u admite derivate parțiale până la ordinul $2p$, este ușor de dedus din relațiile precedente că putem scrie

$$\sum_{i=0}^{p-1}{}' \int_{\Gamma_\varepsilon} = \sum_{i=0}^{m-2}{}' \sum_{j=0}^{m-i-2} D_j(\varepsilon)\,\varepsilon^{i+j-m+1} + \delta(\varepsilon) +$$

$$+ \log\varepsilon \cdot \sum_{i=0}^{p-1}{}' \int_{\Gamma_\varepsilon}\left(G^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)\frac{dF^i u}{d\nu} - \ldots\right)d\sigma, \qquad (2.89)$$

coeficienții $D_j(\varepsilon)$ și $\delta(\varepsilon)$ tinzând către limite finite, când $\varepsilon \to 0$.

ε) In virtutea relațiilor (2.75), (2.84), (2.85) și (2.89), vom putea scrie formula fundamentală (2.14) sub forma

$$\left[B(\varepsilon)+B^*(\varepsilon)+C(\varepsilon)+C^*(\varepsilon)+\right. \tag{2.90}$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left(G^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)\frac{dF^iu}{d\nu}-\ldots\right)d\sigma\right]\log\varepsilon+\ldots=0,$$

ultimele puncte indicând termeni care conțin puteri negative sau nule ale lui ε, ale căror coeficienți sunt B_j, α etc.

Formula (2.90) fiind valabilă pentru orice ε arbitrar de mic, la limită când Γ_ε devine Γ_0, vom avea în mod necesar

$$\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Gamma_0}\left(G^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)\frac{dF^iu}{d\nu}-\ldots\right)d\sigma+ \tag{2.91}$$

$$+\lim_{\varepsilon=0}\left(B(\varepsilon)+B^*(\varepsilon)+C(\varepsilon)+C^*(\varepsilon)\right)=0$$

Punând în evidență limitele sumelor $B(\varepsilon)+B^*(\varepsilon)$ și $C(\varepsilon)+C^*(\varepsilon)$ pentru $\varepsilon\to 0$, pe care le vom nota respectiv cu

$$\mathrm{p}\cdot\log\cdot\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\quad,\quad \mathrm{p}\cdot\log\cdot\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Sigma_\eta},$$

formula (2.91) capătă forma

$$\mathrm{p}\cdot\log\cdot\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\left(G^{p-i-1}\varphi\frac{dF^iu}{d\nu}-\ldots\right)d\sigma+ \tag{2.92}$$

$$+\mathrm{p}\cdot\log\cdot\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Sigma_\eta}\left(G^{p-i-1}\varphi\frac{dF^iu}{d\nu}-\ldots\right)d\sigma+$$

$$+\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\Gamma_0}\left(G^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)\frac{dF^iu}{d\nu}-\ldots\right)d\sigma=0.$$

Această ultimă relație, invariantă față de transformările parametrului ε, ne va procura soluția problemei.

Ca și în cazul secundar algebrico-logaritmic, este remarcabil că în formula (2.92) *nu intervin funcțiunile de corecție* $w_i(i=1,\ldots,p)$, deoarece $B(\varepsilon)$, $B^*(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$ și $C^*(\varepsilon)$ nu depind de ele.

Pentru a elimina inconvenientul aparent al formulei (2.92), acela de a conține integrale întinse la Γ_0, aplicând formula fundamentală (2.11) dome-

niului T_η delimitat de S_0, Σ_η, Γ_0 și funcțiunilor u și $\varphi = \Gamma^{p-m} W_p$, aceasta ultimă fiind o soluție olomorfă a ecuației $G_\varphi^p = 0$, vom avea

$$\begin{aligned}\int_{T_\eta} \Gamma^{p-m} W_p \varphi d\tau + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{S_0} \left(G^{p-i-1} (\Gamma^{p-m} W_p) \frac{dF^i u}{d\nu} - \dots \right) d\sigma + \\ + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\Sigma_\eta} \left(G^{p-i-1} (\Gamma^{p-m} W_p) \frac{dF^i u}{d\nu} - \dots \right) d\sigma + \\ + \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\Gamma_0} \left(G^{p-i-1} (\Gamma^{p-m} W_p) \frac{dF^i u}{d\nu} - \dots \right) d\sigma = 0.\end{aligned} \tag{2.93}$$

Introducând acum, în formula (2.92), valoarea sumei integralelor întinse la Γ_0, aceasta va deveni

$$\begin{aligned}-\int_{T_\eta} \Gamma^{p-m} W_p \varphi d\tau + p \cdot \log \cdot \sum_{i=0}^{p-1} \int_{S_0} \left(G^{p-i-1} \varphi \frac{dF^i u}{d\nu} - \dots \right) d\sigma - \\ - \sum_{i=0}^{p-1} \int_{S_0} \left(G^{p-i-1} (\Gamma^{p-m} W_p) \frac{dF^i u}{d\nu} - \dots \right) d\sigma + \\ + p \cdot \log \cdot \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\Sigma_\eta} \left(G^{p-i-1} \varphi \frac{dF^i u}{d\nu} - \dots \right) d\sigma - \\ - \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\Sigma_\eta} \left(G^{p-i-1} (\Gamma^{p-m} W_p) \frac{dF^i u}{d\nu} - \dots \right) d\sigma = 0,\end{aligned} \tag{2.94}$$

și se observă că și în acest caz secundar, *conoidul* $\Gamma = 0$ *nu aduce nicio contribuție în această formulă.*

Să facem acum pe η să tindă către zero în această ultimă formulă și să calculăm mai întâi limitele integralelor întinse la Σ_η.

In ceea ce privește ultimul termen din (2.94), funcțiunea W_p fiind olomorfă, este clar că el va tinde către zero, când $\eta \to 0$.

Pentru a calcula limita

$$I = \lim_{\eta=0} \mathrm{p} \cdot \log \cdot \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\Sigma_\eta} \left(G^{p-i-1} \varphi \frac{dF^i u}{d\nu} - \dots \right) d\sigma \tag{2.95}$$

vom introduce variabilele utilizate ξ^α. In acest sistem de variabile, partea logaritmică a cărei limită este I se poate scrie ca sumă a două expresii, dintre care prima este

$$\begin{aligned}\mathrm{p} \cdot \log \cdot \sum_{i=0}^{m-2} \int_{\Sigma_\eta} \beta_{p-i-1} \left[\left(\frac{dF^i u}{d\nu} + h^\alpha \pi_\alpha F u \right) \left(\frac{V_{i+1}}{\Gamma^{m-i-1}} W_{i+1} \log \Gamma + w_{i+1} \right) - \right. \\ - F^i u \left(\frac{1}{\Gamma^{m-i-1}} \cdot \frac{dV_{i+1}}{d\nu} - (m-i-1) \frac{V_{i+1}}{\Gamma^{m-i}} \cdot \frac{d\Gamma}{d\nu} + \frac{W_{i+1}}{\Gamma} \cdot \frac{d\Gamma}{d\nu} + \right. \\ \left. \left. + \frac{dW_{i+1}}{d\nu} \log \Gamma + \frac{dw_{i+1}}{d\nu} \right) \right] d\sigma,\end{aligned} \tag{2.96}$$

iar a doua se scrie

$$p.\log.\sum_{i=m-1}^{p-1}\int_{\Sigma_\eta}\alpha_{p-i-1}\left[\left(\frac{dF^i u}{d\nu}+h^\alpha\pi_\alpha F^i u\right)\left(F^{i-m+1}W_{i+1}\log\Gamma+w_{i+1}\right)-\right.$$

$$-F^i u\left(\Gamma^{i-m+1}\frac{dW_{i+1}}{d\nu}\log\Gamma+\Gamma^{i-m}W_{i+1}\frac{d\Gamma}{d\nu}+\right. \tag{2.97}$$

$$\left.\left.+(i-m+1)\Gamma^{i-m}W_{i+1}\frac{d\Gamma}{d\nu}\log\Gamma+\frac{dw_{i+1}}{d\nu}\right)\right]d\sigma,$$

elementul de suprafață $d\sigma$ fiind definit cu ajutorul variabilelor ξ^α.

Este oportun acum să distingem cazurile $m>1$, și $m=1$.

Dacă $m>1$, considerând întâi expresia (2.97) și efectuând omotetia care schimbă pe Σ_η în Σ_ρ, este vizibil că diferiții termeni care figurează sub semnul de integrare au contribuții respectiv de ordinele $\eta^{2i+1}\log\eta$, η^{2i}, $\eta^{2i}\log\eta$ $(i>1)$ sau de ordinul η^{2m-1} și deci vor tinde către zero odată cu η. Trecând apoi la expresia (2.96) și comparând-o cu expresia (2.63) din cazul secundar algebrico-logaritmic, deducem că putem scrie

$$I=(m-1)\,\beta_{p-1}\lim_{\eta=0}\text{p. log}\cdot\int_{\Sigma_\eta}\frac{uV_1}{\Gamma^m}\cdot\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma, \tag{2.98}$$

β_{p-1} având valoarea

$$\beta_{p-1}=(-1)^m 4^{p-1}(p-m)!\,(p-1)!\,(m-2)!$$

iar V_1 fiind funcțiunea care intervine în partea algebrică a soluției elementare v_1 a ecuației $Gv=0$, soluție construită de H a d a m a r d.

In virtutea calculelor din cazul secundar algebrico-logaritmic, obținem imediat valoarea lui I, anume

$$I=2^{2p-1}(p-m)!\,(p-1)!\,\pi^{m-1}u(P),\quad (m>1) \tag{2.99}$$

$u(P)$ fiind evident valoarea în P a funcțiunii necunoscute u.

Dacă $m=1$, cum $\beta_{p-i-1}=0$. trebue să considerăm numai expresia (2.97). După omotetia efectuată mai sus, contribuțiile tuturor termenilor care figurează sub semnul de integrare vor fi nule la limită, cu excepția termenului conținând pe $\Gamma^{i-m}\frac{d\Gamma}{d\nu}$ a cărei contribuție va fi de ordinul lui η^{2i} $(i=0,1,\ldots,p-1)$ și deci ea va fi diferită de zero, dacă $i=0$. Vom scrie deci în acest caz

$$I=-\alpha_{p-1}\lim_{\eta=0}\text{p}\cdot\log.\int_{\Sigma_\eta}\frac{uW_1}{\Gamma}\cdot\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma, \tag{2.100}$$

α_{p-1} având valoarea

$$\alpha_{p-1}=4^{p-1}(p-1)!^2,$$

iar W_1 fiind coeficientul termenului logaritmic din soluția elementară v_1 a ecuației $Gv=0$, care — după cum se știe — coincide cu funcțiunea lui Riemann a acestei ecuații, dacă ea este scrisă sub forma lui Laplace.

Prin urmare, rămâne de calculat numai expresia

$$I_1 = \lim_{\eta=0} \mathrm{p}\cdot\log.\int_{\Sigma_\eta} \frac{uW_1}{\Gamma}\cdot\frac{d\Gamma}{d\nu}\,d\sigma. \tag{2.101}$$

Ca și în celelalte cazuri studiate, dacă presupunem că am desvoltat pe uW_1 și $g^{\alpha\beta}$ în vecinătatea lui $P(\xi^1=\xi^2=0)$ și că am efectuat apoi omotetia care schimbă pe Σ_η în Σ_ρ, atunci este vizibil că singurii termeni care aduc o contribuție în limita I_1 sunt primii termeni ai desvotărilor lui u, W_1 și $g^{\alpha\beta}$, astfel că vom avea

$$I_1 = u(P)\lim_{\eta=0} \mathrm{p}\cdot\log.\int_{\Sigma_\eta} \frac{1}{\Gamma}\cdot\frac{d\Gamma}{d\nu}\,d\sigma, \tag{2.102}$$

coeficienții care intervin în $\dfrac{d\Gamma}{d\nu}$ având valorile $g^{11}=-1$, $g^{12}=g^{21}=0$, $g^{22}=1$.

Este inutil să menționăm că acum conoidul $\Gamma=0$ este constituit din două drepte trecând prin P, că Σ_η și Σ_ρ sunt în sistemul de coordonate ξ^α cercuri cu centrul în P și că $d\sigma$ înseamnă elementul de arc.

Calculul următor nu diferă de fapt de cel al lui Fl. Bureau [1], însă vom face în plus o observare care leagă rezultatul de partea logaritmică a ariei unei hiperbole echilatere.

Pentru a ne conforma notațiilor utilizate până acum, vom pune

$$\xi^1 = r, \quad \xi^2 = \xi$$

și ecuațiile conoidului Γ și a lui Σ_ρ se vor scrie

$$\Gamma = \xi^2 - r^2 = 0, \quad f = \xi^2 + r^2 - \rho^2 = 0.$$

Ținând seamă că normala interioară lui T_η este exterioară lui Σ_η, vom avea pe Σ_ρ

$$\frac{d\Gamma}{d\nu} = \frac{\partial\Gamma}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi^2} - \frac{\partial\Gamma}{\partial\xi^1}\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi^1} = 4(\xi^2+r^2) = 4\rho^2$$

$$d\sigma = -\frac{1}{\pi_2}\,d\xi^1 = -\frac{1}{2\xi}\,dr.$$

După o nouă omotetie, care aduce cercul Σ_ρ la cercul unitate Σ_1, deducem

$$I_1 = -2\,u(P)\,\mathrm{p}\cdot\log.\int_{\Sigma_1}\frac{dr}{\xi(\xi^2-r^2)} = \tag{2.103}$$

$$= -2\,u(P)\,\mathrm{p}\cdot\log.\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\frac{dr}{(1-2r^2)\sqrt{1-r^2}}.$$

Făcând schimbarea de variabilă utilizată și înainte

$$z = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}$$

care este regulată în $\frac{1}{\sqrt{2}}$ și $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, vom avea

$$I_1 = 2u(P)\,\mathrm{p\cdot log.}\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{z^2-1}\cdot \tag{2.104}$$

Printr'un calcul imediat (luând integrala de mai sus între $-1+\varepsilon$ și $1-\varepsilon$ și căutând apoi coeficientul lui $\log\varepsilon$), se găsește

$$\mathrm{p\cdot log.}\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{z^2-1}=1. \tag{2.105}$$

și se poate ușor proba că această ultimă integrală multiplicată cu $-\frac{1}{2}$ reprezintă partea logaritmică a ariei cuprinsă între o ramură a hiperbolei echilatere $y^2-x^2=1$ și asimptotele sale, interpretare complet analoagă cu cele din cazurile studiate.

Pentru $m=1$, ținând seamă de calculele precedente, vom scrie deci,

$$I = -2^{2p-1}(p-1)!^{\,2}\,u(P). \tag{2.106}$$

Revenind la formula (2.94), trebue să observăm din nou că atunci când η tinde către zero, integrala întinsă la T_η va tinde evident către aceeași integrală întinsă la T.

In concluzie, în cazul secundar logaritmic și pentru $1<m\leqslant p$, conform relației (2.94) — valoarea lui $u(P)$ va fi dată de formula

$$2^{2p-1}(p-m)!\,(p-1)!\,\pi^{m-1}\cdot u(P)=\int_T \Gamma^{p-m}W_p\,\varphi\,d\tau -$$

$$-\mathrm{p\cdot log.}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\left(G^{p-i-1}\varphi\frac{dF^iu}{d\nu}-F^iu\frac{dG^{p-i-1}\varphi}{d\nu}+h^\alpha\pi_\alpha G^{p-i-1}\varphi F^iu\right)d\sigma+$$

$$+\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\left(G^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)\frac{dF^iu}{d\nu}-F^iu\frac{dG^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)}{d\nu}+\right. \tag{2.107}$$

$$\left.+h^\alpha\pi_\alpha G^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)F^iu\right)d\sigma.$$

In virtutea relațiilor (2.78), (2.79), (2.81), și (2.82), putem înlocui și în acest caz simbolul parte logaritmică cu integrale obișnuite în care apare vizibil că funcțiunile de corecție nu aduc nicio contribuție în formula (2.107). Ca și în cazul secundar algebrico-logaritmic, ținând seamă de observarea lui Hadamard, putem în adevăr scrie al doilea termen din membrul al doilea al formulei (2.107) ca sumă a celor trei expresii următoare

$$\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\beta_{p-i-1}}{(m-i-2)!}\cdot\frac{d^{m-i-1}}{d\gamma^{m-i-1}}\int_{(\gamma=0)S_0^*}\left(V_{i+1}\frac{dF^iu}{d\nu}-F^iu\frac{dV_{i+1}}{d\nu}+h^\alpha\pi_\alpha V_{i+1}F^iu\right)d\sigma$$

$$\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\beta_{p-i-1}}{(m-i-2)!}\cdot\frac{d^{m-i}}{d\gamma^{m-i}}\int_{(\gamma=0)S_0^*}F^iu\,V_{i+1}\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma$$

$$-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{d}{d\gamma}\int_{(\gamma=0)S_0^*}F^iu\,G^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma,$$

unde S_0^* este porțiunea din suprafața S_0 cuprinsă între $\Gamma=0$ și $\Gamma=\gamma$

Formula (2.107) va căpăta forma

$$2^{2p-1}(p-m)!\,(p-1)!\,\pi^{m-1}\cdot u(P)=\int_T \Gamma^{p-m}W_p\,\varphi\,d\tau+$$

$$+\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\left(G^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)\frac{dF^iu}{d\nu}-F^iu\frac{dG^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)}{d\nu}+\right. \tag{2.108}$$

$$\left.+h^\alpha\pi_\alpha G^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)F^iu\right)d\sigma-$$

$$-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{d}{d\gamma}\int\limits_{(\gamma=0)\,S_0^*}F^iu\,G^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma+$$

$$+\sum_{i=0}^{m-2}\frac{\beta_{p-i-1}}{(m-i-2)!}\left\{\frac{d^{m-i}}{d\gamma^{m-i}}\int\limits_{(\gamma=0)\,S_0^*}F^iu\,V_{i+1}\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma+\right.$$

$$\left.+\frac{d^{m-i-1}}{d\gamma^{m-i-1}}\int\limits_{(\gamma=0)\,S_0^*}\left(V_{i+1}\frac{dF^iu}{d\nu}-F^iu\frac{dV_{i+1}}{d\nu}+h^\alpha\pi_\alpha V_{i+1}F^iu\right)d\sigma\right\}.$$

Se vede că în această ultimă formulă, pe lângă datele la limită, figurează funcţiunile $V_1, V_2, \ldots, V_{m-1}$, care intervin în termenii algebrici ai soluţiilor elementare $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$, precum şi funcţiunea W_p care intervine în termenul logaritmic al soluţiei elementare $v=v_p$ şi cum această funcţiune figurează sub forma $G^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}W_p)$ $(i=0,1,\ldots,p-1)$, înseamnă că în formula (2.108) intervin în mod virtual şi funcţiunile $W_1, \ldots, W_{p-1}$ corespunzătoare soluţiilor elementare $v_1, \ldots, v_{p-1}$. De asemenea este de observat că dacă $1<m\leqslant p$, când formula rezolutivă este (2.108), avem de a face cu un caz cu totul propriu ecuaţiilor polihiperbolice normale, deoarece el nu se întâlneşte la ecuaţiile de ordinul II.

Să trecem acum la ultimul caz, când $m=1$, pe care putem să-l numim *cazul lui Riemann iterat*, deoarece pentru $p=1$ obţinem tocmai cazul lui Riemann dela ecuaţiile de ordinul II. Conform relaţiei (2.94), valoarea lui $u(P)$ va fi dată de formula

$$2^{2p-1}(p-1)!^2\cdot u(P)=-\iint_T\Gamma^{p-1}W_p\,\varphi d\tau+$$

$$+\text{p. log.}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\left(G^{p-i-1}\varphi\frac{dF^iu}{d\nu}-F^iu\frac{dG^{p-i-1}\varphi}{d\nu}+h^\alpha\pi_\alpha G^{p-i-1}\varphi F^iu\right)d\sigma-$$

$$-\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\left(G^{p-i-1}(\Gamma^{p-1}W_p)\frac{dF^iu}{d\nu}-F^iu\frac{dG^{p-i-1}(\Gamma^{p-1}W_p)}{d\nu}+\right. \tag{2.109}$$

$$\left.+h^\alpha\pi_\alpha G^{p-i-1}(\Gamma^{p-1}W_p)F^iu\right)d\sigma,$$

unde prima integrală este acum o integrală dublă, iar celelalte sunt integrale curbilinii.

Pentru a înlocui în formula (2.109) simbolul parte logaritmică cu o expresie obișnuită unde nu figurează în mod vizibil funcțiunile de corecție, ținând seama de relația (2.77), vom scrie

$$\text{p. log.}\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\left(G^{p-i-1}\,\rho\,\frac{dF^i u}{d\nu}-\ldots\right)d\sigma=-\alpha_{p-1}\,\text{p. log.}\int_{S_0}\frac{uW_1}{\Gamma}\cdot\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma. \quad (2.110)$$

Cu notațiile utilizate, avem însă

$$\pi_1\,d\sigma=-\,d\xi\quad,\quad \pi_2\,d\sigma=dr$$

$$\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma=\left(\pi_2\frac{\partial\Gamma}{\partial\xi^2}-\pi_1\frac{\partial\Gamma}{\partial\xi^1}\right)d\sigma=2\,(\xi dr-rd\xi)$$

astfel că vom avea

$$\text{p. log.}\int_{S_0}\frac{uW_1}{\Gamma}\cdot\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma=2\,p.\,\text{log.}\int_{\alpha}^{\beta}uW_1\,\frac{\xi dr-rd\xi}{\xi^2-r^2}, \quad (2.111)$$

unde ultima integrală curbilinie este luată în sens direct dela α la β, care sunt respectiv punctele de intersecție ale dreptelor ce constituesc conoidul $\Gamma=0$, cu curba S.

Evaluând în vecinătatea lui α și β cantitatea de integrat din (2.111), Fl. Bureau a găsit ca valoare a acestei părți logaritmice expresia

$$-(uW_1)\,\alpha-(uW_1)\,\beta$$

și partea logaritmică (2.110) va avea deci valoarea

$$\alpha_{p-1}\left[(uW_1)_\alpha+(uW_1)_\beta\right]=2^{2p-2}(p-1)!^2\left[(uW_1)_\alpha+(uW_1)_\beta\right]. \quad (2.112)$$

Formula (2.109) va căpăta acum forma mai sugestivă

$$2^{2p-1}(p-1)!^2.\,u(P)=-\iint_T\Gamma^{p-1}W_p\,\varphi\,d\tau- \quad (2.113)$$

$$-\sum_{i=0}^{p-1}\int_{S_0}\left(G^{p-i-1}\,(\Gamma^{p-1}W_p)\,\frac{dF^i u}{d\nu}-\ldots\right)d\sigma+2^{2p-2}(p-1)!^2\left[(uW_1)_\alpha+(uW_1)_\beta\right]$$

unde — pe lângă datele la limită — intervin direct funcțiunile W_p și W_1 din termenii logaritmici ai soluțiilor elementare $v=v_p$ și v_1, sau în mod virtual funcțiunile $W_1,\ldots,W_{p-1}$ corespunzătoare soluțiilor elementare $v_1,\ldots,v_{p-1}$.

Ca și în cazul impar, dacă presupunem că suprafața S (sau curba S, dacă $m=1$) care poartă datele este necaracteristică și are o direcție de spațiu în raport cu $\Gamma=0$, este inutil să mai facem sinteza soluției obținute în diversele cazuri examinate, fiindcă suntem tocmai în cazul demonstrației pe care am dat-o prin recurență pentru existența și unicitatea soluției.

18. Condițiile de validitate ale principiului lui Huygens. Formulele rezolutive obținute în cazul impar sau par ne permit să facem imediat câteva observări generale.

O primă observare este că valoarea lui $u(P)$ exprimată prin formulele menționate nu depinde decât de datele care se raportează la S_0, adică la punctele lui S interioare pânzei retrograde a conoidului caracteristic cu vârful în P, sau situate pe această pânză. Ca și în cazul ordinului II ($p = 1$), conoidul caracteristic are deci rolul de a pune în evidență numai datele care pot să influențeze valoarea în P a funcțiunii necunoscute u.

De asemenea, datele pe S într'un punct determinat Q nu au nicio influență asupra valorii funcțiunii necunoscute în punctele exterioare pânzei directe a conoidului cu vârful în Q, pentru că atunci pânza retrogradă a conoidului, având vârful într'unul din aceste puncte, nu va conține pe Q, nici în interiorul său, nici pe frontiera sa.

Mai mult decât atât, dacă acordăm varietăților caracteristice semnificația fizică de *unde*, putem preciza în ce condiții este valabil *principiul lui Huygens în sensul său special* (*minora lui Huygens*).

Se știe că, după acest principiu, efectul perturbației produsă la momentul $t = 0$ în vecinătatea imediată a unui punct Q și în timpul unui scurt interval $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, va fi localizat la momentul $t = t_0$ în vecinătatea imediată a suprafeței unei anumite sfere de centru Q (mai precis, într'un strat sferic foarte subțire de centru Q și conținând sfera precedentă). Alegând una din variabilele x^α, de exemplu x^n, ca variabilă temporală și celelalte rămase ca variabile spațiale, valoarea lui $u(P)$ reprezentând efectul ulterior al perturbației inițiale, aceasta cere—cum a arătat Hadamard — ca $u(P)$ să depindă numai de valorile datelor pe frontiera lui S_0, nu și de cele luate în interiorul lui S_0.

Formulele rezolutive (2.41), (2.74), (2.108) și (2.113) arată că nici în cazul impar, nici în cazul par, principiul lui Huygens în sensul de mai sus nu este valabil în general, din cauza prezenței integralelor întinse la T și S_0. Aceste integrale pot să dispară din formula (2.74) și numai din această formulă, dacă funcțiunea W_p este identic nulă, cum va fi de exemplu cazul, ceva mai departe, pentru ecuația undelor iterată.

Prin urmare, *condițiile necesare și suficiente de valabilitate a principiului lui Huygens în sensul său special, pentru un fenomen guvernat de o ecuație polihiperbolică normală sunt ca numărul de variabile independente să fie un număr par mai mare decât ordinul ecuației și ca soluția elementară corespunzătoare să nu conțină termen logaritmic.*

Această proprietate, complet analoagă cu aceea semnalată de Hadamard pentru ecuațiile de ordinul II, poate fi utilizată pentru a da o interpretare foarte simplă formulelor care leagă diversele soluții elementare $v_1, v_2, \ldots, v_p$ și mai ales pentru coeficienții termenilor logaritmici corespunzători, dacă bineînțeles ele conțin astfel de termeni.

Să presupunem că principiul lui Huygens în sensul său special este valabil pentru ecuația $F^p u = \varphi$. Aceasta cere $n = 2m > 2p$ și $W_p \equiv 0$. Formulele menționate vor da atunci $W_{p-1} = W_{p-2} \ \ldots = W_1 = 0$, ceea ce înseamnă că, *dacă principiul lui Huygens în sensul său special este valabil pentru ecuația* $\mathrm{F}^p u = \varphi$, *el va fi sigur valabil pentru ecuațiile* $\mathrm{F}^{p-1} u = \varphi, \ldots, \mathrm{F} u = \varphi$.

PARTEA A TREIA

ECUAȚII POLIHIPERBOLICE NORMALE AL CĂROR SPAȚIU ASOCIAT ESTE UN SPAȚIU AL LUI LORENTZ

19. Introducerea unor condiții mai restrictive. In ce a ce urmează, vom studia câteva exemple particulare simple și vom examina ce devin în aceste cazuri formulele noastre generale.

Dacă presupunem pentru un moment că numărul variabilelor este $n \geqslant 3$, este binecunoscut — și aceasta rezultă din teoria spațiilor lui Riemann — că, pentru ca spațiul asociat ecuației hiperbolice normale $Fu = 0$ să fie euclidian, mai precis *un spațiu al lui Lorentz*, este necesar și suficient ca tensorul lui Riemann-Christoffel corespunzător să fie identic nul, adică

$$R^{\alpha}_{.\beta\gamma\delta} = 0. \tag{3.1}$$

Să presupunem în plus, că vectorul h^{α} este nul — ceea ce înseamnă că ecuația $Fu = 0$ este *auto-adjunctă* — și că invariantul k este constant, prin urmare

$$h^{\alpha} = 0 \quad , \quad k = \text{const.} \tag{3.2}$$

In aceste condiții, efectuând o schimbare convenabilă de variabile independente, vom obține ca ecuația transformată a lui $Fu = 0$, o altă ecuație care nu conține decât derivatele secunde ale lui u (toți coeficienții lor fiind egali cu -1, afară de unul dintre ei, care este egal cu $+1$) și un termen în u al cărui coficient va fi k. Ecuația transformată a lui $Fu = 0$ va fi deci *ecuația undelor*, pentru $k = 0$, sau *ecuația undelor amortizate*, pentru $k \neq 0$.

Condițiile suficiente (3.1) și (3.2) sunt de altfel și necesare, astfel că pentru o ecuație polihiperbolică normală vom putea enunța rezultatul de mai sus sub forma următoare.

Condițiile necesare și suficiente pentruca o ecuație polihiperbolică normală cu $n \geqslant 3$ *variabilele independente să poată fi adusă printr'o schimbare convenabilă a acestor variabile, la ecuația undelor iterată sau la ecuația iterată a undelor amortizate, sunt ca ea să fie autoadjunctă, ca tensorul lui Riemann-Christoffel al spațiului asociat să fie identic nul și ca invariantul* k *să fie constant.*

Cazul a două variabile trebue să fie privit și din acest punct de vedere tot ca special, deoarece pentru $n = 2$ putem găsi totdeauna o schimbare de variabile independente, astfel încât coeficienții derivatelor secunde ale lui u să fie constanți [3]. Condițiile de mai sus se vor reduce atunci numai la condițiile (3.2), care exprimă că *ecuația de referință trebue să fie auto-adjunctă, iar invariantul* k *trebue să fie constant.*

Să menționăm că putem ajunge de asemenea la ecuația undelor iterată sau la ecuația iterată a undelor amortizate, plecând dela o ecuație polihiperbolică normală cu coeficienți constanți (deci în care spațiul asociat este tot un spațiu al lui Lorentz) și apoi, făcând o transformare liniară asupra variabilelor independente, urmată de o schimbare convenabilă a funcției necunoscute [15][1]) și [6][2]).

[1]) p. 148
[2]) p. 137

Vom admite că calculele următoare, că ecuația de referință aparține uneia din clasele de ecuații puse astfel în evidență și că am efectuat în prealabil schimbările necesare, astfel ca ecuația obținută să fie ecuația undelor iterată sau ecuația iterată a undelor amortizate.

20. Ecuația undelor iterată. Să presupunem, mai întâi că F este operatorul care intervine în ecuația undelor, a cărui expresie, printr'o alegere convenabilă a unităților, se poate scrie

$$F = \frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{(\partial x^{n-1})^2} \tag{3.3}$$

și să considerăm deci ecuația

$$\left(\frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{(\partial x^{n-1})^2}\right)^p u = \varphi \tag{3.4}$$

care este *ecuația undelor iterată* (cu membrul al doilea) [1]).

Cu notațiile utilizate în prima parte, ecuația conoidului caracteristic cu vârful în $P(a^1, \ldots, a^n)$ va fi

$$\Gamma = (x^n - a^n)^2 - (x^1 - a^1)^2 - \ldots - (x^{n-1} - a^{n-1})^2 = 0, \tag{3.5}$$

adică ecuația unui con ordinar. Vom avea de asemenea relațiile

$$M = 2n, \quad q = -\frac{n}{2} + p, \quad \Omega_i(a) = (2n + 4i)\, a$$

$$F(a) = 0, \quad \Phi^i_{p,s}(a) = 0, \quad \Psi^{i,j}_{p,s}(a) = 0,$$

dacă a este o anumită constantă.

In cazul impar $n = 2m + 1$, formulele (1.51) și (1.60) dau imediat

$$U_0 = 1, \quad U_h = 0, \quad (h > 0) \tag{3.6}$$

astfel că soluția elementară va fi

$$u_p = \frac{1}{\Gamma^{\frac{n}{2} - p}}. \tag{3.7}$$

In cazul par, presupunând mai întâi $n = 2m > 2p$, ținând seamă și de formulele (1.91), (1.103) și (1.84), vom avea

$$\begin{aligned} &U_0 = 1, \quad U_h = 0, \qquad (0 < h < -q) \\ &V_0 = 0, \quad V_h = 0, \quad \Psi = 0 \quad (h > 0) \end{aligned} \tag{3.8}$$

și dacă luăm funcțiunea de corecție w_p identic nulă (ceea ce este permis), vom obține aceeași soluție elementară (3.7).

---

[1]) Rezultatele pe care le regăsim în acest paragraf au fost obținute de noi (înafară de cazul $n = 2$) pe o cale directă într'un articol din Bull. Math. de la Soc. Roum. des Sci. t. 48, 1947, p. 102 – 144.

Presupunând apoi $n = 2m \leqslant 2p$, în virtutea formulelor (1.112), (1.114) și (1.110), vom avea de asemenea

$$V_q = 1, \quad V_{q+h} = 0, \quad \Psi = 0 \quad (h > 0) \tag{3.9}$$

și dacă luăm $w_p = 0$, soluția elementară va avea expresia

$$u_p = \Gamma^{p-m} \log \Gamma. \tag{3.10}$$

In ceea ce privește soluția elementară, în cazul ecuației undelor iterată trebue deci să distingem numai un *caz algebric*, pentru $n = 2m + 1$ sau $n = 2m > 2p$ și un *caz logaritmic*, pentru $n = 2m \leqslant 2p$. Acest rezultat este complet în acord cu teoria funcțiunilor poliarmonice elementare.

Trecând la formulele rezolutive trebue să luăm acum în formulele generale obținute mai înainte $h^\alpha = 0$, $G = F$ *și* $\varphi = \varphi_p = u_p$.

In cazul impar $n = 2m + 1$, formula (2.41) se va scrie

$$\frac{(-1)^{m+p} 2^{2p-1} (p-1)!\, \pi^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(m - p + \frac{1}{2}\right)} \cdot u(P) = p \cdot \text{fin.} \int_T \nu\varphi \, d\tau +$$

$$+ p \cdot \text{fin.} \sum_{i=0}^{p-1} \int_{S_0} \left(F^{p-i-1} \varphi \frac{dF^i u}{d\nu} - F^i u \frac{dF^{p-i-1} \varphi}{d\nu} \right) d\sigma, \tag{3.11}$$

unde la numitorul din primul membru, Γ este funcțiunea eulerianã de speța a doua și unde ν are expresia (3.7).

In cazul par, dacă $n = 2m > 2p$, luând în formula (2.74)

$$W_p = 0, \quad V_1 = V_2 = \ldots = V_p = 1 \tag{3.12}$$

și introducând valoarea lui α_{p-i-1}, printr'un calcul ușor obținem

$$(-1)^{m+p-1} 2^{2p-1} \pi^{m-1} \cdot u(P) = \frac{1}{(p-1)!} \cdot \frac{d^{m-p}}{d\gamma^{m-p}} \int_{T^*} \varphi \, d\tau + \tag{3.13}$$

$$+ \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(-4)^{p-i-1}}{i!} \left\{ \frac{d^{m-i}}{d\gamma^{m-i}} \int_{S_0^*} F^i u \frac{d\Gamma}{d\nu} d\sigma + \frac{d^{m-i-1}}{d\gamma^{m-i-1}} \int_{S^*} \frac{dF^i u}{d\nu} d\sigma \right\}.$$

De asemenea, dacă $n = 2m \leqslant 2p$ și $m \neq 1$, trebue să luăm în formula (2.108)

$$W_p = 1, \quad V_1 = V_2 = \ldots = V_{m-1} = 1. \tag{3.14}$$

Cum avem $W_{i+1} = 0$ $(i < m-1)$ și $W_{i+1} = 1$ $(i \geqslant m-1)$, în virtutea relațiilor verificate de coeficienții termenilor logaritmici ai soluțiilor elementare, care se scriu în acest caz

$$F^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}) = 0 \quad (i < m-1); \quad F^{p-i-1}(\Gamma^{p-m}) =$$

$$= \alpha_{p-i-1} \Gamma^{i-m+1} \quad (i \geqslant m-1),$$

dacă introducem și valorile lui α_{p-i-1}, β_{p-i-1}, prin calcule simple formula (2.108) capătă forma

$$2^{2p-1}\pi^{m-1}\cdot u(P)=\frac{1}{(p-m)!\,(p-1)!}\int_T \Gamma^{p-m}\varphi\,d\tau+$$

$$+\sum_{i=m-1}^{p-1}{}'\frac{4^{p-i-1}}{(i-m+1)!\,i!}\int_{S_0}\Gamma^{i-m+1}\frac{dF^i u}{d\nu}d\sigma-\sum_{i=m}^{p-1}{}'\frac{4^{p-i-1}}{(i-m)!\,i!}\int_{S_0}F^i u\Gamma^{i-m}\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma+$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-i}\,4^{p-i-1}}{i!}\cdot\frac{d^{m-i}}{d\gamma^{m-i}}\int_{(\gamma=0)\,S_0^*}F^i\,u\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma+ \tag{3.15}$$

$$+\sum_{i=0}^{m-2}{}'\frac{(-1)^{m-i}4^{p-i-1}}{i!}\cdot\frac{d^{m-i-1}}{d\gamma^{m-i-1}}\int_{(\gamma=0)\,S_0^*}\frac{dF^i u}{d\nu}d\sigma.$$

In fine, pentru $n=2$ ($m=1$), luând în formula (2.113)

$$W_1=W_2=\ldots=W_p=1 \tag{3.16}$$

și ținând seamă de relațiile menționate mai sus, calcule simple conduc la formula

$$2^{2p-1}\cdot u(P)=-\frac{1}{(p-1)!^2}\iint_T\Gamma^{p-1}\varphi\,d\tau-\sum_{i=0}^{p-1}{}'\frac{4^{p-i-1}}{(i!)^2}\int_{S_0}\Gamma^i\frac{dF^i u}{d\nu}d\sigma \tag{3.17}$$

$$+\sum_{i=1}^{p-1}{}'\frac{4^{p-i-1}}{(i-1)!\,i!}\int_{S_0}F^i\,u\Gamma^{i-1}\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma+2^{2p-2}[(u)_\alpha+(u)_\beta].$$

Este clar că, în virtutea formulelor rezolutive de mai sus, sau ținând seama de forma soluției elementare, în conformitate cu un rezultat general asupra principiului lui Huygens pe care l-am obținut mai înainte, acest principiu va fi acum valabil în sensul său special, dacă $n=2m>2p$.

Prin urmare, *principiul lui Huygens în sensul său special nu este valabil pentru un fenomen guvernat de ecuația undelor iterată, decât dacă numărul variabilelor independente este un număr par mai mare decât ordinul ecuației.*

Formulele rezolutive obținute mai sus sunt valabile pentru orice p și orice formă a lui S, care îndeplinește evident condițiile generale impuse în a doua parte a acestei lucrări.

Să presupunem în particular $p=2$, deci *cazul bihiperbolic*, conducând la ceea ce s'ar putea numi *prima iterată a ecuației undelor* (cu partea a doua)

și să examinăm cum se prezintă formulele de mai sus pentru $n = 2$, 3 și 4 variabile independente.

In acest scop, să introducem pentru datele pe S_0 notațiile comode

$$u = u_0, \quad \frac{du}{d\nu} = u_1, \quad Fu = u_2, \quad \frac{dFu}{d\nu} = u_3.$$

Pentru $n = 2$, formula (3.17) se va scrie

$$8u(P) = -\iint_T \varphi\Gamma\, d\tau + 4[(u_0)_\alpha + (u_0)_\beta] - \int_{S_0} \left(4u_1 - u_2\frac{d\Gamma}{d\nu} + u_3\Gamma\right) d\sigma. \tag{3.18}$$

Pentru $n = 3$, ținând seamă de faptul că

$$\varphi = \sqrt{\Gamma}, \quad F\varphi = \frac{2}{\sqrt{\Gamma}}, \quad \Gamma = (x^3 - a^3)^2 - (x^1 - a^1)^2 - (x^2 - a^2)^2,$$

formula (3.11) va deveni

$$4\pi u(P) = \iiint_T \varphi\sqrt{\Gamma}\, d\tau + \iint_{S_0}\left(u_3\sqrt{\Gamma} - \frac{u_2}{2\sqrt{\Gamma}}\cdot\frac{d\Gamma}{d\nu} + \frac{2u_1}{\sqrt{\Gamma}}\right) d\sigma$$

$$+ p\cdot\text{fin.}\iint_S \frac{u_0}{\Gamma^{3/2}}\cdot\frac{d\Gamma}{d\nu}\, d\sigma, \tag{3.19}$$

în care ultimul termen din partea a doua este singurul care nu este o integrală ordinară. H a d a m a r d a arătat cum se poate înlocui acest termen prin suma a două integrale ordinare, una fiind o integrală dublă, iar cealaltă o integrală curbilinie.

Pentru aceasta, să presupunem că suprafața S este planul $x^3 = 0$. Pentru a fixa ideile, să admitem că $a^3 = a > 0$, adică vârful conului caracteristic se găsește în regiunea pozitivă determinată de S.

Introducând coordonatele cilindrice

$$r = \sqrt{(x^1 - a^1)^2 + (x^2 - a^2)^2}, \quad \varphi,$$

coordonatele unui punct oarecare al pânzei retrograde a lui Γ vor fi

$$x^1 = a^1 + r\cos\varphi, \quad x^2 = a^2 + r\sin\varphi, \quad x^3 = a^3 - r.$$

Vom scrie deci

$$d\sigma = -\,dx^1\,dx^2 = -\,r\,dr\,d\varphi$$

$$\frac{d}{d\nu} = \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad \frac{d\Gamma}{d\nu} = -\,2a^3 = -\,2a$$

și ultimul termen din (3.19) va avea expresia

$$p\cdot\text{fin.}\iint_{S_0}\frac{u_0}{\Gamma^{3/2}}\cdot\frac{d\Gamma}{d\nu}\, d\sigma = 2a\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot p\cdot\text{fin.}\int_0^a \frac{u_0 r\, dr}{(a^2 - r^2)^{3/2}}\cdot \tag{3.20}$$

Punând apoi $\overline{u}_0 = (u_0)_{r=a} = u_0(a^1 + a\cos\varphi,\ a^2 + a\sin\varphi)$ și utilizând metoda cunoscută pentru calculul părții finite, vom avea imediat

$$p \cdot \text{fin.} \int_0^a \frac{u_0 r\,dr}{(a^2 - r^2)^{3/2}} = \int_0^a \frac{(u_0 - \overline{u}_0)\, r\,dr}{(a^2 - r^2)^{3/2}} - \frac{\overline{u}_0}{a},$$

astfel că formula (3.19) va lua în definitiv forma

$$4\pi u(P) = \iiint_T \varphi \sqrt{\Gamma}\, d\tau - 2\int_0^{2\pi} \overline{u}_0\, d\varphi + \\ + \iint_{S_0} \left(u_3 \sqrt{\Gamma} - \frac{u_2}{2\sqrt{\Gamma}} \cdot \frac{d\Gamma}{d\nu} + \frac{2u_1}{\sqrt{\Gamma}} + \frac{u_0 - \overline{u}_0}{\Gamma^{3/2}} \cdot \frac{d\Gamma}{d\nu} \right) d\sigma, \tag{3.21}$$

unde nu intervin decât integrale ordinare.

In fine, pentru $n = 4$, formula (3.15) se va scrie:

$$8\pi u(P) = \int_T \varphi\, d\tau + \int_{S_0} u_3\, d\sigma - \frac{d}{d\gamma}_{(\gamma=0)} \int_{S_0^*} u_2 \frac{d\Gamma}{d\nu} d\sigma + \\ + 4\frac{d}{d\gamma}_{(\gamma=0)} \int_{S_0^*} u_1\, d\sigma + 4\frac{d^2}{d\gamma^2}_{(\gamma=0)} \int_{S_0^*} u_0 \frac{d\Gamma}{d\nu} d\sigma \tag{3.22}$$

unde prima integrală este o integrală cuadruplă, iar celelalte, integrale triple.

21. Ecuația iterată a undelor amortizate. Să presupunem acum că F are expresia

$$F = \frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{(\partial x^{n-1})^2} - k. \quad (k = \text{const.}) \tag{3.23}$$

și să considerăm deci ecuația

$$\left(\frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{(\partial x^{n-1})^2} - k. \right)^p u = \varphi, \tag{3.24}$$

care este *ecuația iterată a undelor amortizate* (cu membrul al doilea).

Cum nu există nicio diferență între tipul hiperbolic și tipul eliptic în ceea ce privește soluția elementară, să schimbăm pe x^n în $i\,x^n$ și pe a^n în $i\,a^n$, respectiv în expresia (3.23) a lui F și în ecuația (3.5) a conului caracteristic $(i = \sqrt{-1})$. Expresia lui F și ecuația conului caracteristic se vor scrie atunci

$$-F = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2} + k.$$

$$-\Gamma = (x^1 - a^1)^2 + (x^2 - a^2)^2 + \ldots + (x^n - a^n)^2 = 0.$$

Este clar că formulele care dau expresiile lui U_h, V_h ce intervin în soluția elementară vor procura pentru acești coeficienți valori constante, astfel că pentru a obține o soluție elementară a ecuației

$$(-1)^p F^p u = 0$$

vom putea căuta, ca și H a d a m a r d pentru ecuația $Fu = 0$, o soluție de forma $u = u(\rho)$, unde $\rho = \sqrt{-\Gamma}$.

Calculând expresia lui $Fu(\rho)$, deducem imediat că $u(\rho)$ trebue să verifice ecuația diferențială ordinară

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} + k\cdot\right)^p u = 0, \tag{3.25}$$

care este *ecuația lui Bessel iterată*.

Determinarea soluției elementare căutate revine deci la integrarea ecuației diferențiale (3.25). Această integrare se poate face integrând întâi o ecuație Bessel și apoi $p - 1$, alte ecuații Bessel cu partea a doua. Conform teoriei ecuației lui Bessel, este suficient să integrăm prima ecuație auxiliară pentru două valori consecutive ale lui n, de exemplu, pentru $n = 1$ și 2, pentru a avea apoi prin diferențieri și calcule algebrice simple integrala sa generală pentru orice n întreg. Prima ecuație auxiliară fiind integrată, celelalte $p - 1$ ecuații auxiliare se vor integra la rândul lor prin cuadraturi.

Este evident că trebue să alegem, dintre integralele particulare ale ecuației (3.25), aceea care se comportă pe $\Gamma = 0$ la fel cu soluția elementară pe care o căutăm și că la sfârșit trebue să revenim, prin schimbări inverse, la operatorul de tip hiperbolic. Un caz remarcabil poate fi semnalat de pe acum, acela când n este impar, integrala generală a primei ecuații auxiliare exprimându-se atunci cu ajutorul transcendentelor clasice.

Totuși, nu vom urma calea schițată mai sus, deoarece vrem să utilizăm și în acest caz, calculele generale făcute în prima parte a acestei lucrări.

Vom considera numai cazul bihiperbolic ($p = 2$), când putem spune că ecuația de referință este *prima iterată a ecuației undelor amortizate* (cu partea a doua) și vom examina cazurile $n = 2, 3$ și 4 variabile independente. Inainte de a începe această examinare, să menționăm relațiile

$$M = 2n\ ,\ q = -\frac{n}{2} + p\ ,\ \Omega_i(a) = (2n + 4i)\,a$$

$$F(a) = -ka\ ,\ \Phi^i_{p,q+h-i}(a) = C^i_p 4^{p-i}(-k)^i \frac{(h+p-i-1)!}{(h-1)!}a,$$

a fiind o constantă oarecare.

Pentru $n = 2$, vom avea $q = 1$ și soluția elementară va fi de forma

$$u_2 = \Gamma V \log \Gamma + w_2, \tag{3.26}$$

unde w_2 este funcțiunea de corecție, iar V are expresia

$$V = V_1 + V_2\Gamma + \ldots + V_{h+1}\Gamma^h + \ldots \tag{3.27}$$

Formulele (1.112) și (1.110) dau imediat

$$V_1 = 1\ ,\ V_2 = \frac{k}{4.1!\,2!}\ ,\ V_3 = \frac{k^2}{4^2 2!\,3!}, \ldots, V_{h+1} = \frac{k^h}{4^h\,h!\,(h+1)!}, \cdots \tag{3.28}$$

expresia lui V_{h+1} ($h = 0, 1, \ldots$) găsindu-se prin recurență.

Introducând funcțiunea lui Bessel

$$J_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{2^2} + \frac{\xi^4}{2^4(2!)^2} - \ldots + (-1)^h \frac{\xi^{2h}}{2^{2h}(h!)^2} + \ldots$$

și funcțiunea întreagă care se deduce din ea

$$j(\lambda) = J_0(2\sqrt{-\lambda}) = 1 + \frac{\lambda}{1^2} + \frac{\lambda^2}{(2!)^2} + \ldots + \frac{\lambda^h}{(h!)^2} + \ldots,$$

expresia lui V se va putea scrie

$$V = j'\left(\frac{k}{4}\Gamma\right), \qquad \left(j'(\lambda) = \frac{dj}{d\lambda}\right). \tag{3.29}$$

Soluția elementară u_2 va avea deci expresia

$$u_2 = \Gamma j'\left(\frac{k}{4}\Gamma\right)\log\Gamma + w_2. \tag{3.30}$$

Pentru $n = 3$, vom avea $q = \frac{1}{2}$ și soluția elementară se va scrie

$$u_2 = U\sqrt{\Gamma} \tag{3.31}$$

funcțiunea U având expresia

$$U = U_0 + U_1\Gamma + \ldots + U_h\Gamma^h + \ldots \tag{3.32}$$

Formulele (1.51) și (1.60) dau imediat

$$U_0 = 1, \quad U_1 = \frac{k}{3!}, \quad U_2 = \frac{k^2}{5!}, \ \ldots, \ U_h = \frac{k^h}{(2h+1)!}, \ldots, \tag{3.33}$$

expresia lui U_h $(h = 0, 1, \ldots)$ obținându-se prin recurență. Introducând un sinus hiperbolic, soluția elementară va avea expresia

$$u_2 = \sqrt{\Gamma}\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{k\Gamma}}{\sqrt{k\Gamma}} = \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{sh}\sqrt{k\Gamma}. \tag{3.34}$$

In fine, pentru $n = 4$, vom avea $q = 0$ și soluția elementară va avea forma

$$u_2 = V\log\Gamma + w_2, \tag{3.35}$$

w_2, fiind funcțiunea de corecție, iar V având expresia

$$V = V_0 + V_1\Gamma + \ldots + V_h\Gamma^h + \ldots \tag{3.36}$$

Ținând seamă și de faptul că $\Psi^{1,0}_{2,0} = \Phi^1_{2,0}$, formulele (1.112), (1.114) și (1.110) dau imediat

$$V_0 = 1, \quad V_1 = \frac{k}{4}, \quad V_2 = \frac{k^2}{4^2(2!)^2}, \ldots, \ V_h = \frac{k^h}{4^h(h!)^2} \cdots, \tag{3.37}$$

ultima expresie deducându-se prin recurență. Cu ajutorul funcțiunei $J_0(\xi)$, soluția elementară se va scrie

$$u_2 = J_0(\sqrt{-k\Gamma})\log\Gamma + w_2. \tag{3.38}$$

Pentru a scrie acum formulele rezolutive respective, vom utiliza iar notațiile u_0, u_1, u_2, u_3 pentru datele pe S_0 și relațiile care leagă soluțiile elementare obținute mai sus de soluțiile elementare ale lui Hadamard. Va trebui evident să luăm în formulele generale din a doua parte a acestei lucrări $h^\alpha = 0$, $G = F$, $p = 2$ și $\varphi = u_2 = v_2$.

Pentru $n = 2$, ținând seamă de relația

$$F\left[\Gamma j'\left(\frac{k}{4}\Gamma\right)\right] = 4J_0\sqrt{-k\Gamma}, \quad \Gamma = (x^2 - a^2)^2 - (x^1 - a^1)^2,$$

formula (2.113) va deveni

$$\begin{aligned} 8u(P) = &-\iint_T \Gamma j'\left(\frac{k}{4}\Gamma\right)d\tau + 4\left\{\left[u_0 J_0(\sqrt{-k\Gamma})\right]_\alpha + \right. \\ &\left. + \left[u_0 J_0(\sqrt{-k\Gamma})\right]_\beta\right\} - \int_{S_0}\left\{u_3\,\Gamma j'\left(\frac{k}{4}\Gamma\right) - u_2\frac{d}{d\nu}\left[\Gamma j'\left(\frac{k}{4}\Gamma\right)\right] + \right. \\ &\left. + 4u_1 J_0(\sqrt{-k\Gamma}) - 4u_0\frac{d}{d\nu}J_0(\sqrt{-k\Gamma})\right\}d\sigma. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Pentru $n = 3$, în virtutea relației

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{sh}\sqrt{k\Gamma}\right) = 2\frac{\operatorname{ch}\sqrt{k\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}, \quad \Gamma = (x^3 - a^3)^2 - (x^1 - a^1)^2 - (x^2 - a^2)^2$$

formula (2.41) se va scrie

$$\begin{aligned} 8\pi u(P) = &\frac{1}{\sqrt{k}}\iiint_T \varphi \operatorname{sh}\sqrt{k\Gamma}\,d\tau + \iint_{S_0}\left(\frac{u_3}{\sqrt{k}}\operatorname{sh}\sqrt{k\Gamma} - \frac{u_2}{2\sqrt{\Gamma}}\operatorname{ch}\sqrt{k\Gamma}\cdot\frac{d\Gamma}{d\nu} + \right. \\ &\left. + \frac{2u_1}{\sqrt{\Gamma}}\operatorname{ch}\sqrt{k\Gamma} - u_0\sqrt{k}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{k\Gamma}}{\Gamma}\cdot\frac{d\Gamma}{d\nu}\right)d\sigma + p.\,\text{fin.}\iint_{S_0}\frac{u_0\operatorname{ch}\sqrt{k\Gamma}}{\Gamma^{3/2}}\cdot\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma, \end{aligned} \tag{3.40}$$

unde numai ultimul termen din partea a doua nu este o integrală ordinară.

Ca și la numărul precedent, luând ca suprafață S planul $x^3 = 0$ și presupunând că $a^3 = a > 0$, putem înlocui ultimul termen din (3.40) prin suma dintre o integrală dublă și o integrală curbilinie. Este suficient, pentru aceasta, să introducem din nou coordonatele cilindrice r, φ și ținând seamă că $\operatorname{ch}\sqrt{k\Gamma} = 1$, pentru $x^3 = 0$ și $r = a^3$, termenul menționat va fi egal cu

$$\iint_\sigma \frac{u_0\operatorname{ch}\sqrt{k\Gamma} - \bar{u}_0}{\Gamma^{3/2}}\cdot\frac{d\Gamma}{d\nu}d\sigma + \int_0^{2\pi}\bar{u}_0\,d\varphi,$$

$\bar{u}_0$ reprezentând, ca mai înainte, valoarea lui u_0 pe cercul $r = a^3$ din planul $x^3 = 0$.

Formula (3.40) se va scrie deci

$$4\pi u(P) = \frac{1}{\sqrt{k}} \iiint_T \varphi \operatorname{sh} \sqrt{k\Gamma}\, d\tau + \iint_{S_0} \left(\frac{u_3}{\sqrt{k}} \operatorname{sh} \sqrt{k\Gamma} - \frac{u_2}{2\sqrt{\Gamma}} \operatorname{ch} \sqrt{k\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\nu} + \right.$$

$$\left. + \frac{2u_1}{\sqrt{\Gamma}} \operatorname{ch} \sqrt{k\Gamma} - u_0 \sqrt{k} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{k\Gamma}}{\Gamma} \cdot \frac{d\Gamma}{d\nu} + \frac{u_0 \operatorname{ch} \sqrt{k\Gamma} - \bar{u}_0}{\Gamma^{3/2}} \cdot \frac{d\Gamma}{d\nu} \right) d\sigma + \int_0^{2\pi} \bar{u}_0\, d\varphi, \tag{3.41}$$

unde toate integralele sunt integrale ordinare.

In fine, pentru $n = 4$, ţinând seama de faptul că

$$F\left[J_0(\sqrt{-k\Gamma}) \right] = kj'\left(\frac{k}{4} \Gamma \right),$$

$$\Gamma = (x^4 - a^4)^2 - (x^1 - a^1)^2 - (x^2 - a^2)^2 - (x^3 - a^3)^2$$

formula (2.108) se va scrie

$$8\pi u(P) = \int_T \varphi\, J_0(\sqrt{-k\Gamma})\, d\tau + \int_{S_0} \left[u_3 J_0(\sqrt{-k\Gamma}) - u_2 \frac{d}{d\nu} J_0(\sqrt{-k\Gamma}) + \right.$$

$$\left. + ku_1 j'\left(\frac{k}{4} \Gamma \right) - ku_0 \frac{d}{d\nu} j'\left(\frac{k}{4} \Gamma \right) \right] d\sigma - \frac{d}{d\gamma}_{(\gamma=0)} \int_{S_0^*} \left[ku_0 j'\left(\frac{k}{4} \Gamma \right) \frac{d\Gamma}{d\nu} - \right. \tag{3.42}$$

$$\left. - 4u_1 + u_2 J_0(\sqrt{-k\Gamma}) \frac{d\Gamma}{d\nu} \right] d\sigma + 4 \frac{d^2}{d\gamma^2}_{(\gamma=0)} \int_{S_0^*} u_0 \frac{d\Gamma}{d\nu} d\sigma,$$

prima integrală fiind o integrală cuadruplă, iar celelalte, integrale triple.

Formulele rezolutive obţinute în cazul general, care trebue considerate destul de simple, fiindcă ecuaţia de referinţă este de ordin superior şi cu coeficienţi variabili, conduc astfel în cazul ecuaţiei undelor iterată sau al ecuaţiei iterate a undelor amortizate la alte formule rezolutive, excesiv de simple pentru ecuaţiile bihiperbolice şi conţinând pentru $n = 2, 3$ şi 4 numai integrale ordinare.

Institutul de Matematică
al Academiei R.P.R., Bucureşti

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НОРМАЛЬНЫМИ ПОЛИГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ЛИНЕЙНЫМИ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Уравнения с частными производными, которые автор изучает в этом труде, пользуясь методом Гадамарда и распространением этого метода, принадлежат к разряду уравнений, рассматриваемых Н. Теодореску, характерной формой которых является степень квадратной формы.

С другой точки зрения, ввиду того, что эти уравнения имеют в первом члене самый общий интегрированный линейный дифференциальный оператор второго порядка, но гиперболического типа и с голоморфными коэффициентами, они могут рассматриваться как распространение в гипер-

болическую область уравнения, удовлетворяющего полигармоническим функциям, и именно эта аналогия навела автора на мысль назвать уравнение *полигиперболическим.*

Настоящий труд охватывает три раздела: построение элементарного решения, действительное решение задачи Коши для нормального *полигиперболического* случая и операторы с уравнениями, ассоциированное пространство которых является лоренцовым пространством.

I. *Элементарное решение.* Рассматривается уравнение с линейными частными производными

$$F^p u = 0, \ (F^2 = FF, \ldots, F^p = FF^{p-1}), \tag{1}$$

где u является неизвестной функцией, предполагающейся неизменной, и F есть дифференциальный оператор (1,2) с голоморфным коэффициентом в области R пространства переменных $x^1, \ldots, x^n$.

После выявления уравнения с частными производными (1.4) характерных многообразий, следуя за некоторыми исследованиями H. Теодореску, автор присовокупляет к соответственному уравнению. риманово пространство, определенное метрической формой (1.5), которую Гадамар связал с уравнением $Fu = 0$. Берут затем уравнение (1) в неизменной форме (1.8), где оператор F имеет тензорное выражение (1.9) [1]), так как его коэффициенты вычислены при помощи формул (1.7) и символа ∇, указывающего ковариантное дифференцирование в вышеуказанном пространстве.

В поисках решения в форме $u = UG^q$, где $G = 0$ есть поверхность без сингулярной точки, U есть регулярная функция в смысле Гадамара и q есть данная константная, выводят, что $G = 0$ *должно являться характерным многообразием*, комплектный розультат, согласованный с теоремой Ле Ру и Делассю.

Таким образом вводится совсем естественным путем семейство (Ω) дифференциальных операторов, причем любой оператор Ω_i этого семейства имеет выражение

$$\Omega_i = 2\Delta \ (\cdot, G) + (M + iA_1)., \ (M = FG - kG), \tag{2}$$

где $\Delta(\cdot, G)$ есть оператор первого разряда Ламэ-Бельтрами и A есть некоторая регулярная функция даже при $G = 0$.

При помощи этих операторов доказывают от обратного формулу (1.17), где сумма $\Sigma F^i \Omega_{q-p+i} \ldots \Omega_{q-1}$ $(i = 1, \ldots, p-1)$ содержит все отдельные символические произведения, которые можно построить $p - i$ операторами $\Omega_{q-1}, \ldots, \Omega_{q-p+1}$, примененными в убывающем порядке их показателей, и оператором F, который итегрирован i раз в каждом символическом произведении (так что любой из операторов Ω может иметь справа или слева оператор F, повторяющийся не более i раз). Аннулирование $F^p(UG^q)$ в общем требует, чтобы при $G = 0$ имело место соотношение (1.20), которое является уравнением с производными порядка p, интегрирование которых удобно сводится к интегрированию p линейных уравнений первого порядка. Каждое из этих p уравнений требует введения геодезических нулевой длины ассоциированного риманова пространства являющихся *бихарактеристическими* кривыми, определяемыми системами

[1]) Для обозначения тензоров пользуются всегда греческими знаками.

дифференциалов (1.21) и (1.22), так что рассмотрение этих кривых навязывается само собой, как в случае второго порядка ($p = 1$).

Ввиду построения элементарного решения, вводится согласно идеям Гадамара *характерный коноид*, имеющий верхушку в любой точке $P(a^1, \ldots, a^n)$. Его уравнением является $\Gamma = 0$, где первый член Γ, определенный соотношением (1.33), подтверждает уравнение с частными производными (1.38).

Затем автор вводит несколько алгебраических замечаний относительно семейства операторов (Ω) в частном случае, когда $G = \Gamma$, при i являющимся рациональным числом и $A_1 = 4$. Если вместо (Ω) рассматривать более обширное семейство, содержащее все операторы формы μE, $\nu\Omega i$ (μ, ν являются любыми рациональными числами, из коих первое может даже быть равным нулю, и где E является оператором единицей в отношении символического умножения), можно доказать при помощи соотношения (1.42). *что система* μE, $\nu\,\Omega i$ *является двумерным векторным пространством, построенным на теле рациональных чисел и что семейство* (Ω) *погружено в это векторное пространство.* Равным образом, при помощи основных операторов Ω_0 и E приходят к заключению, что *множество символических произведений* $\Omega_{j_1} \ldots \Omega_{j_s}$ *составляет евклидово кольцо* $R[\Omega_0]$.

Применяя метод Гадамара, видно, что приведенные замечания позволяют построение элементарного решения уравнения (1). Для упрощения записи вводятся еще операторы $E_{i\,j}$ и $\Phi^i_{j,k}$ посредством формул (1.45), где операторы Ω построены при помощи Γ, и затем рассматриваются порознь случаи $n = 2m + 1$ и $n = 2m$.

В нечетном случае $(n = 2m + 1)$ получено точно определенное *алгебраическое элементарное решение* $u = U\Gamma^{-m+p-\frac{1}{2}}$, где U является голоморфной функцией, сокращающейся до единицы в точке P, выражение которой является (1.61), где функции V_h даны формулами (1.51) и (1.60).

В четном случае $(n = 2m)$ элементарное решение определяется, за исключением известной голоморфной функции w, широко неопределенной, названной автором *поправочной функцией* и существование которой вытекает из теоремы Коши-Ковалевской. Если $n = 2m > 2p$, это элементарное решение является *алгебраически логарифмическим* и имеет формулу $u = U\Gamma^{-m+p} + V \log \Gamma + w$, U и V так как w является голоморфной функцией, первая сокращается до единицы в точке P. Функции U_h $(h < m - p)$ разложения U имеют те же выражения (1.51) и (1.60) как и в нечетном случае, и функции V_h разложения (1.82) V даны формулами (1.91), (1.103) и (1.84). В формуле (1.103) оператор $\psi^{i,j}_{p,2h}$ получается от $\Phi^i_{p,2h}$, заменой в каждом из этих членов справа на лево и всевозможными способами $j \leqslant i$ раз оператора F соответственно Ω_{h-1}, $\Omega_{h-2}, \ldots, \Omega_{h-j}$ и заменой во всех таким образом полученных членах h на $h-1$ в операторах Ω, находящихся между Ω_{h-1} и Ω_{h-2}, затем h на $h-2$ в операторах Ω, находящихся между Ω_{h-2} и Ω_{h-3}, до Ω, в которых заменяют h на $h-j$.

Когда $n = 2m \leqslant 2p$, элементарное решение является *логарифмическим* и имеет формулу $u = \Gamma^{-m+p} V \log \Gamma + w$, причем V является как w голоморфной функцией, сокращающейся до единицы в точке P.

Коэффициенты разложения (1.108) V имеют выражения (1.112, (1.114) и (1.110).

По бихарактеристическим кривым, коэффициенты, фигурирующие в сериях, дающих элементарные решения, всегда годные для одного уравнения типа Фукса, которое Теодореску уже встречал в случаях уравнений с линейными частными производными с двойными квадратными характеристиками. Первые члены полученных уравнений типа Фукса представляют, между прочим, замечательное свойство, а именно способность разлагаться в символические переместимые факторы первого порядка.

Была доказана конвергенция репрезентативных серий при помощи способа завышения Гадамара и распространения Перроном одной теоремы Пуанкаре относительно линейных уравнений с финитными разностями.

Различные элементарные решения уравнений с порядками последовательных итераций связаны между собой и в частности с элементарным решением Гадамара соотношениями (1.121), (1.124) и (1.126), выявленными уже Мироном Никулеску в случае элементарных полигармонических функций.

II. *Задача Коши.* Автор намерен решить задачу Коши для заданной плоскости S, правильной в смысле Гадамара и уравнения

$$F^p u = \varphi, \tag{3}$$

где F имеет выражение (1.9) и где φ является известной функцией переменных x^α, регулярной в R. Далее предполагается, что F является нормальным гиперболическим типом и говорят тогда, что уравнение (3) *нормального полигиперболического типа.*

Вводят поперечную производную $b S$, определенную соотношениями (2.5), и предполагая, что S и уравнение $Fu = \varphi$ таковы, что задача Коши *правильно поставлена*, доказывают от обратного, что *можно определить единственный интеграл уравнения* (3), *если известны величины, принятые* $u, Fu, \ldots, F^{p-1} u$ *и* $\frac{du}{dv}, \frac{dFu}{dv}, \ldots, \frac{dF^{p-1}u}{dv}$ *на* S. Предыдущий результат является лишь теоремой существования и единства, дающей возможность считать лишним синтез решения, полученного прямым путем.

Для получения действительного решения задачи, устанавливают сначала основную формулу (2.11), записанную также в неизменной форме и предполагают, что дело касается *внутренней задачи.*

Затем вводится гипотеза, что данные на S, то есть значения, принятые $F^i u$ и $\frac{dF^i u}{dv}$ на S, допускают частные производные до порядка $m - i > 0$ или что они непрерывны лишь при $m - i \leqslant 0$ $(i = 0,1, \ldots, p-1)$.

Равным образом предполагается, что неизвестная функция u допускает частные производные до порядка $N = \max(m + p - 1, 2p)$ и известная функция φ частных производных до порядка $m - p > 0$ или что она только непрерывна, если $m - p \leqslant 0$.

В формуле (2.11) берут функцию v, равную элементарному решению вспомогательного решения $G^p v = 0$, построенного при помощи точки P, и для u решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям Коши.

В нечетном случае прибегают, как Гадамар и Ф. Бюро, к понятию финитной части бесконечного многократного интеграла, а в четном случае к понятию логарифмической части бесконечного многократного интеграла, понятие введенное К. Фридрихсом и применяемое также Ф. Бюро, но

вытекающее также из труда Гадамара. Такого рода вычисления, когда не применяется метод понижения, и в особенности вычисления по Бюро методом логарифмической части требуют особого рассмотрения для случая двух независимых переменных (итеративный случай Римана).

Во всех случаях применялись формулы, связующие полученные элементарные результаты с элементарными результатами Гадамара и, кроме этого для получения члена, содержащего u (P), использовалась финитная часть $(n = 2m + 1)$ или логарифмическая часть $(n = 2m)$ гиперболоидного объема с двумя поверхностями в пространстве с n измерениями.

В четном случае выявлялось, что поправочные функции ничего не вносят в формулы решения.

Так, была получена в нечетном случае $(n = 2m + 1)$ формула решения (2.41), а в четном случае $(n = 2m)$ формула (2.74), когда $n = 2m > 2p$, и формула (2.108), когда $2 < n = 2m \leqslant 2p$ и формула (2.113) когд $2 = n = 2m \leqslant 2p$.

В нечетном случае было доказано *свойство замены* для элементарного решения, что позволило вывести немедленно заключения для задачи интеграции вспомогательного уравнения.

Автор заканчивает вторую часть несколькими общими заключениями относительно полученных формул решения, затем он перечисляет необходимые и достаточные условия действительности *принцина юйгенса в его особом смысле (минора юйгенса)* для явления, управляемого посредством нормального полигиперболического уравнения, а именно: *число независимых переменных должно быть четным и большим, чем порядок уравнения, и соответственное элементарное решение не должно заключать логарифмических членов.*

III. *Нормальные полигиперболические уравнения, ассоциированное пространство которых является лоренцовым пространством.* Сначала упоминаются необходимые и достаточные условия, чтобы нормальное гиперболическое уравнение с $n \geqslant 3$ независимыми переменными могло быть приведено посредством соответствующего изменения этих переменных к *итеративному уравнению волн или итеративному уравнению амортизированных волн*, а именно

$$R^{\alpha}_{.\beta\delta\gamma} = 0, \quad h^{\alpha} = 0, \quad k = \text{const.}, \tag{4}$$

где $R^{\alpha}_{.\gamma\delta\beta}$ является тензором Римана-Христофелла ассоциированного пространства, где $h^{\alpha} = 0$ выражает, что соответственное уравнение будет самоприсоединенным. Для $n = 2$ эти условия приводятся лишь до $h^{\alpha} = 0$ и $h = \text{const}$.

Предполагая, что уравнение (3) обладает этими свойствами или что оно имеет постоянные коэффициенты, так что можно его привести посредством перестановки неизвестных с последующей линейной трансформацией независимых переменных к одной из двух рассматриваемых форм, автор применяет полученные общие результаты к итеративному уравнению волн и итеративному уравнению амортизованных волн, ассоциированное пространство которых, очевидно, является лоренцовым пространством.

Для итеративного уравнения волн (3.4) различают лишь один *алгебраический случай* $(n = 2m + 1$ где $n = 2m > 2p)$ и один *логарифмический* $(n = 2m \leqslant 2p)$.

В нечетном случае ($n=2m+1$) получается формула решения (3.11), а в четном случае $n=2m$) формула (3.13), если $n>2p$, или формула (3.15), если $n\leqslant 2p$ ($n\neq 2$), или формула (3.17), если $n=2$.

Формулы решения показывают, что принцип юйгенса в его особом смысле действителен лишь для явления, управляемого посредством итеративного уравнения волн, если *число независимых переменных является четным и большим, чем порядок уравнения.*

Затем рассматривается *бигиперболический* случай, ведущий к *первой итерации уравнения волн*, и даются формулы решения (3.18) (3.21) и (3.22) соответственно для $n=2,3,4$.

В силу предварительного замечания определение элементарного решения итеративного уравнения амортизованных волн (3.24) требует интегрирования уравнения итерации Бесселя (3.25). Рассматривается только бигиперболический случай, когда уравнение является *первоитерацией уравнения амортизованных волн* и посредством ввода бесселевой функции $J_0(\xi)$ и целой функции $j(\lambda)$, которая отсюда вытекает, получаются при $n=2,3,4$ формулы решений (3.39), (3.41) и (3.42), где как и в случае первой итерации уравнения волн учавствуют лишь ординарные интегралы.

LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES ET POLYHYPERBOLIQUES NORMALES

(RÉSUMÉ)

Les équations aux dérivées partielles que l'Auteur étudie dans ce travail, en utilisant la méthode de Hadamard et les extensions de cette méthode, appartiennent à la classe d'équations considérée par N. Theodorescu, leur forme caractéristique étant une puissance d'une forme quadratique.

D'un autre point de vue, ces équations ayant dans le premier membre l'opérateur différentiel linéaire du second ordre itéré le plus général, mais du type hyperbolique et à coefficients holomorphes, peuvent être considerées comme l'extension dans le domaine hyperbolique de l'équation vérifiée par les fonctions polyharmoniques et c'est cette analogie qui a suggéré à l'Auteur l'idée de les appeler équations *polyhyperboliques.*

Le présent travail comprend trois parties: la construction de la solution élémentaire, la résolution effective du problème de Cauchy dans le cas *polyhyperbolique normal* et des applications aux équations dont l'espace associé est un espace de Lorentz.

I. *La solution élémentaire.* On considère l'équation aux dérivées partielles linéaires.

$$F^p u=o, \quad (F^2=FF,\ldots,F^p=FF^{p-1}) \tag{1}$$

u étant la fonction inconnue, supposée invariante et F l'opérateur différentiel (1.2), à coefficients holomorphes dans le domaine R de l'espace des variables $x^1,\ldots,x^n$.

Après avoir mis en évidence l'équation aux dérivées partielles (1.4) des variétés caractéristiques, en suivant certaines recherches de N. Theodorescu,

l'Auteur associe à l'équation de référence l'espace de Riemann défini par la forme métrique (1.5), dont Hadamard a rattaché à l'équation $Fu=0$. On prend ensuite l'équation (1) sous la forme invariantive (1.8), ou l'opérateur F a l'expression tensorielle (1.9)[1]), ses coefficients étant calculés à l'aide des formules (1.7) et le symbole ∇ indiquant la dérivation covariante dans le sus-dit espace.

En cherchant une solution de la forme $u = UG^q$, $G=0$ étant une surface sans points singuliers, U une fonction régulière au sens de Hadamard et q une constante donnée, on en déduit que $G=0$ *doit être une variété caractéristique*, résultat complet en accord avec un théorème de Le Roux et Delassus.

On introduit ainsi, d'une manière tout naturelle, une famille (Ω) d'opérateurs différentiels, un opérateur quelconque Ω_i de cette famille ayant l'expression

$$\Omega_i = 2\Delta(.,G) + (M + iA_1)., \qquad (M = FG - kG) \tag{2}$$

$\Delta(.,G)$ étant l'opérateur du premier ordre de Lamé-Beltrami et A_1 une certaine fonction régulière, même pour $G=0$.

A l'aide de ces opérateurs, on démontre par récurrence la formule (1.17), où la somme $\Sigma F^i \Omega_{q-p+i} \ldots \Omega_{q-1} (i = 1, \ldots, p-1)$ contient tous les produits symboliques distincts qu'on peut construire avec les $p-i$ opérateurs $\Omega_{q-1}, \ldots, \Omega_{q-p+i}$, appliqués dans l'ordre décroissant de leurs indices et l'opérateur F, ce dernier figurant i fois dans chaque produit symbolique (de sorte qu'un quelconque des opérateurs Ω peut avoir à sa droite, ou à sa gauche, l'opérateur F itéré i fois au plus). L'annulation de $F^p(UG^q)$ impose en général qu'on ait sur $G=0$ la relation (1.20), qui est une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre p, dont l'intégration peut être ramenée aisément à l'intégration de p équations linéaires du premier ordre. Chacune de ces p équations exige l'introduction des géodésiques de longueur nulle de l'espace de Riemann associé, qui sont les *bicaractéristiques* définies par les systèmes différentiels (1.21) et (1.22), de sorte que la considération de ces courbes s'impose d'elle-même, comme dans le cas du second ordre ($p=1$).

En vue de la construction de la solution élémentaire, on introduit d'après les idées de Hadamard, *le conoïde caractéristique* ayant le sommet dans un point quelconque $P\ (a^1, \ldots, a^n)$. Son équation est $\Gamma = 0$, où le premier membre Γ, défini par la relation (1.33), vérifie l'équation aux dérivées partielles (1.38).

L'Auteur fait ensuite quelques remarques algébriques sur la famille d'opérateurs (Ω) dans le cas spécial lorsque $G = \Gamma$, i étant un nombre rationnel et $A_1 = 4$. Si l'on considère, au lieu de (Ω), la famille plus vaste qui contient tous les opérateurs de la forme μE, $\nu\Omega_i$ (μ, ν étant des nombres rationnels quelconques, le premier pouvant être même zéro, et E étant l'opérateur unité, par rapport à la multiplication symbolique), on démontre à l'aide des relations (1.42) que *le système* $(\mu E, \nu\Omega_i)$ *est un espace vectoriel à deux dimensions construit sur le corps des nombres rationnels et la famille* (Ω) *est plongée dans cet espace vectoriel.* De même, à l'aide des opérateurs de base Ω_0 et E, on arrive à la conclusion que *l'ensemble des produits symboliques* $\Omega_{j_1} \ldots \Omega_{j_s}$ *constitue un anneau euclidien* $R[\Omega_0]$.

[1]) On emploie toujours des indices grecs pour indiquer des tenseurs.

En utilisant la méthode de Hadamard, les remarques précédentes permettent de construire la solution élémentair d ''équation (1). Pour la simplicité de l'écriture on introduit encore les opérateurs $E_{i,j}$ et $\Phi^i_{j,k}$, par les formules (1.45), où les opérateurs Ω sont construits à l'aide de Γ et l'on examine ensuite séparément les cas $n = 2m + 1$ et $n = 2m$.

On a obtenu dans le cas impair *($n = 2m + 1$) la solution élémentaire algébrique* bien déterminée $u = U\Gamma^{-m+p-\frac{1}{2}}$, U étant une fonction holomorphe se réduisant à l'unité au point P et dont l'expression est (1.61), où les fonctions U_h sont données par les formules (1.51) et (1.60).

Dans le cas pair ($n = 2m$,)la solution élémentaire est déterminée à l'exception d'une certaine fonction h lomorphe w largement indéterminée que l'Auteur appelle *fonction de correction* et dont l'existence résulte du théorème de Cauchy-Kowalewsky. Si $n = 2m > 2p$, cette solution élémentaire est *algébrico-logarithmique* et a la forme $u = U\Gamma^{-m+p} + V \log \Gamma + w$, U et V, comme w, étant des fonctions holomorphes, la première se réduisant à l'unité au point P. Les fonctions U_h ($h < m - p$) du développement de U ont les mêmes expressions (1.51) et (1.60) du cas impair et les fonctions V_h du développement (1.82) de V sont données par les formules (1.91), (1.103) et (1.84). Dans la formule (1.103), l'opérateur $\Psi^{i,j}_{l,2h}$ s'obtient de $\Phi^i_{p,2h}$ en remplaçant, dans chacun de ses termes, de droite à gauche et de toutes les manières possibles, $j \leqslant i$ fois l'opérateur F respectivement par $\Omega_{h-1}\ \Omega_{h-2}, \ldots, \Omega_{h-j}$ et en changeant dans tous les termes ainsi obtenus, h en $h - 1$ dans les opérateurs Ω qui sont entre Ω_{h-1} et Ω_{h-2}, puis h en $h - 2$ dans les opérateurs Ω qui sont entre Ω_{h-2} et Ω_{h-3}, et ainsi de suite, jusqu'aux opérateurs Ω qui sont à gauche de Ω_{h-j}, dans lesquels on changera h en $h - j$.

Si $n = 2m \leqslant 2p$, la solution élémentaire est *logarithmique* et a la forme $u = \Gamma^{-m+p} V \log \Gamma + w$, V étant comme w, une fonction holomorphe, qui se réduit à l'unité au point P. Les coefficients du développement (1.108) de V ont les expressions (1.112), (1.114) et (1.110).

Sur les bicaractéristiques, les coefficients figurant dans les séries qui donnent les solutions élémentaires vérifient toujours une équation du type de Fuchs, que N. Theodorescu a déjà rencontrée dans les cas des équations aux dérivées partielles linéaires à caractéristiques quadratiques doubles. Les premiers membres des équations du type de Fuchs obtenues, présentent en outre une propriété remarquable, celle d'être décomposables en facteures symboliques du premier ordre permutables.

On a démontré la convergence des séries représentatives, en utilisant le procédé de majoration de Hadamard et une extension due à Perron, d'un théorème de Poincaré sur les équations linéaires aux différences finies.

Les diverses solutions élémentaires des équations ayant les ordres d'itération consécutifs, sont liées entre elles et en particulier à la solution élémentaire de Hadamard, par les relations (1.121), (1.124) et (1.126), déjà mises en évidence par Miron Nicolescu, dans le cas des fonctions polyharmoniques élémentaires.

II. *Le problème de Cauchy.* L'Auteur se propose de résoudre le problème de Cauchy pour une surface donnée S, régulière au sens de Hadamard et l'équation

$$F^p u = \varphi, \tag{3}$$

où F a l'expression (1.9) et où φ est une fonction connue des variables x^α, régulière dans R. On suppose en plus que F est du type hyperbolique normal et on dit alors que l'équation (3) est du type *polyhyperbolique normal.*

En introduisant la dérivée transversale à S, définie par les relations (2.5) et dans l'hypothèse que S et l'équation $Fu = \varphi$ sont telles que le problème de Cauchy soit *correctement posé*, on démontre par récurrence qu'*on peut déterminer une intégrale unique de l'équation* (3), *si l'on connaît les valeurs prises sur* S *par* u $\mathrm{F}u, \ldots, \mathrm{F}_a^{p-1}$ *et* $\frac{du}{d\nu}, \frac{dFu}{d\nu}, \ldots, \frac{dF^{p-1}u}{d\nu}$. Le résultat précédent n'est qu'un théorème d'existence et d'unicité, qui permet de considérer inutile de faire la synthèse de la solution obtenue par la voie directe.

Pour obtenir la *solution effective* du problème, on établit d'abord la formule fondamentale (2.11), écrite aussi sous forme invariantive et on admet qu'il s'agit du *problème intèrieur.*

On introduit ensuite l'hypothèse que les données sur S, c'est-à-dire les valeurs prises sur S par $F^i u$ et $\frac{dF^i u}{d\nu}$, admettent des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $m - i > 0$, ou qu'elles sont seulement continues si $m - i \leqslant 0$ $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$.

De même la fonction inconnue u est supposée admettre des dérivées partielles jusqu'a l'ordre $N = max.\ (m + p - 1, 2p)$ et la fonction connue φ des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $m - p > 0$, ou qu'elle est seulement continue, si $m - p \leqslant 0$.

Dans la formule (2.11), on prend la fonction v égale à la solution élémentaire de l'équation adjointe $G_v^p = 0$, construite à l'aide du point P et pour u la solution de l'équation (2) qui satisfait aux conditions de Cauchy.

Dans le cas impair, on fait usage, comme Hadamard et Fl. Bureau, de la notion de partie finie d'une intégrale multiple infinie et dans le cas pair, de la notion de partie logarithmique d'une intégrale multiple infinie, notion introduite par K. Friedrichs et utilisée aussi par Fl. Bureau, mais qui a également son origine dans l'oeuvre de Hadamard. Les calculs, comme ceux de Hadamard, lorsqu'il n'utilise pas la méthode de descente et surtout comme ceux de Fl. Bureau par la méthode de la partie logarithmique, exigent un examen séparé pour le cas de deux variables indépendantes (le cas de Riemann itéré).

Dans tous les cas, ont été utilisées les formules qui lient les solutions élémentaires obtenues à la solution élémentaire de Hadamard et en outre, pour obtenir le terme qui contient $u(P)$ on a fait usage de la partie finie $(n = 2m + 1)$, ou de la partie logarithmique $(n = 2m)$ du volume de l'hyperboloïde à deux nappes dans l'espace à n dimensions.

Dans le cas pair, on a mis en évidence que les fonctions de correction n'apportent aucune contribution dans les formules résolutives.

On a obtenu ainsi dans le cas impair $(n = 2m + 1)$ la formule résolutive (2.41) et dans le cas pair $(n = 2m)$ la formule (2.74), si $n = 2m > 2p$, la formule (2.108), si $2 < n = 2m \leqslant 2p$ et la formule (2.113) si $2 = n = 2m \leqslant 2p$.

On a démontré, dans le cas impair, une *propriété d'échange* pour la solution élémentaire, ce qui a permis de tirer une conséquence immédiate pour le problème de l'intégration de l'équation adjointe.

L'Auteur termine la seconde partie, en faisant quelques remarques générales sur les formules résolutives obtenues, puis il donne les conditions nécessaires et suffisantes de validité du *principe de Huygens dans son sens spécial (la mineure de Huygens)* pour un phénomène régi par une équation polyhyperbolique normale, à savoir: *le nombre des variables indépendantes doit être un nombre pair plus grand que l'ordre de l'équation et la solution élémentaire correspondante ne doit pas contenir de terme logarithmique.*

III. *Équations polyhyperboliques normales dont l'espace associé est un espace de Lorentz.* On mentionne d'abord les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation polyhyperbolique normale à $n \geqslant 3$ variables indépendantes puisse être ramenée, par un changement convenable de ces variables à *l'équation itérée, des ondes* ou à *l'équation itérée des ondes amorties*, à savoir

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}=0,\ h^{\alpha}=0,\ k=\text{const}, \tag{4}$$

où $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ est le tenseur de Riemann-Christoffel de l'espace associé et où $h^{\alpha}=0$ exprime que l'équation de référence soit auto-adjointe. Pour $n=2$, ces conditions se réduisent seulement à $h^{\alpha}=0$ et $k=\text{const}$.

En supposant que l'équation (3) possède les propriétés précédentes, ou qu'elle ait les coefficients constants, de sorte qu'on puisse la ramener, par un changement d'inconnue, suivi d'une tranformation linéaire sur les variables indépendantes, à l'une des deux formes envisagées, l'Auteur applique les résultats généraux obtenus, à l'équation itérée des ondes et à l'équation itérée des ondes amorties, dont l'espace associé est évidemment un espace de Lorentz.

Pour l'équation itérée des ondes (3.4), on distingue seulement un *cas algébrique* ($n=2m+1$ ou $n=2m>2p$) et un *cas logarithmique* ($n=2m\leqslant 2p$).

Dans le cas impair ($n=2m+1$), on obtient la formule résolutive (3.11) et dans le cas pair ($n=2m$), la formule (3.13) si $n>2p$, ou la formule (3.15) si $n\leqslant 2p$ ($n\neq 2$), ou enfin la formule (3.17), si $n=2$.

Les formules résolutives montrent que le principe de Huygens dans son sens spécial n'est valable pour un phénomène régi par l'équation itérée des ondes que *si le nombre des variables indépendantes est un nombre pair plus grand que l'ordre de l'équation.*

On considère ensuite le cas *bihyperbolique*, conduisant à *la première itérée de l'équation des ondes* et l'on donne les formules résolutives (3.18), (3.21) et (3.22), respectivement pour $n=2,\ 3,\ 4$.

En vertu d'une remarque préliminaire, la détermination de la solution élémentaire de l'équation itérée des ondes amorties (3.24) exige l'intégration de l'équation de Bessel itérée (3.25). On considère seulement le cas bihyperbolique, lorsque l'équation est *la première itérée de l'équation des ondes amorties* et en introduisant la fonction de Bessel $J_0(\xi)$ et la fonction entière $j(\lambda)$ qui s'en déduit, on obtient ensuite pour $n=2,\ 3,\ 4$ les formules résolutives (3.39), (3.41) et (3.42), où, comme dans le cas de la première itérée de l'équation des ondes, n'interviennent que des intégrales ordinaires.

BIBLIOGRAFIE

1. Fl. Bureau, *L'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique normal.* Mém. de la Soc. des Sci. de Liège, 4-e série, 1938, t. III, 67 p.

2. E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann.* Paris, Gauthier-Villars, 1946, éd. II, 378 p.
3. E. Cotton, 1. *Sur les variétés à trois dimensions.* Thèse, Paris, Gauthier-Villars, 61 p.
4. — *Sur les invariants différentiels de quelques équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.* Ann. Ec. Norm. Sup. 1900, t. XVII, p. 211—214.
5. J. Coulon, *Sur l'intégration des équations aus dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques.* Thèse, Paris, Hermann, 1902, 118 p.
6. Courant-Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik.* Berlin, J. Springer, 1937, Bd. II, 549 p.
7. G. Darboux, *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Mém. des Savants étrangers, 1880, t. XXVII.
8. Th. de Donder, *Sur les équations aux dérivées partielles d'un ordre quelconque.* Journ. de Math. pures et appl., v. 93, 1928, t. VII, p. 173—187.
9. Paul Dubreil, *Algèbre.* Paris, Gauthier—Villars, 1946, t. I, 305 p.
10. L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, 1926, 262 p.
11. G. Floquet, *Sur la théorie des équations différentielles linéaires.* Thèse, Paris, Gauthier—Villars, 1879, 132 p.
12. K. Friedrichs, *Die Verallgemeinerung der Riemannschen Methode auf eine beliebige gerade Anzahl von Dimensionen.* Gött. Nachr. 1927, S. 172—177.
13. — *Bemerkungen zur Hadamardschen Methode bei hyperbolischen Differential—Gleichungen. Ibidem*, 1932, p. 144.
14. J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique.* Paris, Hermann, 1903, 375 p.
15. — *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles hyperboliques.* Paris, Hermann, 1932, 542 p.
16. — *Principe de Huygens et prolongement analytique.* Bull. Soc. Math. de France, 1924, t. LII, p. 270.
17. T. Levi—Cività, *Sulla transformazione dell'equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine* Atti Ist. Veneto, 1913, t. LXXII, p. 1331—1357.
18. Gr. Moisil, *Sur les bicaractéristiques des équations aux dérivées partielles du type parabolique et d'ordre supérieur.* Bull. Math. Soc. Roum. des Sci., 1939, t. XLI, p. 79—90.
19. Miron Nicolesco, *Nouvelles contributions dans la théorie des fonctions polyharmoniques.* Bull. Math. Soc. Roum. des Sci., 1936, t. XXXVII, 54 p.
20. — *Les fonctions polyharmoniques.* Act. sci. et ind., Nr. 331, Paris, Hermann 1936, 54 p.
21. — *Nouvelles recherches sur les fonctions polyharmoniques.* Disquisitiones Math. et Phys., 1940, t. I,. fasc. I, p. 43—56.
22. O. Perron, *Ueber die Poincarésche lineare Differenzengleichung.* Journ. für die reine und angewandte Math., 1910, Bd. 137, p. 6—64.
23. I. Petrovschy, *Ueber das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen.* Mat. Sbornic, 2 (44), 1937, p. 815—870.
24. S. Sobolev, *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques normales.* Mat. Sbornic, 1 (43), 1936, p. 39—72.
25. — *Sur le problème de Cauchy pour les équations quasi-linéaires hyperboliques.* D. A. N. (2) 20, 1938, p. 79—83.
26. N. Théodoresco, *Sur les solutions élémentaires des équations aux dérivées à caractéristiques multiples*, Journ. de Math. pures et appl., vol. 102, 1937, t. XVI, p. 329—343.
27. — *Les solutions élémentaires d'une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.* Comm. math. helv., v. 11, 1937—1938, fasc. 2, p. 1—42.
28. — *Recherches sur les équations aux dérivées partielles linéaires, d'ordre quelconque. Les solutions élémentaires.* Ann. sci. de l'Univ. de Iassy, 1938, t. XXIV, fasc. II, p. 263—321.
29. B. L. Van der Waerden, *Moderne Algebra.* Berlin, J. Springer, 1937, zweite Auflage, Bd. I, II, 272 + 224.
30. Hélène Freda, *Méthode des caractéristiques pour l'intégration des équations aus dérivées partielles linéaires hyperboliques.* Mémorial des Sci. math. fasc. LXXXIV.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

ASUPRA GRUPURILOR FĂRĂ TORSIUNE ALE LUI A. I. MALŢEV

DE

D. BARBILIAN

1°. In lucrarea sa *Grupuri nilpotente fără torsiune* din Izvestia Academii Nauc, t. 133, A. I. Malţev afirmă fără demonstraţie că orice grup nilpotent poate fi obţinut ca *extindere Schreier* a unui grup nilpotent periodic printr'un grup nilpotent fără torsiune.

Restabilind demonstraţia acestei propoziţii, am recunoscut că posibilitatea construirii unui grup abstract, pornind dela un grup periodic şi un grup fără torsiune, printr'o extindere Schreier, stă într'o nilpotenţă mai diferenţiată, definită prin epuizarea unui lanţ analog cu lanţul puterilor comutatoare, dar ai cărei termeni nu au nevoie să fie deplin invarianţi (nici chiar invarianţi), ci doar părţile lor periodice să fie invariate de automorfismele interioare. Nilpotenţa astfel introdusă am numit-o (puţin impropriu) *nilpotenţă periodică de a doua specie.*

O a doua nilpotenţă definită cu ajutorul unui lanţ declinant de comutatori, analog unor lanţuri din algebrele lui Lie, în care invarianţa e cerută doar subgrupurilor generate de părţile periodice ale termenilor, am numit-o *nilpotenţă periodică de prima specie.*

Cele două nilpotenţe nu stau în niciun raport de înfăşurare logică, dar generalizează în două direcţii deosebite nilpotenţa ordinară.

Cu aceste două nilpotenţe se pot formula condiţii foarte generale în care un grup abstract este o extindere Schreier de grup periodic printr'un grup fără torsiune. Am reuşit să dăm rezultatului nostru chiar forma unui criteriu necesar şi suficient. Această perfecţionare este însă numai aparentă. Există totdeauna un caz rebel în care criteriul îşi pierde calitatea constructivă şi se confundă cu caracterizarea neconstructivă din 2°.

Pentru înţelegerea acestui articol, amintim definiţiile următoarelor două noţiuni introduse în Algebră de A. G. Curoş:

Grup periodic = grup în care toate elementele au ordine finite (fără ca grupul să fie obligatoriu finit şi fără ca ordinele să admită în mod necesar o margine superioară).

Grup fără torsiune = *grup pur* = grup în care orice element diferit de 1 are ordin infinit (generează un grup ciclic infinit).

Cu ajutorul acestor două noțiuni introducem o a treia:

Radical periodic = un divizor normal periodic M al grupului G cu grup factor G/M pur.

E clar că, dacă un grup abstract G admite un radical periodic M, apare atunci ca extinderea Schreier a grupului periodic M prin grupul pur G/M. Reciproc, dacă M e un grup periodic, iar Γ un grup pur, extinderea Schreier G a lui M prin Γ are în M un radical periodic, căci

$$G/M \rightleftarrows \Gamma = \text{pur}.$$

Incât ceea ce am putea numi *problema generală a lui Malțev* se poate enunța astfel:

Determinarea condițiilor generale și suficiente ca un grup abstract să admită radical periodic.

In alineatul imediat mai jos dăm o primă soluție, neconstructivă, problemei lui Malțev. In alineatele viitoare dăm soluții constructive, prin condiții impuse direct grupului.

2°. Soluția neconstructivă a problemei lui Malțev.

In cele ce urmează notăm prin PK mulțimea tuturor elementelor periodice dintr'un complex K al grupului G. Demonstrăm această teoremă care, limitată la suficiența condiției, se găsește în articolul citat, al lui M a l ț e v:

T e o r e m ă. — Condiția necesară și suficientă ca un grup G să admită radical periodic, este ca partea sa periodică PG să formeze grup.

D e m o n s t r a ț i e. — *Condiția e necesară.* Intr'adevăr, să presupunem că G admite radicalul periodic M. Conform definiției unui astfel de radical, urmează

$$M \subset PG.$$

Nu putem lua $M < PG$. Altfel, dacă $f(G)$ e homomorfismul $G \rightarrow \frac{G}{M}$, ar rezulta

$$f(a) \neq f(1),$$

$$[f(a)]^n = f(a^n) = f(1),$$

pentru un element a (de ordin n) cu

$$a \rightarrow PG \quad , \quad a \not\rightarrow M.$$

Deci $f(G)$ ar conține un element periodic $f(a) \neq f(1)$ contrar definiției radicalului periodic. Prin urmare, obligatoriu

$$M = PG,$$

egalitate pe care citim necesitatea condiției $PG =$ *grup* din enunț (egalitatea mai exprimă *unicitatea radicalului periodic*, când există).

Condiția e suficientă. Punem $PG = M$ unde PG este, prin ipoteză, grup. Orice element periodic x, așa dar orice $x \in M$, e aplicat de un operator arbitrar ω tot pe un element periodic (căci $[\omega(x)]^m = \omega(x^m) = \omega 1 = 1$). Ca atare, M e un subgrup deplin invariant; *a fortiori*, un divizor normal.

Incât, dacă $f(G)$ e homomorfismul $G \rightarrow G/M$, avem în $f(G)$ un grup pur. Altfel ar exista un element $f(a) \neq f(1)$ periodic de ordin n:

$$[f(a)]^n = f(a^n) = f(1).$$

Deci

$$a^n \rightarrow M.$$

Insă $M = PG$. Prin urmare

$$a^n = b,$$

unde b e un element periodic, de ordin m. Conchidem

$$a^{nm} = 1,$$

$$\therefore a \rightarrow M,$$

$$\therefore f(a) = f(1)$$

contrar ipotezei $f(a) \neq f(1)$.

Așa dar, e dovedit indirect că $f(G)$ e pur, cu alte cuvinte $M = PG$ radical periodic.

Cu aceasta totul e demonstrat.

3°. Sistem comutator. Lanț declinant de sisteme comutatoare.

Fie

$$a \bigcirc b = a^{-1} b^{-1} ab$$

notația comutatorului a două elemente dintr'un grup.

Un complex K de elemente dintr'un grup G, închis față de operația luării comutatorului

$$(a \bigcirc b) \rightarrow K, \qquad a, b \in K,$$

îl numim *sistem comutator*.

Un sistem comutator e primul termen al unui *lanț declinant de sisteme comutatoare*.

Prin definiție, *declinatul de ordin zero* al sistemului comutator e însuși sistemul

$$K^\circ = K.$$

Declinatul de ordin $i > 0$ *al lui* K este, prin definiție, totalitatea elementelor din K ce pot fi puse sub forma unui comutator iterat (la stânga sau la dreapta, într'o ordine arbitrară), cu componentele în K, de dimensiune $d \geqslant i$:

$$a = (\ldots((a_1 \bigcirc (a_2 \bigcirc (\ldots a_{d+1}))\ldots), \qquad a \in K^i$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_{d+1} \rightarrow K.$$

Declinații K^i *ai unui sistem comutator* K *sunt ei înșiși sisteme comutatoare.* Intr'adevăr, dacă $a, b \in K^i$ avem în a, b, conform definiției, comutatori iterați de dimensiuni $d' \geqslant i$, $d'' \geqslant i$ cu componentele în K. Deci, $a \quad b$ reprezintă un comutator iterat, cu componentele în K de dimensiune $d = d' + d'' + 1 \geqslant 2i + 1 > i$ pentru $i \geqslant 0$. Ca atare, $a \bigcirc b$ se găsește în K^i; mulțimea tuturor comutatorilor iterați de dimensiune mai mare sau cel puțin

egală cu i, încât K^i apare închis față de operația luării comutatorului, e un sistem comutator.

Teorema. — Declinații unui sistem comutator K formează un lanț de sisteme comutatoare

$$K^\circ \supset K^1 \supset \ldots \supset K^i \supset \ldots$$

cu proprietate declinantă. Aceasta înseamnă că, pentru

$$a_i \in K^i, \quad a_j \in K^j$$

avem

$$(a_i \bigcirc a_j) \to K^h,$$

$$h > \text{Max}\,(i, j).$$

Demonstrație. — Un comutator iterat de dimensiune $d \geqslant i + 1$ intră evident printre comutatorii de dimensiune $d \geqslant i$ și aceasta pentru orice $i \geqslant 0$, dacă elementele din $K = K^\circ$ convenim să le privim drept comutatori de dimensiune $i = 0$. Deci comutatorii de dimensiune $d \geqslant i + 1$, cu componentele în K, se găsesc printre comutatorii de dimensiune $d \geqslant i$ cu componentele în K. Ținând seama de definiții, avem deci

$$K^i \supset K^{i+1} \qquad i \geqslant 0$$

Existența lanțului din enunț e dovedită.

Mai departe, elementele a_i, a_j din enunț sunt comutatori, cu componentele în K respectiv de dimensiuni $d' \geqslant i$, $d'' \geqslant j$. Deci a_h este un comutator cu componentele în K de dimensiune $d = d' + d'' + 1$. Ca atare, se găsește sigur în K^h cu

$$h = d' + d'' + 1,$$

$$\ldots \quad h \geqslant i + j + 1$$

O consecință mai slabă a acestui rezultat este, evident,

$$h > \text{Max}\,(i, j).$$

Teorema e demonstrată [1]).

4°. Sistem comutator de prima și a doua specie relativ la un complex invariant π.

Fie π un complex din grupul G, conținător al elementului unitate, invariant față de toate automorfismele interioare ale lui G.

Un sistem comutator K din G conține elementul-unitate, căci conține, prin definiție, comutatorul $a \bigcirc a = 1$, cu $a \in K$. Ca atare, mulțimea elementelor din π aflate în K nu e deșartă. In cele ce urmează însemnăm prin πK mulțimea nedeșartă a tuturor elementelor din π aflate în K (sau, ceea ce e tot una: secțiunea din inelul de ansamble $\pi \cap K$).

E clar că avem, în virtutea teoremei din alineatul precedent

$$\pi K^i \supset \pi K^{i+1}, \qquad i \geqslant 0.$$

---

[1]) In cazul unui lanț declinant terminat ($K^h = K^\omega$ pentru toți $h > \omega$) este clar că putem lua $h = \text{Max}\,(i, j)$ dacă $\text{Max}\,(i, j) = \omega$.

Intre subgrupurile generate de aceste complexe avem de asemenea

$$(\pi K^i) \supset (\pi K^{i+1}). \tag{1}$$

Tot din teorema din 3° urmează, pentru subgrupurile generate de complexele K^i și K^{i+1}

$$(K^i) \supset (K^{i+1}).$$

Cum subgrupurile sunt cazuri particulare de sisteme comutatoare, le putem aplica funcțiunea π. Obținem

$$\pi(K^i) \supset \pi(K^{i+1}). \tag{2}$$

Definiție. — Vom spune că sistemul comutator K e *relativ la complexul* π și anume de *prima*, resp. *a doua specie*, când termenii lanțului (1), resp. (2) sunt permiși, și ca atare invariați de toate automorfismele interioare ale lui G.

Fie K_λ un conjugat arbitrar al sistemului comutator K față de automorfismele interioare ale lui G. E clar că sistemele pentru care

$$\pi \cap K^i = \pi \cap K^i_\lambda \text{ resp. } \pi \cap (K^i) = \pi \cap (K^i_\lambda),$$

cu i și λ arbitrari, sunt sisteme comutatoare relative la π de prima resp. a doua specie. Cu această diferență totuși: pe când primele sunt un caz particular de specia întâia, ultimele reprezintă sisteme generale de specia a doua[1]).

Incă o observație. Sistemele comutatoare generale introduse în alineatul precedent intră printre sistemele comutatoare relative, de o specie sau alta, dacă luăm $\pi = G$ iar K *invariant față de auto-mortismele interioare.*

Am văzut în 2° că totalitatea elementelor periodice dintr'un grup formează un complex P invariant (chiar deplin invariant).

Sistemele comutatoare relative la complexul P le numim, puțin cam impropriu, *sisteme periodic-comutatoare* (de prima sau a doua specie).

5°. Generalizarea noțiunii de grup nilpotent. Nilpotența periodică de prima și a doua specie. Simplificarea definiției nilpotenței ordinare.

Fie K un sistem comutator relativ la π (de prima sau a doua specie) generator al grupului total G:

$$G = (K).$$

Grupul G se numește *nilpotent relativ la* π *de prima* resp. *a doua specie*, dacă admite un sistem comutator, generator K relativ la π, de prima, respectiv a doua specie, cu lanț declinant terminat prin elementul-unitate:

$$K^\omega = 1.$$

---

[1]) Condiția $\pi K^i = invariant$ e mai tare decât $(\pi K^i) = subgrup$ invariant, pe care o implică.

In schimb, cererea $(\pi(K^i)) = subgrup\ invariant$ implicată evident de $\pi(K^i) = invariant$, o implică la rându-i și ca atare cererile sunt echivalente. Intr'adevăr din $\pi(K^i) \subset (K^i)$ urmează $\pi(\pi(K^i)) \subset \pi(K^i)$. Pe de altă parte, este clar că $\pi(\pi(K^i)) \supset \pi(K^i)$. In definitiv, $\pi(\pi(K^i)) = \pi(K^i)$. Dar, cum π este invariant, aplicat unui subgrup invariant dă un complex invariant. Ca atare $\pi(K^i) = invariant$.

Dacă $\pi = P$ vom zice mai scurt că G e *periodic-nilpotent de prima*, resp. *a doua specie.*

Rămâne să arătăm că nilpotența relativă la π conține nilpotența ordinară ca un caz particular.

Teorema I. — Dacă un grup abstract G admite un sistem comutator, generator K, invariat de toate automorfismele interioare, atunci puterile comutatoare ale lui G coincid cu subgrupurile generate de termenii lanțului declinant al lui K în ordinea

$$G^{(i+1)} = (K^i), \quad i \geqslant 0.$$

Demonstrație. — Pentru $i = 0$, relația din enunț este banal verificată. Intr'adevăr, prin definiție

$$G^{(1)} = G.$$

Dar $K = K^\circ$ e un sistem comutator generator pentru G. Așa dar $G = (K^\circ)$. In definitiv

$$G^{(1)} = (K^\circ).$$

Presupunem relația din enunț adevărată pentru indicele $i - 1$

$$G^{(i)} = (K^{i-1})$$

și ne propunem s'o stabilim pentru indicele i.

Fie f un automorfism arbitrar al grupului G. Avem, evident

$$f(a \bigcirc b) = f(a) \bigcirc f(b)$$

De aici rezultă că un comutator de dimensiune d, cu componentele în K, e aplicat peste un comutator de aceeași dimensiune, cu componentele de asemenea în K, dacă sistemul K e permis de automorfism. Prin urmare, dimensiunea comutatorilor din K^i și mulțimea din care sunt luate componentele nu se schimbă, prin aplicarea lui f. Ca atare, $f K^i \subset K^i$. Incât, dacă sistemul K e permis de toate automorfismele interioare din G, sistemul K^i e de asemenea permis, deci invariat de aceste automorfisme.

Considerăm următoarele grupe de formule, datorite lui Fitting, ușor de verificat

$$\left.\begin{aligned} a \bigcirc b &= (b \bigcirc a)^{-1} \\ b^{-1} \supset c &= (c \bigcirc b)^{r(b^{-1})} \end{aligned}\right| \quad a, b, c \in G \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} ab \bigcirc c &= (a \supset c)^{r(b)} (b \bigcirc c) \\ c \bigcirc ab &= (c \bigcirc b)(c \subset a)^{r(b)} \end{aligned}\right| \tag{4}$$

unde $r(x)$ înseamnă automorfismul interior generat de transformatoarea x, din G.

In aceste formule generale luăm

$$a, b \in K^{i-1}, \quad c \in K$$
$$a, b \in K, \quad c \in K^{i-1}. \qquad \text{resp.}$$

Ținând seamă că automorfismele interioare ale lui $G = (K)$ invariază pe K și K^{i-1}, formulele lui Fitting arată, din aproape în aproape, că orice comutator cu o componentă în grupul $G = (K)$ și o componentă în subgrupul $G^i = (K^{i-1})$e un produs de comutatori cu o componentă în sistemul $K^\circ = K$ și o componentă în sistemul [1]) K^{i-1}: așa dar, un produs de comutatori din sistemul K^i (conform teoremei din 3°).

Dar, prin ipoteză $(K^{i-1}) = G^{(i)}$. Rezultatul de mai sus se poate așa dar exprima încă: orice comutator cu o componentă în G și $G^{(i)}$ e un agregat de comutatori din K^i. Dar $G^{(i+1)}$ e, prin definiție, generat de comutatorii cu o componentă în G și $G^{(i)}$. Conchidem

$$G^{(i+1)} \subset (K^i). \tag{5}$$

Pe de altă parte însă

$$K^\circ \subset G, \quad K^{i-1} \subset (K^{i-1}) = G^{(i)}.$$

Deci, comutatorii din K^i intră printre comutatorii cu o componentă în G și $G^{(i)}$ care generează pe $G^{(i+1)}$. Așa dar

$$G^{(i+1)} \supset (K^i). \tag{5'}$$

Din (5) și (5') rezultă

$$G^{(i+1)} = (K^i).$$

Prin urmare, identitatea din enunț e demonstrată prin inducție.

Observație. — Un sistem comutator invariant este un sistem comutator relativ la orice complex invariant π, atât de o specie, cât și de alta.

Intr'adevăr, am văzut în cursul demonstrației de mai sus, că fiecare declinat K^i e invariant. E clar deci că

$$(\pi K^i) \quad \text{respectiv} \quad \pi(K^i)$$

este un subgrup, resp. un complex invariant. Prin urmare, un K invariant poate fi gândit ca relativ la orice π (invariant), de o specie sau alta.

Teorema II. — Nilpotența unui grup G, construită cu un sistem comutator invariant K, generator, se acopere cu nilpotența ordinară. Incât nilpotențele relative la un complex invariant π, de o specie sau alta, sunt generalizări ale nilpotenței ordinare.

Demonstrație. — Intr'adevăr, teorema precedentă ne dă voie să conchidem dela $K^\omega = 1$ la $G^{(\omega+1)} = 1$ și reciproc, dela $G^{(\omega+1)} = 1$ la $K^\omega = 1$, prin intermediul lui $(K^\omega) = 1$.

[1]) Ordinea în care sunt luate componentele e arbitrară.

Pe de altă parte, am recunoscut în observația de mai sus că un sistem invariant K poate fi interpretat ca sistem comutator relativ la orice π invariant, de o specie sau alta.

Incât nilpotența ordinară se acopere cu nilpotența construită prin mijlocirea unui sistem comutator invariant, generator, și ca atare e un caz particular de nilpotență relativă la un complex invariant π de specia I sau II, indiferent.

Teorema III. — Grupurile nilpotente abstracte [1]) coincid cu grupurile pentru care toți comutatorii de dimensiune d, mai mare sau egală cu o anumită margine ω, sunt egali cu 1.

Demonstrație. — Intr'adevăr, mulțimea G a tuturor elementelor grupului e un caz particular de sistem comutator invariant, generator: un caz banal. Conform primei teoreme din acest alineat, putem scrie

$$(G^i) = G^{(i+1)}.$$

Incât, dacă grupul este nilpotent, adică $G^{(\omega+1)} = 1$ urmează $G^\omega = 1$, adică toți comutatorii, cu componentele în G de dimensiune ω sau mai mare ca ω, sunt egali cu 1. Reciproc, dacă această proprietate are loc, atunci $G^\omega = 1$, adică $G^{(\omega+1)} = (G^\omega) = 1$, prin urmare G e nilpotent.

Teorema e demonstrată. Ea aduce o considerabilă simplificare a definiției grupurilor nilpotente abstracte, analoagă cu simplificarea pe care Birkhoff a introdus-o în definiția grupurilor lui Lie nilpotente.

6°. Teoremă principală I. Un grup G periodic-nilpotent de specia I admite radical periodic, dacă sistemul comutator generatore K periodic permis [2]), adică

$$P(K) \subset (PK).$$

Demonstrație. — Conform criteriului necesar și suficient din 2°, teorema e demonstrată dacă reușim să arătăm că mulțimea PG formează subgrup.

Ipotezele enunțului se traduc prin

$$PG \subset (PK), \tag{1}$$

prin epuizarea lanțului declinant relativ la $K°$

$$K° \supset K^1 \supset \ldots \supset K^i \supset \ldots \supset K^\omega = 1 \tag{2}$$

și prin invarianța față de automorfismele interioare din G a tuturor subgrupurilor

$$(PK^i). \tag{3}$$

Admitem ca ipoteză inductivă această îndoită afirmație

---

[1]) Pentru grupurile lui Lie există o teoremă asemănătoare datorită lui Garrett Birkhoff și enunțată prin mijlocirea algebrelor lui Lie.

[2]) Caz particular al permiterii periodice este conținerea lui PG în K. Intr'adevăr, dacă $PG \subset K$, atunci $PK = PG$ și deci $PG \subset (PG)$ adică $P(K) \subset (PK)$.

I. Pentru

$$a \in PG \quad , \quad b \in K^i$$

avem

$$a \circ b \to PG.$$

II. Divizorul normal

$$\Gamma_i = (P\, K^i)$$

e periodic.

Aceste ipoteze se verifică banal pentru $i = \omega$.

Intr'adevăr, conform lui (2) avem $(K^\omega) = 1$. Deci, orice $b \in (K^\omega)$ este $b = 1$. Ca atare

$$(a \circ b) = 1 \to PG$$

pentru orice $a \in PG$. Incât I se verifică.

Pe de altă parte, grupul $\Gamma_\omega = (PK^\omega) = 1$ e evident periodic. Deci II se verifică de asemenea.

Așa fiind, admitem I și II verificate pentru un indice i cu

$$1 \leqslant i \leqslant \omega \tag{4}$$

și ne propunem să arătăm că se verifică pentru $i - 1$. In felul acesta vom fi arătat că se verifică pentru orice i cu

$$0 \leqslant i \leqslant \omega$$

Verificarea ipotezei I.

Fie

$$a \in PG \quad , \quad b \in K^{i-1}. \tag{5}$$

In virtutea lui (1), urmează

$$a = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_h \,, \tag{6}$$

$$\alpha_j \to PK^0.$$

Folosind prima din formulele lui Fitting, grupa (4), din 5°, putem scrie

$$a \circ b = (\alpha_1 \circ b)^{r(x_1)} \dots (\alpha_h \circ b)^{r(x_h)} \tag{7}$$

$$x_j \to G.$$

Considerăm unul, oarecare, din comutatorii care intră ca factori în membrul al doilea din (7). Punem

$$\begin{gathered} \rho = \alpha \circ b \\ \alpha \to PK^0, \quad b \to K^{i-1}. \end{gathered} \tag{8}$$

Vrem să arătăm că ρ e periodic. Fie m ordinul lui α. Pentru $m = 1$ avem $\rho = 1$ și periodicitatea lui ρ e evidentă. Presupunem deci $m > 1$.

Din (8) urmează

$$(\alpha\rho)^m = 1.$$

Aplicând primului membru ceea ce vom numi formula *semioperativității potențării* [1]), obținem

$$\rho^m \prod_{u=m-1}^{u=1} (\rho \bigcirc \alpha^u)((\rho \bigcirc \alpha^u) \bigcirc \rho^u) = 1. \tag{9}$$

In virtutea celei de a doua formule a lui Fitting, grupa (4), din 5°, putem scrie

$$\rho \bigcirc \alpha^u = (\rho \bigcirc \alpha)^{r(y_1)}(\rho \bigcirc \alpha)^{r(y_2)} \ldots (\rho \bigcirc \alpha)^{r(y_q)}, \tag{10}$$
$$y_j \to G.$$

Conform lui (8) avem

$$\rho \to K^i. \tag{11}$$

Cum, potrivit lui (6), avem încă $\alpha \to PG$, condițiile inductive ale ipotezei I sunt împlinite.
Deci $(\alpha \bigcirc \rho)$ și, odată cu el, inversul său $(\rho \bigcirc \alpha)$ e periodic:

$$\rho \bigcirc \alpha \to PG. \tag{12}$$

Pe de altă parte, din (11) și (6) rezultă:

$$\rho \bigcirc \alpha \to K^i. \tag{12'}$$

Din (12), (12') conchidem

$$\rho \bigcirc \alpha \to PK^i \subset (PK^i) = \Gamma_i$$

Dar prin chiar definiția nilpotenței periodice de prima specie, Γ_i e divizor normal în G. Citim atunci pe (10)

$$\rho \bigcirc \alpha^u \to \Gamma_i \tag{13}$$

---

[1]) Această formulă este

$$(a) \qquad (xy)^m = x^m y^m \prod_{i=m-1}^{i=1} (y \bigcirc x^i)((y \bigcirc x^i) \bigcirc y^i). \qquad x, y \in G, m > 1$$

Intru cât nu știm dacă este cunoscută, o demonstrăm aici. Pentru patru elemente arbitrare $x, y, x^*, y^* \in G$ avem pe rând

$$xyx^*y^* = xx^*y(y \bigcirc x^*)y^* = xx^*yy^*(y \bigcirc x^*)((y \bigcirc x^*) \bigcirc y^*).$$

Punând în această identitate $x^* = x^i, y^* = y^i$, ea devine ($i > 0$, întreg):

$$(b) \qquad xyx^iy^i = x^{i+1}y^{i+1}(y \bigcirc x^i)((y \bigcirc x^i) \bigcirc y^i).$$

Făcând aici $i = 1$, obținem verificarea formulei (a) pentru $m = 2$:

$$(c) \qquad (xy)^2 = x^2y^2(y \bigcirc x)((y \bigcirc x) \bigcirc y).$$

Presupunând formula (a) adevărată pentru întregul $m - 1 \leqslant 2$, obținem, folosind (b), verificarea ei pentru întregul m:

$$(d) \qquad (xy)^m = (xy)(xy)^{m-1} =$$

$$= xy\, x^{m-1}y^{m-1} \prod_{i=m-2}^{i=1} (y \bigcirc x^i)((y \bigcirc x^i) \bigcirc y^i) = x^m y^m \prod_{i=m-1}^{i=1} (y \bigcirc x^i)((y \bigcirc x^i) \bigcirc y^i)$$

Relațiile (b) și (d) demonstrează formula (a) prin inducție.

Un comutator $x \bigcirc y = x^{-1}(y^{-1}xy)$ cu o componentă x într'un divizor normal, aparține acelui divizor normal. Ca atare, din (13) urmează

$$(\rho \bigcirc \alpha^u) \bigcirc \rho^u \to \Gamma_i. \tag{13'}$$

Comparând (9) cu (13), (13') suntem îndreptățiți să scriem

$$\rho^m = \sigma, \qquad \sigma \to \Gamma_i.$$

Dar, potrivit ipotezei II concepută ca ipoteză inductivă, grupul Γ_i e periodic. Fie deci n ordinul lui σ. Urmează

$$\rho^{mn} = 1$$

sau, ceea ce e tot una

$$\rho \to PG. \tag{11'}$$

Relațiile (11) și (11') dau

$$\rho \to PK^i \subset (PK^i) = \Gamma_i.$$

Dar ρ e unul oarecare din comutatorii din membrul al doilea din (7). Ținând seamă că Γ_i e divizor normal citim pe (7)

$$a \bigcirc b \to \Gamma_i$$

și fiindcă Γ_i e potrivit ipotezei II inductivă, periodic, conchidem

$$a \bigcirc b \to PG, \qquad a \in PG, \quad b \in K^{i-1}.$$

Incât ipoteza I e verificată pentru indicele $i - 1$.

Verificarea ipotezei II.

Mulțimea PK^{i-1} nu e deșartă, căci K^{i-1} fiind un sistem comutator iar $x \in K^{i-1}$, sistemul conține pe $x \bigcirc x = 1 \to PK^{i-1}$.

Fie atunci

$$\alpha \in (PK^{i-1}) = \Gamma_{i-1}. \tag{14}$$

Un agregat grupal de elemente din PK^{i-1} se reduce la un agregat semigrupal, căci inversul unui element periodic poate fi înlocuit totdeauna cu o putere pozitivă a acestuia. Deci

$$\alpha = a_1 a_2 \dots a_h \tag{15}$$

$$a_j \to PK^{i-1}, \qquad j = 1, 2, \dots, h.$$

Afirmăm că produsul celor h elemente a_j e periodic:

$$\alpha = a_1 a_2 a_3 \dots a_h \to PG. \tag{16}$$

Pentru $h = 1$, proprietatea e banal verificată, deoarece, conform lui (15), avem atunci $\alpha = a_1 \to PK^{i-1}$.

O presupunem adevărată pentru $h - 1$ factori din (15):

$$a = a_1 a_2 \dots a_{h-1} \to PG \tag{17}$$

și vrem să dovedim (16).

Conform lui (15) și (17), elementele a_h și a sunt periodice.

Fie m produsul ordinelor elementelor periodice a și a_h. Formula semioperativității potențării, din notă, dă

$$(aa_h)^m = \prod_{u=m-1}^{u=i} (a_h \bigcirc a^u)\,((a_h \bigcirc a^u) \bigcirc a_h^u) \tag{18}$$

pentru $m > 1$. Pentru $m = 1$ evident $aa_h = 1 \to G$.

Citim pe (17), că $a^u \to PG$. Deci, conform lui (1), urmează $a^u \to (PK^\circ)$. Punem așa dar

$$a^u = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_l \tag{19}$$
$$\beta_j \to PK^\circ.$$

Aplicând formula (4), din 5°, a lui Fitting, rezultă

$$a_h \bigcirc a^u = (a_h \bigcirc \beta_l)^{r(y_l)} \ldots (a_h \bigcirc \beta_2)^{r(y_2)}\,(a_h \bigcirc \beta_1)^{r(y_1)}, \quad y_j \to G. \tag{20}$$

Insemnăm cu $a_h \bigcirc \beta$ unul, oarecare, din comutatorii din membrul al doilea. Ținând seama de (15) și (19) avem

$$a_h \bigcirc \beta \to K^i. \tag{21}$$

Dar $a_h \to K^{i-1}$, potrivit lui (15), iar β, conform lui (19), periodic. Cum ipoteza I a fost verificată mai sus pentru $i - 1$, putem scrie,

$$a_h \bigcirc \beta \to PG. \tag{21'}$$

Relațiile (21), (21') luate împreună dau

$$a_h \bigcirc \beta \to PK^i \subset (PK^i) = \Gamma_i. \tag{20'}$$

Insă Γ_i e divizor normal. Ca atare, din (20), (20'), conchidem

$$a_h \bigcirc \beta \to \Gamma_i. \tag{22}$$

Avem deci pentru următorul comutator, cu o componentă în divizorul normal Γ_i:

$$(a_h \bigcirc a^u) \bigcirc a_h^u \to \Gamma^i. \tag{22'}$$

Comparând (18) cu (19), (22) și (22'), rezultă

$$(aa_h)^m = \gamma \quad , \quad \gamma \to \Gamma_i.$$

Dar, potrivit ipotezei II inductive, grupul Γ_i e periodic. Dacă n e ordinul lui γ putem scrie, având în vedere (15) și (14)

$$\alpha^{mn} = (aa_h)^{mn} = 1 \quad , \quad \alpha \varepsilon \Gamma_{i-1}.$$

Conchidem că Γ_{i-1} e periodic.

Ipoteza II e astfel verificată pentru indicele $i - 1$.

In definitiv, afirmațiile I și II sunt demonstrate prin inducție pentru orice indice i cu

$$0 \leqslant i \leqslant \omega.$$

In special II pentru $i = 0$ spune că grupul $\Gamma_0 = (PK^\circ)$ e periodic. Aceasta înseamnă

$$PG \supset (PK^\circ)$$

Insă K° e complex generator, așa dar $G = (K^\circ)$ și deci $PG = P(K^\circ)$. Ținând seamă de (1), avem încă

$$PG \subset (PK^\circ).$$

Din ultimele două relații conchidem

$$PG = (PK^\circ).$$

Deci PG e grup.

Criteriul necesar și suficient din 2° e satisfăcut. Cu aceasta e dovedit că G admite radical periodic.

7°. **Teorema principală II.** Un grup G periodic nilpotent de specia a doua admite radical periodic dacă sistemul comutator generator K e periodic permis

$$P(K) \subset (PK).$$

Demonstrație. — Ipotezele enunțului sunt următoarele

$$P(K^\circ) \subset (PK^\circ), \tag{1}$$

$$K^\omega = 1. \tag{2}$$

$$P(K^i) = \text{invariant}, \quad i = 1, 2 \ldots, \omega. \tag{3}$$

Din invarianța lui (3) față de toate automorfismele interioare ale lui G, urmează că subgrupurile

$$\Gamma_i = (P(K^i))$$

sunt divizori normali în G.

Introducem îndoita ipoteză inductivă:

I. Pentru

$$a \in PG, \quad b \in (K^i)$$

urmează

$$a \circ b \to PG$$

II. Divizorul normal Γ_i e periodic.

Pentru $i = \omega$, ipotezele I și II sunt banal satisfăcute.

Intr'adevăr, $a \circ b \to PG$ căci $b \in (K^\omega) = 1$, în virtutea lui (2).

De asemenea $\Gamma_\omega = (P(K^\omega)) = 1$ e periodic.

Așa fiind, presupunem I și II verificate pentru indicele $i > 0$ și trecem să le stabilim pentru indicele imediat anterior $i - 1$.

Verificarea ipotezei I.

Fie

$$a \in PG, \quad b \in (K^{i-1}) \tag{4}$$

Elementul b e de forma

$$\begin{aligned} b &= \beta_1^{\varepsilon_1} \beta_2^{\varepsilon_2} \ldots \beta_l^{\varepsilon_l} \\ \beta_j &\in K^{i-1}, \quad \varepsilon_j = \pm 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Aplicând formula (4), din 5°, a lui Fitting, obținem

$$a \circ b = (a \circ \beta_l^{\varepsilon_l})^{r(x_l)} \ldots (a \circ \beta_2^{\varepsilon_2})^{r(x_2)} (a \circ \beta_1^{\varepsilon_1})^{r(x_1)}, \qquad x_j \to G. \tag{6}$$

Pe de altă parte, conform formulei (3), din 5°, avem încă pentru comutatorii din membrul al doilea, cu $\varepsilon = -1$:

$$a \circ \beta^{-1} = (\beta \circ a)^{r(\beta^{-1})} = (a \circ \beta)^{-r(\beta^{-1})}$$

unde $-r(x)$ înseamnă compunerea antiautomorfismului luării inversului cu automorfismul interior $r(x)$. Încât (6) ia forma

$$a \circ b = (a \circ \beta_l)^{\eta_l r(y_l)} \ldots (a \circ \beta_2)^{\eta_2 r(y_2)} (a \circ \beta_1)^{\eta_1 r(y_1)} \tag{7}$$

$$\eta_j = \pm 1 \quad , \quad y_j \to G$$

Fie

$$a \circ \beta, \tag{8}$$

$$a \to PG \quad , \quad \beta \to K^{i-1}$$

unul, oarecare, din comutatorii membrului al doilea din (7).

Conform ipotezei (1) avem pentru a:

$$a = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_h, \qquad \alpha_j \to PK^0. \tag{9}$$

căci inversele eventuale ale elementelor periodice α_j pot fi înlocuite cu puteri pozitive ale acestora. Aplicând formula (4), din 5°, obținem

$$a \circ \beta = (\alpha_1 \circ \beta)^{r(z_1)} (\alpha_2 \circ \beta)^{r(z_2)} \ldots (\alpha_h \circ \beta)^{r(z_h)}, \qquad z_j \to G. \tag{10}$$

Introducând (10) în (7) și ținând seama că $\eta = -1$ e antiautomorfism permutabil cu un automorfism $r(z)$, expresia devine:

$$a \circ b = \Pi (\alpha_j \circ \beta_k)^{\zeta_{jk} r(t_{jk})},$$

$$\zeta_{jk} = \pm 1 \quad , \quad t_{jk} \to G, \tag{11}$$

$$\alpha_j \to PK^\circ \quad , \quad \beta_k \to K^{i-1}.$$

Punem

$$\rho = \alpha \circ \beta \tag{12}$$

pentru unul, oarecare, din comutatorii membrului al doilea din (11). Citim pe (11), că α e periodic. Fie m ordinul său. Dacă $m = 1$, avem $\rho = 1 \to PG$. Presupunem $m > 1$. Din (12) rezultă

$$(\alpha\rho)^m = 1.$$

Aplicând formula semioperativității potențării, din notă, avem

$$\rho^m \prod_{u=m-1}^{u=1} (\rho \circ \alpha^u)((\rho \circ \alpha^u) \circ \rho^u) = 1. \tag{13}$$

Folosind formula (4), din 5°, putem scrie

$$\rho \circ \alpha^u = (\rho \circ \alpha)^{r(q_u)} \dots (\rho \circ \alpha)^{r(q_2)} (\rho \circ \alpha)^{r(q_1)}, \quad q_j \to G. \tag{14}$$

Din (11) deducem

$$\rho \to K^i \subset (K^i), \quad \alpha \to PG. \tag{15}$$

Potrivit ipotezei I inductive, ținând seamă de (15), conchidem

$$\rho \circ \alpha \to PG \tag{16}$$

Pe de altă parte din (11) și (15) avem încă

$$\rho \circ \alpha \to K^{i+1} \subset K^i. \tag{16'}$$

Relațiile (16), (16') dau împreună

$$\rho \circ \alpha \to PK^i \subset P(K^i) \subset \Gamma_i. \tag{14'}$$

Insă Γ_i e divizor normal. Comparând (14) și (14'), rezultă

$$\rho \circ \alpha^u \to \Gamma_i. \tag{17}$$

Incât următorul comutator, cu o componentă în divizorul normal Γ_i se află în Γ_i

$$(\rho \circ \alpha^u) \circ \rho^u \to \Gamma_i. \tag{17'}$$

Ducând (17) și (17') în (13) avem

$$\rho^m = \gamma \qquad \gamma \to \Gamma_i.$$

Dar potrivit ipotezei II inductive, grupul Γ_i e periodic. Deci, dacă n este ordinul lui γ

$$\rho^{mn} = 1, \quad \rho \to PG. \tag{15'}$$

Comparând (15) și (15'), scoatem

$$\rho \to P(K^i) \subset \Gamma_i. \tag{18}$$

Insă Γ_i e invariant atât față de eventuala luare a inversului $\xi_{jk} = -1$ cât și față de automorfismul interior $r(t_{jk})$. Incât din (11), (12), și (18) obținem în definitiv

$$a \circ b \to \Gamma_i.$$

Sau, ținând seamă, în virtutea ipotezei II inductive, că Γ_i e periodic

$$a \circ b \to PG, \quad a \in PG \ , \ b \in (K^{i-1}).$$

Ipoteza I e verificată pentru indicele $i - 1$.

Verificarea ipotezei II.
Fie

$$\alpha \in (P(K^{i-1})) = \Gamma_{i-1}. \tag{19}$$

Cum $P(K^{i-1})$ e un complex periodic, α e de forma

$$\alpha = a_1 a_2 \dots a_h, \qquad a_j \to P(K^{i-1}). \tag{20}$$

Vrem să arătăm că α e periodic.
Pentru $h = 1$, proprietatea e evidentă, conform lui (20). O presupunem adevărată pentru $h - 1$ factori:

$$a = a_1 a_2 \dots a_{h-1}, \qquad a \to PG \tag{21}$$

și ne propunem s'o demonstrăm pentru h.
Din (20) și (21) avem

$$\alpha = a a_h \tag{22}$$

unde a și a_h conform lui (21) și (20) sunt periodice. Fie m produsul ordinelor lor. Dacă $m = 1$, proprietatea e evidentă, căci $\alpha = 1 \to PG$. Presupunem deci $m > 1$. Aplicând în (22) formula semioperativității potențării, din notă, obținem

$$\alpha^m = \prod_{u=m-1}^{u=1} (a_h \bigcirc a^u)\,((a_h \bigcirc a^u) \bigcirc a_h^u). \tag{23}$$

Dar, din (20) conchidem

$$a_h = \alpha_1^{\varepsilon_1} \alpha_2^{\varepsilon_2} \dots \alpha_k^{\varepsilon_k}, \qquad \varepsilon_j = \pm 1, \qquad a_j \to K^{i-1}. \tag{24}$$

Aplicând formulele (3) și (4), din 5°, putem scrie

$$a_h \bigcirc a^u = (\alpha_1 \bigcirc a^u)^{\varepsilon_1 r(x_1)} (\alpha_2 \bigcirc a^u)^{\varepsilon_2 r(x_2)} \dots (\alpha_h \bigcirc a^u)^{\varepsilon_h r(x_h)}, \qquad x_j \to G \tag{25}$$

Potrivit ipotezei (1) a permiterii periodice, avem

$$a^u \to PG = P(K^\circ) \subset (PK^\circ).$$

Incât, cum PK° e un complex periodic, a^u e de forma

$$a^u = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_l, \qquad \beta_{i'} \to PK^\circ. \tag{26}$$

Ca atare, introducând (26) în (25) și aplicând încă odată comutatorilor formulele (3) și (4), din 5°, obținem (ținând seamă că antiautomorfismul $\varepsilon = -1$ e permutabil cu un automorfism interior):

$$a_h \bigcirc a^u = \Pi (\alpha_i \bigcirc \beta_{i'})^{\eta_{ii'} r(y_{ii'})}, \qquad \eta_{ii'} = \pm 1, \quad y_{ii'} \to G. \tag{27}$$

Dacă $\alpha \circ \beta$ e unul, oarecare, din comutatorii din membrul al doilea din (27) avem, în virtutea lui (24) și (26):

$$a \circ \beta \to K^i. \tag{28}$$

Pe de altă parte, conform lui (26), elementul β e periodic; conform lui (24), elementul α e în K^{i-1}. Cum ipoteza I a fost verificată pentru indicele $i-1$, putem scrie

$$a \circ \beta \to PG. \tag{28'}$$

Relațiile (28), (28') luate împreună dau

$$\alpha \circ \beta \to PK^i \subset P(K^i) \subset \Gamma_i.$$

Antiautomorfismul $\eta = -1$ al luării inversului și automorfismul interior $r(y)$ invariază divizorul normal Γ_i. Ca atare

$$(\alpha \circ \beta)^{\eta r(y)} \to \Gamma_i.$$

Incât (27) dă

$$a_h \circ a^u \to \Gamma_i. \tag{29}$$

Cum Γ_i e divizor normal, avem de asemenea

$$(a_h \circ a^u) \circ a_h^u \to \Gamma_i. \tag{29'}$$

Ducând (29), (29'), în (23), această egalitate devine

$$\alpha^m = \gamma, \qquad \gamma = \Gamma_i$$

Dar Γ_i, potrivit ipotezei II inductive, e periodic. Ca atare, dacă n e ordinul lui γ, conchidem

$$\alpha^{mn} = 1, \qquad \alpha \in \Gamma_{i-1}.$$

Așa dar Γ_{i-1} e periodic. Cu aceasta, ipoteza II e verificată pentru indicele $i-1$.

Incât afirmațiile I și II sunt demonstrate prin inducție pentru orice indice i cu

$$0 \leqslant i \leqslant \omega.$$

In particular II ne dă pentru $i = 0$:

$$(P(K^\circ)) \subset PG$$

sau, fiindcă G e generat de K°

$$(PG) \subset PG$$

Dar evident

$$(PG) \supset PG$$

Conchidem

$$PG = (PG) = \text{grup}$$

Criteriul necesar și suficient din 2° e satisfăcut. Ca atare G admite radical periodic.

8°. Condiții necesare și suficiente de existență a radicalului periodic.

Zicem că un grup e *cuasi-periodic-nilpotent* de specia I, resp. II, când admite un sistem periodic-comutator, generator, de specia I, resp. II, cu cel puțin un declinat conținut într'un divizor normal periodic:

$$G = (K),$$

$$K^{\omega} \subset \Omega, \ \Omega = \text{divizor normal periodic.}$$

Teorema principală I, resp. II se lasă generalizată în teorema A, resp. B:

Teorema A resp. B.

Un grup G cuasi-periodic-nilpotent de specia I, resp. II, admite radical periodic dacă sistemul comutator generator K e periodic-permis:

$$P(K) \subset (PK).$$

Demonstrație. — Fie H homomorfismul

$$G \rightarrow G/\Omega$$

Cum Ω e periodic, operațiile H, P (aplicate unui complex arbitrar X din G) sunt permutabile

$$HP = PH. \tag{1}$$

Într'adevăr, un element periodic din HX are ca ramificări în H numai elemente periodice, altfel am avea $H(x^m) = (Hx)^m = H(1)$ cu x neperiodic. Dar $x^m = y \rightarrow \Omega$, așa dar $x^{mn} = 1$, ceea ce e absurd. E dovedită deci înfășurarea $PHX \subset HPX$. Pe de altă parte, e evident că imaginea unui element periodic e un element periodic, cu alte cuvinte e evidentă înfășurarea $PHX \supset HPX$. Deci $PHX = HPX$.

Operațiile H și $\bigcirc$ (luarea comutatorului) sunt iarăși, cum se știe, permutabile.

In sfârșit, X fiind un complex arbitrar din G, avem acest fel de permutabilitate, ușor de verificat, între H și un automorfism interior R_T de generatoare T

$$HR_T \cdot X = R_{HT} H \cdot X \tag{2}$$

De aici urmează fără greutate:

Dacă G are în K un sistem comutator generator de declinați K^i, atunci HG are în HK de asemenea un sistem comutator ai cărui declinați $\{HK\}^i$ sunt chiar operații prin H ai declinaților K^i ai lui K:

$$\{HK\}^i = HK^i \tag{3}$$

Deci, aplicând (1):

$$\begin{gathered} P\{HK^i\} = PHK^i = HPK^i \\ \cdots \quad (P\{HK\}^i) = (H \cdot PK^i) = H(PK^i) \end{gathered} \tag{4}$$

Să presupunem că sistemul K e periodic-comutator de specia I.

Avem succesiv, folosind (1), (2) și (3), pornind dela (4):

$$\begin{aligned} R_{HT}\,(P\{HK^i\}) &= R_{HT}\,H\,(PK^i) = \\ &= HR_T\,(PK^i) \\ &= H\,(PK^i) = (HPK^i) \\ &= (P\{HK^i\}) \end{aligned}$$

Citim pe acest rezultat că HK e sistem periodic-comutator de specia I.

Să presupunem că sistemul K e periodic-comutator de specia II. Avem, pornind dela (3)

$$\begin{aligned} R_{HT}\,P\,(\{HK\}^i) &= R_{HT}\,P\,(HK^i) \\ &= R_{HT}\,PH\,(K^i) \\ &= R_{HT}\,HP\,(K^i) \\ &= HR_T\,P\,(K^i) \\ &= HP\,(K^i) \end{aligned}$$

Citim pe rezultatul final că HK e sistem periodic-comutator de specia II.

In definitiv, cum prin ipoteză

$$K^\omega \subset \Omega,$$

$$\cdot\cdot\cdot \{HK^\omega\} = H\,K^\omega = 1,$$

avem în HG, unde G e grupul din enunțul teoremei A, resp. B, un grup periodic-nilpotent de specia I resp. II.

Prin ipoteză, K e periodic-permis

$$P\,(K) \subset (PK).$$

Aplicând operația H, evident permutabilă cu incluziunile de complexe, obținem:

$$\begin{aligned} &H\,P\,(K) \subset H\,(P\,K) \\ \cdot\cdot\cdot\ &P\,H\,(K) \subset (H\,P\,K) \\ \cdot\cdot\cdot\ &P\,(H\,K) \subset (P\,H\,K) \end{aligned}$$

Citim pe ultima relație că sistemul periodic-comutator, generator, HK al grupului HG periodic-nilpotent de specia I, resp. II, e periodic permis. Incât putem aplica teorema principală I, resp. II.

Obținem

$$\begin{aligned} &PHG = grup, \\ \cdot\cdot\cdot\ &HPG = grup. \end{aligned} \tag{5}$$

Prin ipoteză însă, $PG \supset \Omega$, deci PG reprezintă o ramificare totală în omomorfismul H. Ca atare PG e ramificarea totală a grupului din (5). Conchidem

$$P\,G = grup.$$

In virtutea teoremei 2° rezultă că G admite radical periodic.

Teorema A resp. B e demonstrată.

Putem da acestor teoreme forma unui criteriu necesar şi suficient de existenţă a radicalului periodic.

Teorema $\mathcal{A}$ resp. $\mathcal{B}$. Condiţia necesară şi suficientă ca un grup G să admită radical periodic este existenţa unui subgrup $g \supset PG$ cuasi-periodic nilpotent de prima resp. a doua specie, al cărui sistem comutator K mijlocitor al nilpotenţei să fie periodic permis.

Intr'adevăr, criteriul e suficient, în virtutea teoremei A, resp. B, aplicată lui g (concluzia $Pg = PG =$ grup) şi a teoremei 2°.

Criteriul e banal necesar, căci în virtutea lui 2° trebue să avem $PG =$ = grup. Luând deci $g = PG$, iar pentru Ω oricare din puterile comutatoare ale lui g; avem în g un caz de grup cuasi-nilpotent de prima sau a doua specie, evident periodic-permis.

Criteriul apare puţin formal, mai bine zis apare ca o contragere a teoremei A resp. B constructivă cu criteriul neconstructiv 2°. Criteriul $\mathcal{A}$ resp. $\mathcal{B}$ ar fi complect constructiv dacă am putea garanta totdeauna existenţa unui înfăşurător veritabil $g > PG$ al lui PG diferit de G.

Incă o parte rămasă deschisă pentru cercetare este construirea de sisteme periodic-comutatoare, generatoare de specia I resp. II, cu ajutorul cărora să definim o nilpotenţă periodică. Am văzut în 5° că primul mod, cel mai la îndemână, de a construi astfel de sisteme, luând $K =$ invariant, ne face să cădem peste nilpotenţa ordinară. Cu ajutorul formulelor (4), din 5°, ale lui Fitting se poate arăta că aranjamentul mai slab $(K^i) =$ divizori normali, conduce tot la nilpotenţa ordinară.

Soluţia trebue căutată deci printre sistemele comutatoare generatoare cu (K^i) neinvarianţi.

Institutul de Matematică
al Academiei R.P.R., Bucureşti.

О ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ МАЛЬЦЕВА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

А. И. Мальцев в своих трудах о нильпотентных группах без кручения (Известия Академии Наук, том 13, 3, 1949) утверждает без доказательства, что любая нильпотентная группа может быть получена как *расширение Шрейера* периодической нильпотентной группы нильпотентной группой без кручения.

Воспроизводя доказательство этой теоремы, рассматриваем проблему, которая могла бы быть общей проблемой Мальцева: какие необходимые и достаточные условия требуются для существования периодического радикала в абстрактной группе?

Ответ на этот вопрос является целью настоящего сообщения.

На этот предмет введем то, что мы обозначаем коммутативной системой K: не пустое множество элементов группы, замкнутое относительно операции:

$$a \bigcirc b = a^{-1} b^{-1} ab.$$

Любая коммутативная система K есть первый член вполне определенной отклоняющейся цепи:

$$K = K^0, K^1, K^2, \ldots, K^i, \ldots,$$

где K^i, $i > 0$, означает множество всех элементов K^0, которые можно записать в следующей форме итеративного коммутатора размеров $d \geqslant 0$, то есть соединение $d \geqslant 0$, операций $a \cap b$, продолжающихся произвольно направо и налево, исходя из элементов K.

Такая цепь разлагается в связи с операцией $a \cap b$, следовательно имеем:

$$a_i \cap a_j = a_h, \qquad a_i \in K^i, a_j \in K^j,$$
$$h > \text{Max } (i, j), \qquad a_h \to K^h.$$

При помощи этого понятия даются два обобщения ординарной нильпотентности, несократимой одна с другой.

Пусть PX, соответственно $P(X)$ множество всех периодических элементов, содержащихся в комплексе X, соответственно в подгруппе (X) порожденной X.

Говорим, что группа G периодически нильпотентна первого, соответственно второго разряда, если существует коммутативная система K генератриса G, с извлеченной отклоняющейся ($K^\omega = 1$), все подгруппы которой (PK^i) соответственно все комплексы $P(K^i)$ инвариантны в G (относительно внутренних автоморфизмов).

Индуктивно устанавливается относительно длины ω отклоняющейся цепи теоремы, обощающие в двух различных направлениях теорему Мальцева.

I. *Группа G периодически нильпотентная первого, соответственно второго разряда при посредтстве коммутативной системы K периодически допустимой*

$$G = (K), \qquad P(K) \leqslant (PK) \tag{1}$$

обладает периодическим радикалом.

Группу G можно явно рассматривать коммутативной системой периодически допускаемой. Полагая $K = G$, получаем от каждой общей теоремы (I), посредством специализации, теорему Мальцева.

II. *Группа G, порожденная коммутативной системой K, периодически допускаемой, с отклоняющейся цепью первого, соответственно второго разряда,* (то есть цепь с группами (PK^i) соответственно инвариантными комплексами $P(K^i)$) *допускает периодический радикал, если одно из звеньев K^ω принадлежит периодической инвариантной подгруппе.*

Таким образом можно даже придать вышеуказанной теореме характер необходимого и достаточного критерия, слегка формального, более подробно описанного в тексте сообщения.

SUR LES GROUPES SANS TORSION DE A. I. MALTSEV

(RÉSUMÉ)

Dans ses travaux sur les groupes nilpotents de Lie, (Isvestia Academii Nauk, Tom. 13, 3, 1949) A. I. Maltsev donne, sans démonstration, ce théorème, fondamental pour ses recherches:

Tout groupe G *nilpotent, abstrait, est à radical périodique*, c'est-à-dire qu'il contient un sous-groupe invariant périodique M, dont le groupe-facteur G/M est pur (exempt d'éléments périodiques différents de l'élément-unité).

En reconstituant la démonstration de ce théorème, l'Auteur s'est posé ce qu'on pourrait appeler *le problème général de Maltsev*: *Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes requises par l'existence du radical périodique dans un groupe abstrait*?

C'est pour répondre à cette question qu'il a entrepris de rédiger l'article ci-joint.

A cet effet, on introduit ce que l'on désignera du nom de *système commutateur* K: un ensemble non vide d'éléments du groupe, fermé par rapport à l'opération:

$$a \bigcirc b = a^{-1} b^{-1} ab.$$

Tout système commutateur K est le premier terme d'une *chaîne déclinante* bien déterminée:

$$K = K^{\circ} \supset K^{1} \supset K^{2} \supset \ldots\ldots \supset K^{i} \supset \ldots$$

où K^{i}, $i > 0$, signifie l'ensemble de tous les éléments de K° qui peuvent être mis sous forme de commutateur itéré de dimension $d \geqslant 0$, c'est-à-dire d'un agrégé de $d \geqslant 0$ opérations $a \bigcirc b$, poursuivies arbitrairement à droite ou à gauche, en partant des éléments de K.

Une telle chaîne se dégrade par rapport à l'opération $a \bigcirc b$, c'est-à-dire:

$$a_i \bigcirc a_j = a_h, \qquad a_i \in K^{i}, a_j \in K^{j},$$

$$h > \text{Max}\,(i,j), \qquad a_h \to K^{h}.$$

A l'aide de cette notion, on donne deux généralisations de la nilpotence ordinaire, irréductibles l'une à l'autre.

Soit PX resp. $P\,(X)$ l'ensemble de tous les éléments périodiques contenus dans le complexe X, respectivement dans le sous-groupe (X) engendré par X.

Le groupe G est dit périodiquement nilpotent *de première* respectivement *de seconde espèce*, s'il existe un système commutateur K générateur de G, à chaîne déclinante épuisée $(K^{\omega} = 1)$ dont tous les sous-groupes (PK^{i}) respectivement tous les complexes $P\,(K^{i})$ sont invariants en G (par rapport aux automorphismes intérieurs).

On établit par induction, relativement à la longueur ω de la chaîne déclinante, ces théorèmes qui généralisent le théorème de Maltsev en deux directions différentes:

I. *Un groupe* G *périodiquement nilpotent de première*, respectivement *de seconde espèce*, *par l'intermède d'un système commutateur* K *périodiquement permis*:

$$G = (K), \qquad P\,(K) \subset (PK) \tag{1}$$

est à radical périodique.

Le groupe G peut évidemment être considéré comme un système commutateur périodiquement permis. En prenant $K = G$ on obtient de chaque théorème général (I), par spécialisation, le théorème de Maltsev.

II. *Un groupe* G *engendré par un système commutateur* K *périodiquement permis, à chaîne déclinante de première*, respectivement *de seconde espèce* (c'est à-dire: une chaîne aux groupes (PK^i) *respectivement* aux complexes $P(K^i)$ invariants) *admet un radical périodique, si l'un des chaînons* K^ω *appartient à un sous-groupe invariant périodique.*

On peut même donner au théorème ci-dessus le caractère d'un critérium nécessaire et suffisant, un peu formel, sur lequel l'Auteur s'explique plus amplement dans le texte.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

ASUPRA UNEI CLASE DE SUPRAFEŢE (II)

DE

GH. TH. GHEORGHIU

1. Intr'o lucrare publicată recent [6], ne-am propus să studiem un cuplu de două suprafeţe (x), (x'), descrise respectiv de punctele x şi x', care să se bucure de următoarele două proprietăţi caracteristice:

1. cele două suprafeţe să fie transformate asimptotice una alteia;

2. x' să se afle pe cuadrica lui Darboux de indice c în x la suprafaţa (x) şi tot aşa x să se afle pe cuadrica lui Darboux de indice c în x' la suprafaţa (x').

In prezenta lucrare, vom face consideraţii numai asupra cuadricei lui Lie $(c = 0)$, propunându-ne să tratăm mai de aproape cazul special când tangentele asimptotice xx_u, xx_v se întâlnesc respectiv cu tangentele asimptotice $x'x'_u$, $x'x'_v$. Impărţim aceste suprafeţe în două categorii, după cum urmează:

a) cupluri pentru care suprafeţele (x) şi (x') sunt aplicabile;

b) cupluri pentru care suprafeţele (x) şi (x') nu sunt aplicabile.

Singurele suprafeţe din categoria a doua sunt suprafeţele studiate de G o d e a u x [5] şi care se bucură de proprietatea de a avea în puncte corespunzătoare aceeaşi cuadrică Lie. Cum aceste suprafeţe au fost mult considerate, reţinem pentru studiul nostru, suprafeţele din prima categorie, pe care le vom nota simbolic prin (S). Suprafeţele (S) sunt deci suprafeţe ale căror tangente asimptotice se întâlnesc şi care satisfac condiţiilor 1, 2 şi *a)*. Din calcule reiese că în baza condiţiilor *a)*, suprafeţele cuplului sunt *proiectiv identice* (adică sunt transformate una alteia, printr'o omografie).

Studiul pe care l-am întreprins [6], [7] asupra suprafeţelor (S) ne spune că aceste suprafeţe sunt de trei feluri:

I. *Suprafeţe Ţiţeica* [3] [1];

II. Suprafeţe considerate pentru prima oară de O. M a y e r şi pe care le vom numi pe scurt *suprafeţe* Mayer [4] [2];

III. O clasă nouă de suprafeţe, pe care le vom nota cu (S_2). Suprafeţele (S) au proprietatea comună de a lăsa un punct fix şi un plan fix. Această proprietate ne impune studiul lor centro-afin. Dintre toate proprietăţile pe

[1] p. 246—256.
[2] p. 40.

care le vom da, afară de una, toate sunt caracteristice; cea care ni se pare mai simplă și asupra căreia vrem să atragem atenția, este următoarea. *Se consideră o suprafață oarecare descrisă de punctul* M. *Fie* m *proiecția lui* M *făcută dintr'un punct fix pe un plan dat (punctul și planul nu se aparțin), și fie* (C) *intersecția cuadricei lui Lie în* M *cu acest plan. Se știe că* m *descrie o rețea plană, ale cărei transformate Laplace fie* m_1 *și* m_{-1}. *Condiția necesară și suficientă pentru ca suprafața considerată să fie* (S), *este ca dreapta* m_1, m_{-1} *să fie polara lui* m *față de conica* (C). *Dacă* m_1 și m_{-1} *sunt pe conica* (C), *suprafața este suprafață Țițeica; dacă numai unul din punctele* m_1 *sau* m_{-1} *este pe conica* (C), *suprafața este suprafață Mayer; iar dacă niciunul din punctele* m_1 *și* m_{-1} *nu este pe conica* (C), *suprafața este suprafață* (S_2).

§ 1. Clasificarea cuplurilor de suprafețe ale căror tangente asimptotice, referitoare la curbe de același nume, se întâlnesc între ele

2. Presupunând suprafața (x) neriglată și propriu zisă, raportată la asimptoticele sale u, v, ea va fi definită proiectiv [1], [2] prin sistemul de ecuații cu derivate parțiale:

$$\left.\begin{aligned} x_{uu} &= px + \theta_u x_u + \beta x_v, \\ x_{vv} &= qx + \gamma x_u + \theta_v x_v. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Față de o transformare de forma $x = \lambda x''$, funcțiile ce intră în coeficienții acestor ecuații se schimbă după formulele:

$$\left.\begin{aligned} &\beta'' = \beta, \quad \gamma'' = \gamma, \quad \theta'' = \theta - 2\ln\lambda, \\ &p'' = -\frac{\lambda_{uu}}{\lambda} + p + \theta_u\frac{\lambda_u}{\lambda} + \beta\frac{\lambda_v}{\lambda}, \quad q'' = -\frac{\lambda_{vv}}{\lambda} + q + \gamma\frac{\lambda_u}{\lambda} + \theta_v\frac{\lambda_v}{\lambda}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

iar față de o transformare a parametrilor pe asimptotice, definită prin relațiile $\bar{u} = U(u)$, $\bar{v} = V(v)$,

$$\bar{\beta} = \beta\frac{V'}{U'^2}, \quad \bar{\gamma} = \gamma\frac{U'}{V'^2}, \quad \bar{p} = \frac{p}{U'^2}, \quad \bar{q} = \frac{q}{V'^2}, \quad \bar{\theta} = \theta - \ln U'V', \tag{3}$$

accentul reprezentând operația derivării. Vom spune că o expresie este *invariantă* când rămâne neschimbată față de prima transformare și că este *intrinsecă* când se transformă după regula de covarianță față de a doua transformare: vom spune că o expresie este *invariant absolut*, când rămâne neschimbată față de ambele transformări. Expresiile [1]).

$$L = -\theta_{uu} + \frac{1}{2}\theta_u^2 + \beta_v + \beta\theta_v + 2p, \quad M = -\theta_{vv} + \frac{1}{2}\theta_v^2 + \gamma_u + \gamma\theta_u + 2q, \tag{4}$$

sunt invariante și intrinseci, anume:

$$\bar{L} = \frac{L}{U'^2}, \quad \bar{M} = \frac{M}{V'^2}.$$

[1]) Funcțiile L și M folosite în conținutul lucrărilor precedente [6], [7] și în lucrarea prezentă sunt schimbate de semn față de cele folosite în Fubini și Čech [1], p. 95.

Cu ajutorul lor, condițiile de integrabilitate ale sistemului (1) se scriu

$$\left.\begin{aligned} &L_v = 2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u, \quad M_u = 2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v, \\ &\beta M_v + 2\beta_v M - \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2\gamma_u L - \gamma_{uuu}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Introducem de asemenea notația

$$N = \theta_{uv} + \beta\gamma,$$

care nu este invariantă, dar este intrinsecă deoarece

$$\bar{N} = \frac{N}{U'V'}.$$

Avem formulele:

$$\left.\begin{aligned} N_u &= -\beta M + \theta_u N + \beta_v\theta_v + \frac{1}{2}\beta\theta_v^2 + \beta_{vv} + 2\beta q + 2p_v, \\ N_v &= -\gamma L + \theta_v N + \gamma_u\theta_u + \frac{1}{2}\gamma\theta_u^2 + \gamma_{uu} + 2\gamma p + 2q_u. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Printre altele, vom avea de asemenea nevoie de formulele:

$$\left.\begin{aligned} x_{uuv} &= (\beta q + p_v)\, x + N x_u + (\beta_v + \beta\theta_v + p)\, x_v + \theta_u x_{uv}, \\ x_{uvv} &= (\gamma p + q_u)\, x + (\gamma_u + \gamma\theta_u + q)\, x_u + N x_v + \theta_v x_{uv}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Punctul x' aflându-se pe cuadrica lui Lie, are reprezentarea parametrică:

$$x' = \left[\frac{1}{4}(h-\theta_v)(k-\theta_u) - \frac{1}{2}N\right] x + \frac{1}{2}(h-\theta_v)\, x_u + \frac{1}{2}(k-\theta_u)\, x_v + x_{uv}, \tag{8}$$

h și k fiind două funcții de u și v invariante și intrinseci:

$$\bar{h} = \frac{h}{V'}, \quad \bar{k} = \frac{k}{U'},$$

ce urmează să fie determinate prin condițiile impuse de problemă. Fie

$$2A = h_v - \frac{1}{2}h^2 + \gamma k + \gamma_u + M \quad , \quad 2B = k_u - \frac{1}{2}k^2 + \beta h + \beta_v + L,$$

$$2C = k_v + \beta\gamma, \qquad 2D = h_u + \beta\gamma,$$

$$D_v - hD = sC, \qquad C_u - kC = rD.$$

Noile funcții A, B, C, D, r, s, astfel introduse, sunt invariante și intrinseci [6] [1]).

$$\bar{A} = \frac{A}{V'^2}, \quad \bar{B} = \frac{B}{U'^2}, \quad \bar{C} = \frac{C}{U'V'}, \quad \bar{D} = \frac{D}{U'V'}, \quad \bar{r} = \frac{r}{U'}, \quad \bar{s} = \frac{s}{V'}.$$

[1]) p. 144.

3. Suprafețele care se bucură de proprietatea de a avea tangentele asimptotice xx_u, xx_v concurente respectiv cu tangentele asimpotice $x'x'_u$, $x'x'_v$ sunt caracterizate prin condițiile $A = B = 0$ [6] [1]).
In aceste ipoteze, relațiile precedente se transformă în:

$$\left.\begin{aligned} &h_u = 2D - \beta\gamma, && h_v = \frac{1}{2}h^2 - \gamma k - \gamma_u - M,\\ &k_u = \frac{1}{2}k^2 - \beta h - \beta_v - L, && k_v = 2C - \beta\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$C_u = kC + rD, \qquad D_v = hD + sC. \tag{10}$$

Pentru ca suprafața descrisă de punctul x' să nu se reducă la un plan, este necesar să presupunem $CD \neq 0$. Fie: $\alpha = \frac{C}{D}$. Cu ajutorul formulelor de mai sus, se constată că α *este un invariant absolut.* In afara acestor relații, funcțiile h, k, C, D, r, s, mai satisfac relațiilor [6] [2]).

$$r_u = r(r+k) + \beta(s+h) + \beta_v, \quad s_v = s(s+h) + \gamma(r+k) + \gamma_u; \tag{11}$$

$$s_u C - r_v D = rs(C - D); \tag{12}$$

$$r_v = 2rs - \beta\gamma + 2D - (\ln D)_{uv}, \quad s_u = 2rs - \beta\gamma + 2C - (\ln C)_{uv}; \tag{13}$$

$$\frac{(r_v - rs + C)_u}{r_v - rs + C} = 2(r+k) - (\ln C)_u, \quad \frac{(s_u - rs + D)_v}{s_u - rs + D} = 2(s+h) - (\ln D)_{uv}. \tag{14}$$

La aceste relații adăugăm

$$2sC = -\frac{1}{2}\gamma k^2 - \gamma_u k - \gamma_{uu} + \gamma L, \quad 2rD = -\frac{1}{2}\beta h^2 - \beta_v h - \beta_{vv} + \beta M, \tag{15}$$

care sunt condițiile de compatibilitate ale relațiilor (9), folosind pe (10).
Formulele de mai sus caracterizează suprafețele care satisfac condițiilor 1 și 2 (Nr. 1). Aceste suprafețe le împărțim în două categorii *a)* și *b)*. Suprafețele din categoria *a)*, adică suprafețele aplicabile, sunt caracterizate prin condiția $\alpha = 1$, adică $C = D$ [6] [3]). Făcând în formulele de mai sus această particularizare, rezultă că suprafețele (S) sunt caracterizate prin tabloul de formule

$$\left.\begin{aligned} &h_u = k_v = 2C - \beta\gamma,\\ &h_v = \frac{1}{2}h^2 - \gamma k - \gamma_u - M, \quad k_u = \frac{1}{2}k^2 - \beta h - \beta_v - L,\\ &(\ln C)_u = k + r, \qquad (\ln C)_v = h + s,\\ &s_u = r_v = rs,\\ &r_u = r(r+k) + \beta(s+h) + \beta_v, \quad s_v = s(s+h) + \gamma(r+k) + \gamma_u,\\ &2sC = -\frac{1}{2}\gamma k^2 - \gamma_u k - \gamma_{uu} + \gamma L, \quad 2rC = -\frac{1}{2}\beta h^2 - \beta_v h - \beta_{vv} + \beta M. \end{aligned}\right\} \tag{T}$$

[1]) p. 163.
[2]) p. 161.
[3]) p. 165.

Acest tablou se poate simplifica după diferite ipoteze ce se pot face asupra funcțiilor r și s și anume: I. dacă presupunem $r = s = 0$, se obțin suprafețele Țițeica; II. dacă presupunem $r = 0$, $s = 0$, obținem suprafețele Mayer; III. dacă $rs \neq 0$, obținem clasa de suprafețe (S_2). După cum ne aflăm în fiecare din cazurile precedente, tabloul (T) ia un aspect diferit, caracteristic suprafețelor respective [6] [1]). Cum în cele ce urmează ne propunem să facem în general un studiu global al suprafețelor (S), formulele ce vom stabili vor avea la bază formulele din tabloul (T).

4. Revenim la cazul general și să presupunem $\alpha \neq 1$. Pornind dela calculul lui $(\ln C)_{uv}$ și $(\ln D)_{uv}$ cu ajutorul formulelor (9), (10), (13), obținem:

$$\begin{aligned} C(\ln C)_{uv} + D(\ln D)_{uv} &= 2(C^2 + D^2) + C[ks + 2rs - s(\ln D)_u - \beta\gamma] + D(rs - \beta\gamma) = \\ &= 2(C^2 + D^2) + D[hr + 2rs - r(\ln C)_v - \beta\gamma] + C(rs - \beta\gamma), \end{aligned} \tag{16}$$

de unde rezultă relația

$$C[s(\ln D)_u - s(r + k)] = D[r(\ln C)_v - r(s + h)]. \tag{17}$$

De aici încolo problema se desparte din nou în trei cazuri.

α) $rs \neq 0$. Notăm cu $CD\varphi$ valoarea comună a ambelor părți ale egalității (17). In baza formulelor după care se transformă h, k, r, s, C și D, constatăm că φ este un *invariant absolut*. Rezultă:

$$r(\ln C)_v = r(s + h) + 2C\varphi, \quad s(\ln D)_u = s(r + k) + 2D\varphi. \tag{18}$$

Cu ajutorul acestor două formule, relațiile (16) se reduc la relația unică

$$C(\ln C)_{uv} + D(\ln D)_{uv} = 2(C^2 + D^2) + (C + D)(rs - \beta\gamma) - 2CD\varphi.$$

Pe de altă parte (12), în baza formulelor (13), devine

$$C(\ln C)_{uv} - D(\ln D)_{uv} = 2(C^2 - D^2) + (C - D)(rs - \beta\gamma).$$

Ultimele două formule combinate între ele dau:

$$(\ln C)_{uv} = rs - \beta\gamma + 2C - D\varphi, \quad (\ln D)_{uv} = rs - \beta\gamma + 2D - C\varphi. \tag{19}$$

In baza acestor formule, formulele (13) se scriu,

$$r_v = rs + C\varphi, \quad s_u = rs + D\varphi. \tag{13'}$$

Aceste formule transformă formulele (14) în

$$r + k = (\ln C\sqrt{\varphi + 1})_u, \quad s + h = (\ln D\sqrt{\varphi + 1})_v,$$

și care la rândul lor, în baza lui (10), dau

$$\varphi_u = 2r\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(\varphi + 1), \quad \varphi_v = 2s(1 - \alpha)(\varphi + 1). \tag{20}$$

Un calcul direct ne dă

$$\alpha_u = r(1 - \alpha) - \frac{2C\varphi}{s}, \quad \alpha_v = s\alpha(1 - \alpha) + \frac{2C\alpha\varphi}{r}. \tag{21}$$

[1]) p. 165.

Cu ajutorul acestor formule, condițiile de compatibilitate $(\ln C)_{uv} = (\ln C)_{vu}$ și $(\ln D)_{uv} = (\ln D)_{vu}$ dau relațiile

$$s^2(\varphi - \alpha + 1) = \varphi(\gamma r + \gamma k + \gamma_u), \quad r^2\left(\varphi - \frac{1}{\alpha} + 1\right) = \varphi(\beta s + \beta h + \beta_v). \tag{22}$$

Aceste relații derivate respectiv în raport cu u și v, în baza formulelor (15), dau

$$\beta\gamma = rs\frac{\alpha\varphi^2 + 2(\alpha-1)^2\varphi + 2(\alpha-1)^2}{\alpha\varphi^2} + 2C(\varphi+1) + 2D =$$

$$= rs\frac{\alpha\varphi^2 + 2(\alpha-1)\varphi + 2(\alpha-1)^2}{\alpha\varphi^2} + 2C + 2D(\varphi+1),$$

de unde rezultă

$$(C - D)\varphi = 0.$$

Deoarece cazul $C = D$ a fost studiat, această relație cere $\varphi = 0$. Cum suntem în ipoteza $rs \neq 0$, relațiile (20) cer $\alpha = 1$, adică $C = D$, deci nimic nou.

β) $r = 0$, $s \neq 0$. Formula (17) se reduce la

$$(\ln D)_u = k. \tag{23}$$

Formula (12) se reduce la $s_u = 0$, iar (13), la formulele

$$(\ln C)_{uv} = 2C - \beta\gamma, \quad (\ln D)_{uv} = 2D - \beta\gamma. \tag{24}$$

Prima formulă (14) conduce la $(\ln C)_u = k$.
Această formulă comparată cu (23) spune că $(\ln C)_u = (\ln D)_u$ care derivată în raport cu v, în baza lui (24), dă $C = D$, adică am revenit din nou la cazul studiat.

γ) $r = s = 0$. Formulele (10) dau

$$h = (\ln D)_v, \quad k = (\ln C)_u.$$

De asemenea formulele (11) se reduc la

$$h = -\frac{\beta_v}{\beta}, \quad k = -\frac{\gamma_u}{\gamma}.$$

Formulele precedente comparate între ele dau

$$\beta = \frac{\varphi(u)}{D}, \quad \gamma = \frac{\psi(v)}{C},$$

unde $\varphi(u)$ și $\psi(v)$ sunt funcții numai de u și v respectiv. Schimbând parametrii pe asimptotice, aceste formule dau

$$\beta = \frac{\varphi(u)\,U'^3}{D}, \quad \gamma = \frac{\psi(v)\,V'^3}{C},$$

formule care spun că pot fi aleși acești parametri astfel ca să avem

$$\beta = \frac{1}{D} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{C} \cdot \tag{25}$$

Cu ajutorul acestor formule, rezultă din (9)

$$(\ln C)_{uv} - 2C = (\ln D)_{uv} - 2D = \frac{1}{CD} \cdot \tag{26}$$

Tot formulele (9) mai dau

$$L = \frac{1}{2}(\ln C)_u^2 - (\ln C)_{uu}, \qquad M = \frac{1}{2}(\ln D)_v^2 - (\ln D)_{vv} \cdot \tag{27}$$

Celelalte formule se reduc la identități. Aceste suprafețe sunt suprafețele Godeaux [5].

§ 2. Primele proprietăți proiective ale cuplului de suprafețe (x), (x')

5. In lucrarea precedentă [6], am ales drept tetraedru de referință al configurației ce ne-am propus să studiem, tetraedrul definit prin punctele x, x_u, x_v, x_{uv}. Acest tetraedru are desavantajul de a nu fi intrinsec și invariant (de altfel, în lucrarea citată nici nu am studiat proprietățile geometrice ale configurației). Ne propunem în cele ce urmează, să alegem un alt tetraedru $x_1 x_2 x_3 x_4$ impus de cazul ales în special în lucrarea de față, definit prin relațiile [1]:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= x, \\
x_2 &= \left[r + \frac{1}{2}(k - \theta_u)\right] x + x_u, \\
x_3 &= \left[s + \frac{1}{2}(h - \theta_v)\right] x + x_v, \\
x_4 = x' &= \left[\frac{1}{4}(h - \theta_v)(k - \theta_u) - \frac{1}{2}N\right] x + \\
&+ \frac{1}{2}(h - \theta_v) x_u + \frac{1}{2}(k - \theta_u) x_v + x_{uv}.
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

In adevăr, făcând transformarea $x = \lambda x''$, în baza formulelor date la paragraful precedent, punctele x_i se transformă în λx_i, adică în ele însile; iar printr'o transformare a parametrilor pe asimptote, ele se transformă respectiv în

$$\bar{x}_1 = x_1 \quad , \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{U'} \quad , \quad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{V'} \quad , \quad \bar{x}_4 = \frac{x_4}{U'V'} \cdot$$

[1]) In cuprinsul lucrării [vom folosi fără deosebire x și x' sau x_1 și x^4, pentru ușurința scrisului.

Facem dela început observarea că noul tetraedru este propriu zis, deoarece

$$(x_1, x_2, x_3, x_4,) = (x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uv}) \neq 0, \tag{29}$$

în ipoteza că suprafața (x) este propriu zisă. Notația din formulă reprezintă ca de obicei un determinant scris printr'o singură linie simbolică.

Tetraedrul considerat are următoarea interpretare geometrică. Vârfurile x_1 și x_4 descriu cele două suprafețe transformate una alteia; celelalte două, x_2, și x_3 sunt punctele unde se întâlnesc tangentele asimptotice în x_1 și x_4 respectiv două câte două. Cu alte cuvinte, planele $x_1 x_2 x_3$ și $x_4 x_2 x_3$ sunt planele tangente în x_1 și x_4 la suprafețele transformate. In adevăr, din (28) scoatem

$$\left.\begin{aligned}
x &= x_1,\\
x_u &= -\left[r + \frac{1}{2}(k - \theta_u)\right] x_1 + x_2,\\
x_v &= -\left[s + \frac{1}{2}(h - \theta_v)\right] x_1 + x_3,\\
x_{uv} &= \left[\frac{1}{4}(h - \theta_v)(k - \theta_u) + \frac{1}{2} r (h - \theta_v) + \right.\\
&\left. + \frac{1}{2} s (k - \theta_u) + \frac{1}{2} N\right] x_1 - \frac{1}{2}(h - \theta_v) x_2 - \frac{1}{2}(k - \theta_u) x_3 + x_4.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Folosind formulele (6) și (7), precum și tabloul (T), avem următoarele grupe de formule

$$\left.\begin{aligned}
x_{1u} &= -\left[r + \frac{1}{2}(k - \theta_u)\right] x_1 + x_2,\\
x_{2u} &= \left[r + \frac{1}{2}(k + \theta_u)\right] x_2 + \beta x_3,\\
x_{3u} &= C x_1 + s x_2 - \frac{1}{2}(k - \theta_u) x_3 + x_4.\\
x_{4u} &= C x_2 + \frac{1}{2}(k + \theta_u) x_4;
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned}
x_{1v} &= -\left[s + \frac{1}{2}(h - \theta_v)\right] x_1 + x_3,\\
x_{2v} &= C x_1 - \frac{1}{2}(h - \theta_v) x_2 + r x_3 + x_4,\\
x_{3v} &= \gamma x_2 + \left[s + \frac{1}{2}(h + \theta_v)\right] x_3,\\
x_{4v} &= C x_3 + \frac{1}{2}(h + \theta_v) x_4.
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Aceste formule spun imediat proprietatea menționată mai sus, deoarece x_{1u} exprimându-se numai cu x_1 și x_2, dreapta $x_1 x_2$ va fi tangenta asimptotică $x_1 x_{1u}$. Tot așa, deoarece x_{4u} se exprimă numai cu ajutorul lui x_4 și x_2, tangenta asimptotică $x_4 x_{4u}$ va fi dreapta $x_2 x_4$: punctul x_2 este comun acestor două drepte. Analog, x_3 este punctul comun tangentelor asimptotice $x_1 x_{1v}$, $x_1 x_{4v}$.

6. In problema ce ne-am propus să studiem, suprafețele descrise de punctele x și x' joacă același rol. Aceasta înseamnă că vom putea trece dela suprafața (x') la suprafața (x) prin aceleași formule prin care am trecut dela suprafața (x) la suprafața (x'). Transformarea directă se face cu ajutorul funcțiilor h, k, C, r și s. Ne propunem să arătăm că aceste funcții rămân neschimbate în transformarea inversă, adică transformarea ce duce dela suprafața (x') la suprafața (x). Le vom nota deocamdată cu aceleași litere accentuate. Incepem prin a calcula elementele $\beta', \gamma', \theta', L', M'$ relative la suprafața (x'). In acest scop, folosim formulele (4) și (5), precum și mereu tabloul (T); găsim

$$\left.\begin{aligned} x'_{uu} &= \left[p - L - \frac{1}{2}k^2 - \theta_u k - \beta h - r(k+\theta_u)\right]x' + (2r+2k+\theta_u)x'_u + \beta x'_v, \\ x'_{vv} &= \left[q - M - \frac{1}{2}h^2 - \theta_v h - \gamma k - s(h+\theta_v)\right]x' + \gamma x'_u + (2s+2h+\theta_v)x'_v, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

formule care spun că

$$\left.\begin{aligned} &\beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma, \quad \theta'_u = 2r + 2k + \theta_u, \quad \theta'_v = 2s + 2h + \theta_v, \\ &p' = p - L - \frac{1}{2}k^2 - \theta_u k - \beta h - r(k+\theta_u), \\ &q' = q - M - \frac{1}{2}h^2 - \theta_v h - \gamma k - s(h+\theta_v), \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

de unde rezultă încă, în baza formulelor (4),

$$L' = L, \quad M' = M, \tag{34'}$$

ceea ce spune că *suprafețele* (x) și (x') *sunt identice proiectiv*.

Pe de altă parte, în baza acelorași formule, avem

$$x'_{uv} = C^2 x_1 + C\left[s + \frac{1}{2}(h+\theta_v)\right]x_2 + C\left[r + \frac{1}{2}(k+\theta_u)\right]x_3 + \left[\frac{1}{4}(h+\theta_v)(k+\theta_u) + 2C + \frac{1}{2}N - \beta\gamma\right]x_4 ; \tag{33'}$$

dar în baza formulei (8) trebue să avem

$$\lambda x_1 = \left[\frac{1}{4}(h' - \theta'_v)(k' - \theta'_u) - \frac{1}{2}N'\right]x_4 + \frac{1}{2}(h' - \theta'_v)x_{4u} + \frac{1}{2}(k' - \theta'_u)x_{4v} + x_{4uv}, \tag{35}$$

unde λ este un factor de proporționalitate. După ce se fac înlocuirile cu ajutorul formulelor (31), (32) și (33'), rezultă

$$h' = h \quad , \quad k' = k. \tag{36}$$

Dar funcțiile h' și k' trebue să satisfacă formulelor din tabloul (T) accentuate, încât

$$h'_u = k'_v = 2C' - \beta'\gamma' = 2C' - \beta\gamma = 2C - \beta\gamma,$$

de unde rezultă $C' = C$. Dar trebue să avem și

$$C'_u = C'(k' + r') \quad \text{sau} \quad C_u = C(k + r'),$$

ceea ce înseamnă că și $r' = r$; de asemenea, $s' = s$. Deci : *trecerea dela suprafața* (x') *la suprafața* (x) *se face prin aceleași formule ca și trecerea dela suprafața* (x) *la suprafața* (x'), *folosind aceleași funcții* β, γ, L, M, h, k, C, r *și* s; *numai funcțiile* θ, p și q *se schimbă după formulele* (34). Aceste funcții nefiind invariante, nu le vom folosi în calcule.

In ceea ce privește tetraedrul de referință, el are o definiție simetrică față de cele două suprafețe. Totuși, formal, coordonatele vârfurilor se schimbă. In adevăr, în (35) trebue să luăm $\lambda = C^2$, iar folosind formulele de definiție (28),

$$x'_2 = \left[r' + \frac{1}{2}(k' - \theta'_u)\right]x_4 + x_{4u} = Cx_2,$$

$$x'_3 = \left[s' + \frac{1}{2}(h' - \theta'_v)\right]x_4 + x_{4v} = Cx_3.$$

Aceste rezultate spun că *atunci când vom vrea să trecem dela o formulă a suprafeței* (x) *la formula corespunzătoare suprafeței* (x'), *va trebui să înlocuim pe* x_1, x_2, x_3, x_4 *prin* x_4, Cx_2, Cx_3, C^2x_1.

O consecință imediată a celor arătate în acest număr o exprimă formulele (36). Anume, aceste formule demonstrează că *suprafețele* (x) *și* (x') *sunt de aceeași natură, adică sunt în același timp suprafețe Țițeica, suprafețe Mayer sau suprafețe* (S_2).

7. Ne propunem să demonstrăm o proprietate proiectivă importantă a configurației ce ne-am propus să studiem, și anume ne propunem să demonstrăm că *dreapta* xx' *trece printr'un punct fix* O, *iar dreapta* x_2x_3, *rămâne într'un plan fix* (P), *astfel că dacă* O' *este punctul unde dreapta* x x' *înțeapă planul* (P), *punctele* O, O', x, x' *formează o diviziune armonică* [7][1]).

In adevăr, punctul O are coordonatele

$$x_5 = x_4 - Cx_1. \tag{37}$$

[1]) p. 147.

Acest punct este fix deoarece

$$x_{5u} = \frac{1}{2}(k + \theta_u)\, x_5, \qquad x_{5v} = \frac{1}{2}(h + \theta_v)\, x_5.$$

Pentru a arăta a doua parte a proprietății enunțate, vom arăta că planul (P) determinat prin punctele x_2, x_3 și x_6, x_6 fiind definit prin formula

$$x_6 = x_4 + Cx_1, \tag{38}$$

este fix. In adevăr, acest plan are ecuația

$$(X,\ x_2,\ x_3,\ x_6) = 0, \tag{39}$$

și făcându-se calculele, se obține

$$(X,\ x_2,\ x_3,\ x_6)_u = \left[r + \frac{1}{2}(k + 3\theta_u)\right](X,\ x_2,\ x_3,\ x_6),$$

$$(X,\ x_2,\ x_3,\ x_6)_v = \left[s + \frac{1}{2}(h + 3\theta_v)\right](X,\ x_2,\ x_3,\ x_6),$$

ceea ce spune că planul este fix.

In fine, pentru a demonstra ultima parte a proprietății, observăm că punctul x_6 este în planul (P) și că este în același timp și pe dreapta $x_1 x_4$; aceasta însemnează că este la intersecția lor, adică este puncul O'. Or, de pe coordonatele punctelor O și O' se citește imediat că ele sunt conjugate față de x_1 și x_4.

Este bine să facem observarea că punctul O și planul (P) nu se pot aparține unul altuia. Acest lucru s'ar putea întâmpla numai în cazul când $O \equiv O'$, adică $C = 0$, or, am spus (Nr. 2) că acest lucru nu este posibil.

In urma proprietății demonstrate, rezultă că transformarea ce duce dela suprafața (x) la suprafața (x') este o omologie. Aplicând o omografie configurației, putem face ca planul (P) să fie considerat ca plan dela infinit, iar punctul O ca origine. Dar omografiile care lasă aceste elemente neschimbate sunt centro-afinitățile. Acest lucru ne cere să facem un studiu centro-afin al suprafețelor (S).

18. Să considerăm mai în de aproape configurația formată de ansamblul cuadricelor Lie la cele două suprafețe. In acest scop, să scriem ecuația celor două cuadrice luând drept tetraedru fundamental, tetraedrul $x_1 x_2 x_3 x_4$. Dacă tetraedrul de referință este $x x_u x_v x_{uv}$, adică dacă punem,

$$\Delta X = \Delta_1 x + \Delta_2 x_u + \Delta_3 x_v + \Delta_4 x_{uv}, \tag{40}$$

rezultă din (8) că ecuația cuadricei lui Lie în x la suprafața (x), este

$$2(\Delta_1 \Delta_4 - \Delta_2 \Delta_3) + N\Delta_4^2 = 0. \tag{41}$$

Pe de altă parte, în raport cu tetraedrul $x_1 x_2 x_3 x_4$ vom pune

$$DX = D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4. \tag{42}$$

Inlocuind în această formulă pe x_1, x_2, x_3, x_4 în funcţie de x, x_u, x_v, x_{uv}, prin intermediul formulelor (28) şi comparând rezultatul cu (40), găsim formulele de trecere dela primul tetraedru la al doilea,

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_1 &= D_1 + \left[r + \frac{1}{2}(k - \theta_u)\right] D_2 + \left[s + \frac{1}{2}(h - \theta_v)\right] D_3 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(h - \theta_v)(k - \theta_u) - N\right] D_4, \\
\Delta_2 &= D_2 + \frac{1}{2}(h - \theta_v) D_4, \\
\Delta_3 &= D_3 + \frac{1}{2}(k - \theta_u) D_4, \\
\Delta_4 &= D_4; \qquad\qquad \Delta = D.
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Cu ajutorul acestor formule, ecuaţia (41) se transformă în

$$D_1 D_4 - D_2 D_3 + D_4 (r D_2 + s D_3) = 0. \tag{44}$$

Ecuaţia cuadricei lui Lie în x', va fi

$$D_1' D_4' - D_2' D_3' + D_4' (r' D_2' + s' D_3') = 0, \tag{45}$$

accentul arătând că lucrăm în punctul x'. Dar, ţinând seama de cum se schimbă x_1, x_2, x_3, x_4, formula (40) devine

$$D'X = D_1' x_4 + D_2' C x_2 + D_3' C x_3 + D_4' C^2 x_1,$$

adică, prin comparaţie cu formula dela care am plecat,

$$\frac{D_1'}{D'} = \frac{D_4}{D}, \quad C\frac{D_2'}{D'} = \frac{D_2}{D}, \quad C\frac{D_3'}{D'} = \frac{D_3}{D}, \quad C^2\frac{D_4'}{D'} = \frac{D_1}{D}. \tag{46}$$

Inlocuind în (45) şi ţinând seama de (36), rezultă că ecuaţia cuadricei lui Lie în x' la suprafaţa (x'), este

$$C(D_1 D_4 - D_2 D_3) + D_1 (r D_2 + s D_3) = 0. \tag{47}$$

Cele două cuadrice de ecuaţii (44) şi (47), sunt distincte în ipoteza că r şi s nu sunt nuli în acelaşi timp; în acest caz se intersectează după o bicuadratică descompusă în două curbe plane. Aceste curbe se găsesc în planele de ecuaţii

$$D_1 - C D_4 = 0, \qquad r D_2 + s D_3 = 0. \tag{48}$$

Primul plan este planul fix (P) definit la Nr. 7. In adevăr, din (42) scoatem

$$DD_1 = (X, x_2, x_3, x_4), \qquad DD_4 = (x_1, x_2, x_3, X), \tag{49}$$

de unde rezultă că prima ecuaţie din (48) se scrie

$$(X, x_2, x_3, x_4 + C x_1) = (X, x_2, x_3, x_6) = 0.$$

adică (39). Al doilea plan trece prin dreapta $x_1 x_4$. In adevăr, planele $D_2 = 0$ și $D_3 = 0$ nu sunt altele decât planele $x_1 x_2 x_4$ și $x_1 x_3 x_4$. Cum dreapta $x_1 x_4$ trece prin punctul fix x_5, acest al doilea plan va înfășura un con cu vârful în x_5. Dacă $r = 0$, acest plan se reduce la planul $D_3 = 0$.

Avem deci următoarele rezultate: *dacă cuplul de suprafețe* (x), (x′) *este format din suprafețe Țițeica, în puncte corespunzătoare ele au aceeași cuadrică Lie*; *în celelalte cazuri, cuadricele Lie corespunzătoare se taie după două curbe plane dintre care una este într'un plan fix, iar cealaltă într'un plan variabil ce înfășoară un con cu vârful într'un punct fix. Dacă acest plan variabil conține tangentele asimptotice* xx_u, $x'x'_u$, *cuplul de suprafețe* (x), (x′) *este format de suprafețe Mayer. In caz contrar, cuplul este format din suprafețe* (S_2).

§ 3. Studiul centro-afin al suprafețelor (S)

9. Am spus la Nr. 7 că transformarea care aplicată suprafeței (x) dă suprafața (x') este o omologie. Luăm planul fix (P) drept *plan dela infinit* și punctul O drept *origină. Omologia se transformă într'o simetrie față de origine.* Fie $x(x^0 = 1, x^1, x^2, x^3)$ coordonatele cartesiene ale lui x în sistemul de coordonate ales. Ne propunem să determinăm sistemul de ecuații cu derivate parțiale ce definește centro-afin suprafața (S) (cu alte cuvinte sistemul verificat de coordonatele x^1, x^2, x^3). Se știe [4][1]) că acest sistem este de forma

$$\left.\begin{aligned} x_{uu} &= \theta_u x_u + \beta x_v, \\ x_{uv} &= \omega_v x_u + \omega_u x_v + \chi x, \\ x_{vv} &= \gamma x_u + \theta_v x_v, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

unde funcțiile $\beta, \gamma, \chi, \theta, \omega$ satisfac condițiilor de integrabilitate

$$\left.\begin{aligned} \beta_\gamma - \omega_u \omega_v &= \chi - (\ln\chi)_{uv}, \\ \beta_v + \beta(\ln\chi)_v &= \omega_{uu} - \omega_u (\ln\chi)_u, \\ \gamma_u + \gamma(\ln\chi)_u &= \omega_{vv} - \omega_v (\ln\chi)_v. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Menționăm invariantul centro-afin

$$H = 1 + \frac{\omega_u \omega_v - \omega_{uv}}{\chi}, \tag{52}$$

care ne va interesa în cele ce urmează.

Spre deosebire de sistemul (50), sistemul (1) este verificat de coordonatele omogene ale lui x, și deci în cazul nostru

$$p = q = 0. \tag{53}$$

Comparând ecuațiile obținute din (1) făcând aceste înlocuiri cu ecuațiile (50), deducem că funcțiile β, γ și θ, din studiul proiectiv sunt aceleași cu

[1]) p. 11.

cele din studiul centro-afin numai că aci pentru θ va rezulta o valoare bine determinată caracteristică alegerii făcute pentru coordonate. Această valoare este definită prin formulele

$$\theta_u = (\ln\chi)_u + \omega_u, \quad \theta_v = (\ln\chi)_v + \omega_v. \tag{54}$$

Intrebuințând notații analoage pentru coordonatele punctelor x_i, condițiile pe care le-am impus sistemului de coordonate se scriu

$$x_5^i = 0, \quad x_2^0 = x_3^0 = x_6^0 = 0, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{55}$$

Folosind formulele (28), aceste condiții se scriu

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{1}{4}(h-\theta_v)(k-\theta_u) - \frac{1}{2}N\right]x^i + \frac{i}{2}(h-\theta_v)x_u^i + \frac{1}{2}(k-\theta_u)x_v^i + \\ &\qquad + (\omega_v x_u^i + \omega_u x_v^i + \chi x^i) = Cx^i \qquad (i = 1, 2, 3) \\ &r + \frac{1}{2}(k-\theta_u) = 0, \quad s + \frac{1}{2}(h-\theta_v) = 0, \quad \frac{1}{4}(h-\theta_v)(k-\theta_u) - \frac{1}{2}N + C = 0. \end{aligned}\right\} \tag{55'}$$

Primele condiții formează un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute, omogen, care trebue să admită soluții nu toate nule. Scriind toate condițiile ce rezultă, obținem

$$\theta_u = k + 2r, \quad \theta_v = h + 2s, \quad \omega_u = s, \quad \omega_v = r, \quad \chi = 2C. \tag{56}$$

Sistemul (50) ia forma

$$\left.\begin{aligned} x_{uu} &= (k + 2r)x_u + \beta x_v, \\ x_{uv} &= rx_u + sx_v + 2Cx, \\ x_{vv} &= \gamma x_u + (h + 2r)x_v. \end{aligned}\right\} \tag{50'}$$

In baza valorilor (54) și (56) și a tabloului (T), condițiile (51) sunt identic verificate.

Suprafața (x') *este identică centro-afin cu suprafața* (x). In adevăr, prin particularizarea făcută, transformarea ce duce dela suprafața (x) la suprafața (x') este o simetrie în raport cu originea; or, acest lucru se traduce analitic prin ecuațiile: $x_4^i = -x_1^i$ ($i = 1, 2, 3$), ecuații care spun că și coordonatele cartesiene ale punctului x' vor verifica sistemul (50').

10. Dacă din tabloul (T) reținem relația

$$s_u = r_v = rs,$$

vedem că în noile notații vom avea

$$\omega_{uv} - \omega_u \omega_v = 0, \tag{57}$$

de unde rezultă $H = 1$. Reciproc, dacă $H = 1$, se vede din (52) că trebue să avem pe (57), adică suprafețele corespunzătoare sunt suprafețe (S). Deci: *condiția necesară și suficientă pentru ca o suprafață să fie* (S), *este* H = 1. *Suprafețele* (S_2) *sunt caracterizate prin condiția suplimentară* $\omega_u \omega_v \neq 0$.

Sistemul (50') ne pune în evidență o proprietate centro-afină a suprafețelor (S_2) analoagă proprietăților care definesc suprafețele Țițeica și

suprafețele Mayer, cu deosebirea că această proprietate nu mai este caracteristică. Se știe că în general [2][1]) dacă notăm cu K curba metrică a suprafeței și cu d distanța dela origine la planul tangent al suprafeței, atunci avem

$$\frac{K}{d^4} = -\lambda e^{-4\omega}, \tag{58}$$

unde λ este o constantă. Invariantul din prima parte, caracteristic studiului centro-afin al suprafețelor, se mai numește și invariantul lui Țițeica [7][2]). In cazul suprafețelor (S), folosind valorile lui ω_u și ω_v date de (57), avem

$$\omega_u = \omega_v = -\frac{1}{u+v}\,;\ \omega = -\ln\lambda_1 (u+v) \quad (\lambda_1 = \text{const.})$$

încât

$$\frac{K}{d^4} = -\lambda' (u+v)^4 \qquad (\lambda' = \lambda\lambda_1^4 = \text{const.}), \tag{59}$$

expresie care spune că *pe suprafețele* (S_2), *invariantul lui Țițeica este constant de-a-lungul curbelor* $u + v = const.$ [7][3]).

11. Proprietatea ce urmează se referă la ansamblul a două cuadrice: cuadrica lui Lie (L) și cuadrica (Γ) osculatoare suprafeței având centrul în origine, ambele considerate în punctul x. Pentru a scrie ecuațiile acestor două cuadrice, vom folosi coordonate locale $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ definite prin formula

$$\delta X = \delta_1 x + \delta_2 x_u + \delta_3 x_v \qquad [\delta = (x, x_u, x_v)]. \tag{60}$$

Se găsește că ecuațiile celor două cuadrice menționate sunt în general [4][4])

$$2\chi\delta_2\delta_3 + (H-2)(\delta_1 - \delta)^2 - 2(\omega_u \delta_2 + \omega_v \delta_3 + \delta)(\delta_1 - \delta) = 0, \qquad (L)$$

$$2\chi\delta_2\delta_3 - \delta_1^2 + \delta^2 = 0. \qquad (\Gamma)$$

Aceste două cuadrice sunt distincte în ipoteza că suprafața considerată nu este suprafață Țițeica. In adevăr, se știe că în acest caz cuadrica lui Lie are centrul în origine, proprietate caracteristică acestor suprafețe. Lăsându-le de o parte, intersecția celor două cuadrice considerate este compusă din două curbe plane. In adevăr, combinând între ele ecuațiile precedente, deducem

$$(\delta_1 - \delta)[\chi(H-1)(\delta_1 - \delta) - (\omega_u \delta_2 + \omega_v \delta_3)] = 0.$$

Primul factor anulat spune că o parte a intersecției este compusă din cele două tangente asimptotice, lucru ce era de așteptat. A doua parte a intersecției este o conică situată în planul

$$\chi(H-1)(\delta_1 - \delta) - (\omega_u \delta_2 + \omega_v \delta_3) = 0. \tag{61}$$

Acest plan trece prin origine, atunci și numai atunci când $H = 1$. Deci, *condiția necesară și suficientă pentru ca o suprafață să fie* (S) (*excepție supra-*

[1]) p. 249.
[2]) p. 143.
[3]) p. 151.
[4]) p. 16 și 25.

feţele Ţiţeica) este ca cuadrica lui Lie împreună cu cuadrica osculatoare cu centrul în origine să se taie, în afara tangentelor asimptotice, după o conică al cărui plan să înfăşoare un con cu vârful în origine. Dacă acest plan conţine una din tangentele asimptotice, suprafaţa corespunzătoare este suprafaţă Mayer [7] [1]). In caz afirmativ, originea este centrul conicei comune celor două cuadrice.

12. Lăsând de o parte suprafeţele Ţiţeica, să considerăm aceleaşi cuadrice şi pentru suprafaţa (x'). După cum am spus, punctul x' este simetricul lui x faţă de origine. D ci x' va fi privit ca şi x definit prin acelaşi sistem (50'). Privind pe (60), rezultă că vom trece la ecuaţiile cuadricelor considerate schimbând pe δ în $-\delta$ şi lăsând pe δ_1, δ_2, δ_3, neschimbaţi. Aceasta înseamnă că cuadrica (Γ) este aceeaşi pentru suprafeţele (x) şi (x'). In ceea ce priveşte cuadrica lui Lie, ea va avea ecuaţia

$$2\chi\delta_2\delta_3 + (H-2)(\delta_1+\delta)^2 - 2(\omega_u\delta_2 + \omega_v\delta_3 - \delta)(\delta_1+\delta) = 0. \quad (L')$$

Cele două cuadrice Lie considerate au în comun conica dela infinit, precum şi o a doua conică situată în planul

$$\chi(H-1)\delta_1 - (\omega_u\delta_2 + \omega_v\delta_3) = 0, \quad (62)$$

care trece întotdeauna prin origine, dar în general nu trece prin x (şi deci nici prin x'). Pentru ca să se întâmple acest lucru, este necesar să dispară termenul în δ_1, adică suprafaţa să fie (S). Deci, *condiţia necesară şi suficientă pentru ca o suprafaţă să fie* (S) (*excepţie suprafeţele Ţiţeica*) *este ca cuadrica lui Lie a ei şi a simetricei ei faţă de origine, să se taie după o conică care să treacă prin* x (*deci şi prin* x'). In caz afirmativ, conica comună celor două cuadrice este comună şi lui (Γ), şi are centrul în origine.

O altă *condiţie necesară şi suficientă ca suprafaţa considerată să fie* (S), *este ca planele conicelor după care se taie cuadrica osculatoare* (Γ) *cu cuadrica lui Lie în* x, *respectiv în* x', *să fie confundate.* In adevăr, ecuaţia celui de al doilea plan se obţine din (61), schimbând pe δ în $-\delta$.

13. Având în vedere că proprietăţile precedente sunt caracteristice suprafeţelor ce fac obiectul acestei lucrări, suprafeţe care se bucură de proprietatea de a lăsa un plan fix şi un punct fix, elemente care nu se aparţin, să ne mai oprim un moment asupra lor, dându-le o exprimare proiectivă. In acest scop, se aplică cuplului de suprafeţe o omografie. Suntem astfel conduşi la următoarele consideraţii.

Se consideră în spaţiu un plan fix (P) şi un punct fix O, care nu se aparţin. Fie (Σ) o suprafaţă oarecare descrisă de punctul M şi raportată la liniile sale asimptotice. In legătură cu această suprafaţă, construim următoarele elemente:

1. Se uneşte M cu O, dreaptă care taie planul (P) în O', şi apoi se ia conjugatul lui M în raport cu O şi O', care fie M'. Când M descrie suprafaţa (Σ), M' descrie o suprafaţă (Σ') identică proiectiv cu cea iniţială.

2. Se consideră cuadrica lui Lie (L) în M la suprafaţa (Σ) şi cuadrica lui Lie (L') în M' la suprafaţa (Σ').

3. Cuadrica (Γ) osculatoare în M suprafeţei (Σ) şi care are drept pol al planului (P) punctul O, este aceeaşi cu cea analoagă în punctul M', la suprafaţa (Σ').

[1]) p. 155.

4. Cuadricele (Γ) și (L) se taie după două curbe plane dintre care una este compusă din tangentele asimptotice în M la (Σ), iar cealaltă o conică situată într'un plan (Π') ce trece prin M. Analog, cuadricele (Γ) și (L') determină prin intersecția lor un plan (Π') ce trece prin M'.

5. Cuadricel (L) și (L') se taie după două curbe plane dintre care una este situată în planul fix (P), iar cealaltă într'un plan (P') ce trece prin O.

Dacă: a) *planul* (Π) (sau Π') *înfășură un con cu vârful în* O; b) *planele* (Π) și (Π') *se confundă;* c) *planul* (P') *trece prin* M (*și deci prin* M'), *atunci suprafețele* (Σ) *și* (Σ') *sunt suprafețe* (S_2) *și reciproc.* In acest caz, planele (Π), (Π') și (P') se confundă, adică cele trei cuadrice (L), (L') și (Γ) trec printr'o aceeași conică.

Condițiile de mai sus presupun că planele considerate nu sunt nedeterminate și nu conțin o tangentă asimptotică în M (respectiv în M'). Dacă prima circumstanță are loc, cele trei cuadrice sunt confundate și suprafețele (Σ) și (Σ') sunt suprafețe Țițeica. Dacă a doua circumstanță are loc, suprafețele (Σ) și (Σ') sunt suprafețe Mayer.

14. Inainte de a termina acest paragraf, ne propunem să dăm un exemplu particular de suprafețe (S_2)[1]. In acest scop, scriem condițiile (23) ce definesc aceste suprafețe sub o formă mai explicită. Fie

$$\beta = \frac{\lambda}{C}, \quad \gamma = \frac{\mu}{C}; \tag{63}$$

sistemul (50') ia forma [6][2]

$$\left.\begin{aligned} x_{uu} &= \left(\frac{C_u}{C} - \frac{1}{u+v}\right) x_u + \frac{\lambda}{C} x_v, \\ x_{uv} &= -\frac{1}{u+v} x_u - \frac{1}{u+v} x_v + 2Cx, \\ x_{vv} &= \frac{\mu}{C} x_u + \left(\frac{C_v}{C} - \frac{1}{u+v}\right) x_u, \end{aligned}\right\} \tag{50''}$$

unde λ, μ și C vor fi soluții ale sistemului de ecuații cu derivate parțiale

$$\left.\begin{aligned} \lambda_v &= \frac{C_u}{u+v} + \frac{C}{(u+v)^2}, \\ \mu_u &= \frac{C_v}{u+v} + \frac{C}{(u+v)^2}, \\ \lambda_\mu &= \left[\frac{1}{(u+v)^2} - (\ln C)_{uv} + 2C\right] C^2. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Să determinăm soluțiile acestui sistem în ipoteza că C este o constantă. Primele două ecuații dau

$$\lambda = -\frac{C}{u+v} + f(u), \quad \mu = -\frac{C}{u+v} + g(v),$$

[1]) Un alt exemplu a fost dat în [7], p. 152.
[2]) p. 168.

unde f și g sunt funcțiuni numai de u și v respectiv. Inlocuind aceste valori în ultima ecuație, obținem relația

$$-C\frac{f(u)+g(v)}{2C^3-f(u)g(v)}=u+v. \tag{65}$$

Această relație derivată în raport cu u, ne dă

$$[Cf'(u)+f^2(u)]g^2(v)-4C^3f(u)g(v)+2C^4f'(u)=0,$$

de unde rezultă că $g(v)$ este o constantă. Analog, derivând pe (65) în raport cu v, rezultă o relație analoagă care cere ca $f(u)$ să fie o constantă. Scriind relația (65) sub formă întreagă, rezultă că trebue să luăm

$$f(u)+g(v)=0 \quad , \quad 2C^3-f(u)g(v)=0.$$

Forma sistemului (50'') în acest caz particular, ne spune că putem înmulți parametrii pe asimptote cu aceeași constantă în așa fel ca să luăm $C=-2$. Rezultă valorile

$$\lambda=\frac{2}{u+v}-4,\ \mu=\frac{2}{u+v}+4;\ \beta=2-\frac{1}{u+v},\ \gamma=-2-\frac{1}{u+v}. \tag{66}$$

Pentru a integra sistemul, facem schimbarea de coordonate

$$u+v=u' \quad , \quad u-v=v'.$$

Rezultă sistemul

$$\left.\begin{aligned} x_{u'u'}&=-\frac{2}{u}x_{u'}-x_{v'}-2x,\\ x_{u'v'}&=x_{u'},\\ x_{v'v'}&=-x_{v'}+2x. \end{aligned}\right\} \tag{50''_1}$$

Ultima ecuație integrată și valoarea corespunzătoare pentru x introdusă în primele două, dau soluția generală

$$x=\frac{C_1\cos(\sqrt{3}\,u')+C_2\sin(\sqrt{3}\,u')}{u'}e^{v'}+C_3e^{-2v'},$$

unde C_1, C_2, C_3 sunt trei constante arbitrare. Aceasta înseamnă că în studiul centro-afin al suprafețelor în chestiune, putem lua

$$x^1=\frac{\cos\sqrt{3}(u+v)}{u+v}e^{u-v},\quad x^2=\frac{\sin\sqrt{3}(u+v)}{u+v}e^{u-v},\quad x^3=e^{-2(u-v)}. \tag{67}$$

Ecuația cartesiană a acestei suprafețe este

$$z(x^2+y^2)\operatorname{arc\,tg}^2\frac{y}{x}=3. \tag{67'}$$

§ 4. Studiul unor rețele plane

15. Se știe că proiecția punctului curent al unei suprafețe raportată asimptotic, făcută dintr'un punct fix pe un plan fix, descrie o rețea [2][1]). Ne propunem să studiem configurația ce o formează proiecția lui x și x' făcută din origine pe planul dela infinit, împreună cu transformatele ei Laplace față de secțiunea făcută prin acest plan în cuadricele lui Lie corespunzătoare.

Cum dreapta xx' trece prin O, proiecția ambelor puncte x și x' va fi aceeași, proiecție pe care o vom nota tot cu litera x și care va avea drept coordonate trilineare în planul dela infinit, coordonatele cartesiene ale punctului din spațiu. Tot așa, conform celor arătate precedent (Nr. 8), cele două cuadrice Lie în punctele x și x' (dacă sunt distincte sau nu), vor tăia planul dela infinit după o singură conică (C).

In reprezentarea planului dela infinit prin coordonatele cartesiene ale punctului din spațiu, coordonate ce verifică sistemul (50), triunghiul fundamental este format din punctele unde triedrul fundamental înțeapă acest plan. Alegem drept nou triunghiu de referință, triunghiul ale cărui vârfuri să fie punctele x, $x_2 = x_u$, $x_3 = x_v$, și punem

$$X = y_1 x_2 + y_2 x_3 + y_3 x, \tag{68}$$

(y_1, y_2, y_3) fiind coordonatele lui X față de triunghiul xx_2x_3. Ecuația cuadricei lui Lie fiind (L), δ_1, δ_2, δ_3 fiind definite prin (60), intersecția ei cu planul dela infinit și raportată la noile coordonate va fi

$$2\chi y_1 y_2 + (H-2) y_3^2 - 2(\omega_u y_1 + \omega_v y_2) y_3 = 0. \quad (C)$$

Deoarece ecuația rețelei descrise de x este definită prin ecuația

$$x_{uv} = \omega_v x_u + \omega_u x_v + \chi x,$$

cele două transformate Laplace au coordonatele

$$x_1 = x_v - \omega_v x = x_3 - \omega_v x, \quad x_{-1} = x_u - \omega_u x = x_2 - \omega_u x,$$

și deci dreapta care le unește are ecuația

$$\omega_u y_1 + \omega_v y_2 + y_3 = 0. \tag{69}$$

Pe de altă parte, polara lui x față de conica (C) este dreapta

$$(H-2) y_3 - \omega_u y_1 - \omega_v y_2 = 0. \tag{70}$$

Condiția necesară și suficientă pentru ca dreptele (69) și (70) să fie una și aceeași, este $H = 1$. Dacă în plus, punctul x_1 este pe conica (C) $\omega_v = 0$, adică suprafața (x) este suprafață Mayer; iar dacă ambele puncte x_1 și x_{-1} sunt pe conica (C), suprafața este suprafață Țițeica. In concluzie:

Condiția necesară și suficientă pentru ca o suprafață să fie suprafață (S) *este ca dreapta* x_1x_{-1} *să fie polara lui* x *față de conica* (C). *In particular, dacă unul din punctele* x_1 *sau* x_{-1} *sunt pe conica* (C) *suprafața este Mayer, iar dacă sunt amândouă, suprafața este Țițeica.* Această proprietate este dată în introducere sub o formă proiectivă.

[1]) p. 150.

§ 5. Alte proprietăți geometrice ale suprafețelor (S_2)

16. Considerăm o suprafață oarecare având drept tangente asimptotice xx_u și xx_v. Aceste două tangente, când punctul descrie suprafața, dau naștere la două riglate (Σ_u), (Σ_v), cele două riglate asimptotice ale suprafeței date. Dreapta xx_u împreună cu originea determină un plan care trebue să fie tangent suprafeței (Σ_u) într'un punct C_1 pe care O. Mayer îl numește *punct central* al suprafeței (Σ_u) [4][1]). Analog avem un punct central C_2 al suprafeței (Σ_v). Aceste două puncte au coordonatele

$$z_1 = x - \frac{x_v}{\omega_v}, \quad z_2 = x - \frac{x_u}{\omega_v}. \tag{71}$$

In ipoteza $\omega_u \omega_v \neq 0$, aceste două puncte sunt la distanță finită; în caz contrar, unul din ele (sau amândouă) este aruncat la infinit și planele definite de origine și tangenta asimptotică respectivă (sau amândouă) devin plane asimptotice pentru suprafețele riglate considerate. Lăsând de o parte aceste cazuri, adică considerând cazul special al suprafețelor (S_2), ne propunem să dăm o proprietate caracteristică pentru aceste suprafețe cu ajutorul punctelor C_1 și C_2.

Punctul C_1 descrie pe suprafața (Σ_u) o curbă (C_1) a cărei tangentă este definită prin punctul z și prin parametri directori

$$z_{1u} = \frac{\omega_{uv} - \omega_u \omega_v}{\omega_v^2} x_v - \frac{\chi}{\omega_v} x, \tag{72}$$

relație care arată că această tangentă este paralelă cu dreapta Ox în ipoteza că suprafața considerată este (S_2) și numai în acest caz. Dacă această proprietate are loc, atunci are loc și pentru curba (C_2) situată pe suprafața (Σ_v).

Să considerăm acum în ansamblu cuplul (x), (x'). Tangentele la curbele (C_1) și (C_2) situate respectiv în planele $xx'x_2$ și $xx'x_3$ se vor întâlni pe dreapta xx' acolo unde această dreaptă înțeapă planul fix descris de dreapta $x_2 x_3$. Analog pentru suprafața (x'), punctul unde se întâlnesc tangentele corespunzătoare la curbele (C_1') și (C_2') fiind același cu punctul precedent. Proprietatea se poate enunța deci astfel: *se consideră cuplul de suprafețe* (S_2) *descrise de punctele* (x) *și* (x'); *tangentele asimptotice la cele două suprafețe formează un tetraedru* $xx'x_2x_3$. *Muchia* xx' *trece printr'un punct fix* O, $x_2 x_3$ *descrie un plan fix* (P), *iar celelalte patru muchii descriu fiecare câte o suprafață riglată. Fețele tetraedrului sunt două câte două tangente la aceste suprafețe riglate, determinând astfel în afara punctelor* x *și* x', *alte patru puncte de tangență. Aceste patru puncte descriu fiecare pe suprafața riglată corespunzătoare câte o curbă; tangentele la aceste curbe se întâlnesc toate într'un punct, punctul unde dreapta* xx' *înțeapă planul fix* (P).

17. In afara curbei descrise de punctul central, se mai pot defini pe suprafețele (Σ_u) și (Σ_v), din punct de vedere centro-afin, încă două curbe numite *indicatoare centrale.*

Dacă din origine ducem o paralelă la tangenta în punctul C_1 la curba (C_1), această paralelă va tăia pe xx_u într'un punct I_1 ce descrie pe suprafața (Σ_u) o curbă numită de O. Mayer, indicatoare centrală [4][2]). In cazul su-

[1]) p. 23.
[2]) p. 57.

prafețelor (S_2), în baza celor demonstrate mai sus, I_1 se va confunda cu x și curba descrisă de el va fi asimptotica $v = \text{const}$. Această proprietate este caracteristică suprafețelor (S_2). In adevăr, cu ajutorul formulelor (72) se arată că I_1, respectiv I_2, are coordonatele

$$t_1 = x - \frac{\omega_{uv} - \omega_u \omega_v}{\chi\omega_v} x_v, \quad t_2 = x - \frac{\omega_{uv}\omega_u \omega_v}{\chi\omega_u} x_u. \tag{73}$$

Or, din aceste formule se vede că *condiția necesară și suficientă ca cele două puncte să se confunde împreună și împreună cu* x, *este ca suprafața să fie* (S_2). *In acest caz, cele două indicatoare ale riglatelor asimptotice sunt asimptoticele suprafeței.*

Dintre suprafețele (S), singurele ale căror linii flecnodale ale riglatelor asimptotice sunt studiate, sunt suprafețele Țițeica, și anume, se știe că în cazul acestor suprafețe, liniile flecnodale ale riglatelor asimptotice sunt plane și confundate. Este interesant să se întreprindă o cercetare asupra acestor curbe în cazul suprafețelor (S_2). In cercetările noastre viitoare vom atinge și această problemă.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ (II)

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В одном из ранее опубликованных сообщений [6] изучалась пара поверхностей (x) и (x'), соответственно описанных точками x и x', обладающих следующими характерными свойствами:

1) обе поверхности асимптотические преобразованные;

2) x' расположен на квадрике Дарбу индекса c в x на поверхности (x) и (x) также расположен на квадрике Дарбу с тем же индексом в x' на поверхности (x').

В настоящем сообщении рассматриваем в частности случай квадрики Ли ($c=o$) и изучаем специальный случай, где асимптотические касательные xx_n, xx_v соответственно встречаются с асимптотическими касательными $x'x'_n$, $x'x_v'$. Разделим эти поверхности на две категории:

а) пары, при которых поверхности (x) и (x') приложимы;

б) пары, при которых поверхности (x) и (x') не приложимы.

Первое установленное свойство доказывает, что лишь поверхности, принадлежащие ко второй категории, являются поверхностями, изученными Годо [5], поверхности, обладающие свойством иметь в соответствующих точках ту же квадрику Ли. Так как данные поверхности были неоднократно описаны в предыдущих сообщениях, для настоящих изысканий были взяты поверхности первой категории, обозначенные символом (S). Следовательно поверхности (S) являются поверхностями, асимптотические касательные которых встречаются, и которые удовлетворяют условиям 1), 2) и a). В предыдущих работах [6], [7] было доказано, что поверхности (S) делятся на три класса:

I. поверхности *Цицейка* [3] [1];

II. поверхности, впервые изученные О. Майером, которые будем называть поверхностями *Майера* [4] [2];

1) стр. 246—256.
2) стр. 40.

III. новый класс поверхностей, обозначенных (S_2).

В проективной геометрии нелинейчатая поверхность определена системой уравнений с частными производными (1), следовательно функциями β, γ, p, q; функция θ зависит только от фактора пропорциональности координат, следовательно не является характеристической для поверхности. Равным образом функции p, q, которые заменяются функциями L, и M, определенными формулами (4), функции, имеющие преимущество над p и q быть инваринтными и существенными относительно изменения фактора пропорциональности коорадинат и изменения их параметров на неасимптотических. Функции β, γ, L, M, проективно определяющие поверхность (S), удовлетворяют таблице (T). В этой таблице, помимо вышеуказанных функций, имеются также пять вспомогательных функций C, h, k, r, s, инвариантных и существенных. Две последние характеризуют разделение поверхностей (S), согласно предыдущей классификации. Таким образом, если $r=s=o$, то это поверхности *Цицейка*; если только одна из функций r, s нулевая, а другая является отличной от нуля, то тогда эти поверхности *Майера*; если обе функции r, s отличны от нуля, то поверхности будут (S_2).

В проблеме, которую мы собираемся изучить, поверхности (x) и (x') имеют ту же роль. Для того чтобы подчеркнуть этот факт, будем полагать тетраэдром отношения в проективном изучении пары, тетраэдр, установленный точками $x_0=x$, $x^1=x_4$ и x_2, x_3, представляющими точки встречи асимптотических касательных (xx_1, $x'x_1$), (xx_ν, $x'x'_\nu$). Эти четыре вершины определены аналитически формулами (28). Учитывая геометрический характер тетраэдра можно установить, что он инвариантный и существенный. Функции C, h, k, r, s, при помощи которых были определены поверхности (S), дают возможность путем формулы (8) перейти с поверхности (x) к поверхности (x'). Взаимно, те же формулы обеспечивают переход с поверхности (x') к поверхности (x). Этот результат показывает в частности, что поверхности (x) и (x') являются одновременно поверхностями *Цицейка*, *Майера* или (S_2). Помимо этого, устанавливаем, что функции β, γ, L, M, определяющие проективно поверхность (x), являются теми же при поверхности (x'). Это показывает, что поверхности (x) и (x') являются гомографическими преобразованными одна в отношении другой, следовательно проективны идентично. Таблица (I) одновременно определяет поверхность (x').

Первое проективное свойство, которое доказывается с помощью установленных формул, следующее: прямая xx', проходящая через соответствующие точки обеих поверхностей, проходит через неподвижную точку O, в то время как прямая x_2x_3, противоположная ребру тетраэдра отношения, остается в зафиксированной плоскости. Относительная позиция точки O и плоскости (P) характеризуется тем, что, если обозначить через O' точку, где прямая xx' пересекает плоскость (P), тогда точки x, x', O, O' образуют гармоническое деление, следовательно преобразование поверхности (x) в поверхность (x') будет гомологией. Таким образом, все прямые, построенные для поверхности (x), со своими гомологичными к поверхности (x'), будут пересекаться в точках, расположенных в плоскости (P).

Что касается тетраэдра отношения, доказываем, что, для того чтобы перейти с формулы поверхности $(x)\equiv(x_1)$ к формуле соответствующей

поверхности $(x')\equiv(x_4)$, необходимо изменить x_1, x_2, x_3, x_4 в x_4, Cx_2, Cx_3, C^2x_1. Это свойство позволяет удобно записать уравнения двух квадрик Ли с двумя поверхностями, из которых выводится новое свойство, характеризующее деление поверхностей (S) на три класса: если пара поверхностей (x), (x') образована поверхностями *Цицейка*, в соответствующих точках они имеют ту же квадрику Ли, в других случаях соответствующие квадрики Ли пересекаются согласно двум плоским, кривым, одна из которых имеется на фиксированной плоскости (P), а другая находится в переменной плоскости, огибающей конус с вершиной в неподвижной точке O. Если эта переменная плоскость содержит асимптотические касательные xx_u, $x'x_u$, то пара поверхностей (x), (x') образована поверхностями *Майера*. В противном случае, пара образована поверхностями (S_2).

Свойство конфигурации, образованной обеими поверхностями (x) и (x') сохранять неподвижную точку O и фиксированную плоскость (P), не принадлежащие друг другу, выявляет необходимость изучения труда, в котором эти элементы имели бы центральную позицию. Вот почему мы пытались установить центрально-аффинную систему, удовлетворяющую поверхность (x). Эта система есть (50′); та же система проверена картезианскими координатами точки, описывающей поверхность (x'); другими словами, поверхности (x) и (x') являются также идентичными с центрально-аффинной точки зрения. Используя центрально-аффинные инварианты поверхности, установленной *Майером* [4]. доказываем, что поверхности (S) характеризуются с центрально-аффинной точки зрения $H=1$ (52). С помощью центрально-аффинной системы, ищем конфигурацию, образованную двумя поверхностями из квадрики Ли и их касательные квадрики с центром в начале. Полученные результаты в проективном рассуждении следующие.

Рассматриваем в пространстве неподвижную точку O и фиксированную плоскость (P), не принадлежащие друг другу. Пусть (Σ) есть какая-либо поверхность, описанная точкой M и отнесенная к своим асимптотическим линиям. Построим для этой поверхности следующие геометрические элементы.

1) Пусть прямая MO пересекает плоскость (P) в точке O' и пусть M' будет сопряженной M относительно O и O'. Когда точка M описывает поверхность (Σ) точка M' описывает поверхность проективно идентичную начальной поверхности.

2) Пусть (L) и (L') квадрики Ли в M на поверхности (Σ), соответственно в M', на поверхности (Σ).

3) Пусть квадрика (Γ), касательная в M на поверхности (Σ), имеющая точку O как полюс плоскости (P); это та же квадрика, что и квадрика, которую можно построить в M' на поверхности (Σ').

4) Пусть квадрики (Γ) и (L) пересекаются по двум плоским кривым, одна из которых образована асимптотическими касательными в M на (Σ), а другая, являющаяся конической, расположенная в плоскости (Ω), которая проходит через M. Равным образом, квадрики (Γ) и (L') определяют плоскость (Ω'), которая проходит через M'.

5) Пусть квадрики (L) и (L') пересекаются по двум плоским кривым, из которых одна находится в фиксированной плоскости (P), в то время как другая находится в плоскости (P'), проходящей через O.

Если *а*) плоскость (Ω) или (Ω') огибает конус с вершиной в точке O, б) плоскости (Ω) и (Ω') смешиваются, *в*) плоскость (P') проходит через M (и следовательно через M'), тогда поверхности (Σ) и (Σ') суть поверхности (S_2) и взаимно. В этом случае плоскости (Ω), (Ω') и (P'), смешиваются, то есть три квадрики (L), (L') и (I') проходят через ту же коническую. Предыдущие условия предполагают, что рассматриваемые плоскости не являются неустановленными и не содержат асимптотической касательной в M (соответственно в M'). Если первый случай имеет место, то три квадрики смешаны и поверхности (Σ) и (Σ') являются поверхностями *Цицейка*. Во втором случае поверхности (Σ) и (Σ') являются поверхностями *Майера*.

Мы использовали систему (50′), записанную в форме (50″), где функции λ и μ удовлетворяют уравнениям (64), для того чтобы найти частную поверхность (S_2). Мы получили поверхность, представленную параметрически уравнениями (67), или картезиановым уравнением (67′).

Все найденные до сих пор свойства характеризуют пару поверхностей (x) и (x'), но не собственно поверхности. Для того чтобы найти свойства, характеризующие поверхности (S), следуем по другому пути. Известно, что проекция из неподвижной точки, избранной точки O, на фиксированной плоскости, избранной плоскости (P) обычной точки, которую описывает поверхность, приведенная асимптотически, является сетью. Эта сеть вместе с ее преобразованными Лапласа дали нам характеристическое свойство полных поверхностей. Приводим доказательство. Пусть x есть проекция обычной точки. Асимптотические касательные к поверхности в этой точке пересекают плоскость (P) в точках x_2 и x_3, лежащих на отрезке (C), образованном этой плоскостью в квадрике Ли, рассматриваемой в точке поверхности, так как асимптотические касательные сами полностью расположены на этой квадрике. На прямых xx_2 и xx_3 имеются преобразованные Лапласа x_1 и x_{-1} сети x. Для того чтобы поверхность была бы (S), необходимо и достаточно, чтобы прямая x и x_{-1} была полярной точки x относительно конической (C). Та же конфигурация дает подразделение поверхностей (S) на три класса, а именно: если точки x_1 и x_{-1} находятся на конической (C), то есть смешаны с x_2 и x_3, то тогда эта поверхность *Цицейка*; если одна из точек x_1 или x_{-1} находится на конической (C), тогда это поверхность *Майера*; если ни одна из точек x_1 и x_{-1} не находится на конической (C), тогда пространство будет (S_2). Не лишено интереса то, что вся конфигурация, образованная точками x_1, x_2, x_3, x_1, x_{-1} и конической (C), является той же и для поверхности (x').

В заключительной части работы мы дали еще два свойства для поверхности (S_2). Пусть (Σ_u) и (Σ_v) две линейчатые асимптотические поверхности. Плоскости, установленные началом и обеими асимптотическими касательными, являются касательными к этим двум линейчатым каждая в точке, обозначенной соответственно через C_1 и C_2, точки, предполагаемые с конечным расстоянием. При помощи этих двух точек, имеем следующее свойство. Рассматриваем пару поверхностей (S_2), описанных точками x и x'; асимптотические касательные с двумя поверхностями образуют тетраэдр $xx'\,x_2\,x_3$. Ребро xx' проходит через неподвижную точку O, $x_2\,x_3$ и расположено на фиксированной плоскости (P), в то время что каждое из остальных четырех ребер описывает линейчатую поверхность. Части тетраэдра касательные (каждая дважды) к этим ли-

нейчатым поверхностям, в шести точках, среди которых имеются x и x'. Каждая из остальных четырех точек описывает кривую, расположенную на соответсвующей линейчатой поверхности. Касательные к этим кривым пересекаются все в одной точке, являющейся точкой, где прямая xx' пересекает фиксированную плоскость (P).

Далее, получаем другое свойство. В своем труде о центрально-аффинной геометрии пространств [4], Майер ввел следующее понятие. Если от начала провести параллель к касательной в точке C_1 (определенной выше) к кривой (C_1), эта параллель пересекает асимптотическую касательную xx_u в точке I_1, которая описывает на поверхности (Σ_u) кривую, названную Майером центральной индикатрисой. Для того чтобы точка I_1 и ее аналог, расположенный на поверхности (Σ_v), смешивались между собой и с обычной точкой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы поверхность была (S_2). В этом случае обе индикатрисы асимптотических линейчатых являются именно асимптотическими поверхностями.

SUR UNE CLASSE DE SURFACES (II)

(RÉSUMÉ)

Dans un article publié récemment [6], l'Auteur s'est proposé d'étudier un couple de surfaces (x), (x'), décrites respectivement par les points x et x', qui jouissent des propriétés caractéristiques suivantes:

1) que les deux surfaces soient des transformées asymptotiques;

2) que x' soit situé sur la quadrique de Darboux, d'indice c en x à la surface (x'), et de même que x soit situé sur la quadrique de Darboux, de même indice en x' à la surface (x').

Dans cet article on considère en particulier le cas de la quadrique de Lie $(c = 0)$ et l'on se propose d'étudier le cas spécial où les tangentes asymptotiques xx_u, xx_v se rencontrent respectivement avec les tangentes asymptotiques $x'x'_u$, $x'x'_v$. Partageons ces surfaces en deux catégories comme suit:

a) des couples pour lesquels les surfaces (x) et (x') sont applicables;

b) des couples pour lesquels les surfaces (x) et (x') ne sont pas applicables.

La première propriété qui est établie, démontre que les seules surfaces qui appartiennent à la deuxième catégorie, sont les surfaces étudiées par Godeaux [5], surfaces qui ont la propriété d'avoir dans des points correspondants, la même quadrique de Lie. Comme ces surfaces ont été le but de plusieurs mémoires antérieurs, l'Auteur a choisi pour ses recherches les surfaces de la première catégorie qu'il désigne par la lettre (S). Donc, les surfaces (S) sont des surfaces pour lesquelles les tangentes asymptotiques se rencontrent et qui ont les propriétés 1), 2) et *a*). Dans des travaux antérieurs [6] et [7], il a démontré que les surfaces (S) se divisent en trois classes:

I) les surfaces Tzitzéica [3][1])

II) les surfaces considérées pour la première fois par O. Mayer qu'on désigne du nom de surfaces Mayer [4][2])

III) une nouvelle classe de surfaces qu'on désigne par (S_2).

[1]) p. 240—256

[2]) p. 40.

Dans la géométrie projective, une surface non réglée est définie par le système d'équations aux dérivées partielles (1), c'est-à-dire par les fonctions β, γ, p, q; la fonction θ dépend seulement du facteur de proportionnalité des coordonnées, elle n'est donc pas caractéristique pour la surface. De même, les fonctions p et q sont remplacées par les fonctions L et M définies par les formules (4), fonctions qui ont sur p et q l'avantage d'être invariantes et intrinsèques, par rapport à un changement du facteur de proportionnalité des coordonnées et à un changement des paramètres sur les asymptotiques. Les fonctions β, γ, L, M qui définissent les surfaces (S), satisfont au tableau (T). Dans ce tableau, outre les fonctions mentionnés, il y a cinq fonctions auxiliaires C, h, k, r, s, invariantes et intrinsèques. Les deux dernières caractérisent la division des surfaces (S) d'après la classification faite antérieurement. Ainsi, si $r = s = 0$, les surfaces sont Tzitzéica; si seulement une des fonctions r, s est nulle, l'autre étant différente de zéro, les surfaces sont Mayer; si les deux fonctions r, s sont différentes de zéro, les surfaces sont (S_2).

Dans le problème qu'on se propose d'étudier, les surfaces (x) et (x') ont le même rôle. Pour mettre en évidence ce fait, on a pris pour tétraèdre de référence dans l'étude projective du couple, le tétraèdre déterminé par les points $x' = x_1$, $x' = x_4$ et x_2, x_3 qui représentent les points de rencontre des tangentes asymptotiques $(xx_u, x'x'_u)$, $(xx_v, x'x'_v)$. Ces quatre sommets sont définis analytiquement par les formules (28). En tenant compte de la caractérisation géométrique du tétraèdre, il en résulte qu'il est invariant et intrinsèque. Les fonctions C, h, k, r, s, à l'aide desquelles l'Auteur a défini les surfaces (S), donnent par la formule (8), la possibilité de passer de la surface (x) à la surface (x'). Réciproquement, les mêmes formules assurent le passage de la surface (x') à la surface (x). Ce résultat montre en particulier que les surfaces (x) et (x') sont en même temps des surfaces Tzitzéica, Mayer ou (S_2). De plus, on constate que les fonctions β, γ, L, M qui définissent projectivement la surface (x) sont les mêmes pour la surface (x'). Ce fait indique que les surfaces (x) et (x') sont transformées homographiques l'une de l'autre, c'est-à-dire sont identiquement projectives. Le tableau (T) définit en même temps la surface (x').

Une première propriété projective, qui est prouvée à l'aide des formules établies, est la suivante: la droite xx', qui passe par les points correspondants des deux surfaces, passe par un point fixe O, pendant que la droite $x_2\, x_3$ qui est l'arrête opposée du tétraèdre de référence, reste dans un plan fixe. La position relative du point O et du plan (P) est caractérisée par le fait que si l'on désigne par O' le point où la droite xx' coupe le plan (P), alors les points x, x', O, O' forment une division harmonique; c'est-à-dire la transformation de la surface (x) à la surface (x') est une homologie. En tenant compte des propriétés de cette transformation, toutes les droites construites pour la surface (x), avec ses homologues pour la surface (x') se couperont dans des points situés dans le plan (P).

Quant au tétraèdre de référence, on prouve que pour passser d'une formule de la surface $(x) \equiv (x_1)$ à la formule correspondante de la surface $(x') \equiv (x_4)$ il faudra changer x_1, x_2, x_3, x_4 en x_4 Cx_2, Cx_3, C^2x_1. Cette propriété permet d'écrire aisément les équations des deux quadriques de Lie aux deux surfaces, desquelles on déduit une nouvelle propriété qui caractérise la division des surfaces (S) dans les trois classes: si le couple des

surfaces (x), (x') est formé par des surfaces Tzitzéica dans des points correspondants, elles ont la même quadrique de Lie; dans les autres cas, les quadriques de Lie correspondantes se coupent d'après deux courbes planes, dont l'une se trouve dans le plan fixe (P), l'autre étant dans un plan variable qui enveloppe un cône avec le sommet dans le point fixe O. Si ce plan variable contient les tangentes asymptotiques xx_u, $x'x'_u$ le couple des surfaces (x), (x') est formé par des surfaces Mayer. Dans le cas contraire, le couple est formé par des surfaces (S_2)

La propriété de la configuration formée par les deux surfaces (x) et (x') de garder un point fixe O et un plan fixe (P) qui ne s'appartiennent pas, nous montre la nécessité d'une étude dans laquelle ces éléments aient une importance centrale. C'est pourquoi l'Auteur s'est occupé d'établir le système, centro-affin qui est vérifié par la surface (x). Ce système est (50'); le même système est verifié par les coordonnées cartésiennes du point qui décrit la surface (x'); en d'autres mots, les surfaces (x) et (x') sont, de même, identiques du point de vue centro-affin En utilisant les invariants centro-affins d'une surface, établis par O. Mayer [4], on prouve que les surfaces (S) sont caractérisées du point de vue centro-affin, par $H = 1$ (52). A l'aide du système centro-affin, on a entrepris une recherche de la configuration formée par les deux surfaces, leurs quadriques de Lie et leurs quadriques osculatrices ayant le centre dans l'origine. Les résultats obtenus, dans un langage projectif, sont les suivants:

On considère dans l'espace un point fixe O et un plan fixe (P), qui ne s'appartiennent pas. Soit (Σ) une surface quelconque décrite par le point M et rapportée à ses lignes asymptotiques. On construira pour cette surface, les éléments géométriques suivants:

1) La droite MO coupe le plan (P) dans le point O' et soit M' le conjugué de M par rapport à O et O'. Quand le point M décrit la surface (Σ) le point M' décrit une surface (Σ') projectivement identique à la surface initiale.

2) Soient (L) et (L') les quadriques de Lie en M à la surface (Σ), respectivement en M' à la surface (Σ').

3) La quadrique (Γ) osculatrice en M à la surface (Σ) qui a le point O comme pôle du plan (P); cette quadrique est la même que celle qu'on peut construire en M' pour la surface (Σ').

4) Les quadriques (Γ) et (L) se coupent suivant deux courbes planes dont l'une est formée par les tangentes asymptotiques en M à (Σ), l'autre étant une conique située dans un plan (π) qui passe par M. De même, les quadriques (Γ) et (L') déterminent un plan (π') qui passe par M'.

5) Les quadriques (L) et (L') se coupent suivant deux courbes planes parmi lesquelles une se trouve dans le plan fixe (P) tandis que l'autre se trouve dans un plan (P') qui passe par O.

Si: *a)* le plan (π) (ou π') enveloppe un cône avec le sommet dans le point O; *b)* les plans (π) et (π') se confondent; *c)* le plan (P') passe par M (et donc par M') alors, les surfaces (Σ) et (Σ') sont des surfaces (S_2) et réciproquement. Dans ce cas, les plans (π), (π') et (P') se confondent, c'est-à-dire les trois quadriques (L), (L') et (Γ) passent par une même conique. Les conditions précédentes supposent que les plans considérés ne sont pas indéterminés et ne contiennent pas une tangente asymptotique en M (respectivement en M'). Si le permier cas a lieu, les trois quadriques sont confondues

et les surfaces (Σ) et (Σ') sont des surfaces Tzitzéica. Dans le deuxième cas, les surfaces (Σ) et (Σ') sont des surfaces Mayer.

L'Auteur a utilisé le système (50'), écrit sous la forme (50''), où les fonctions λ et μ satisfont aux équations (64), pour trouver une surface (S_2) particulière. On a obtenu les surfaces représentées paramétriquement par les équations (67), ou par l'équation cartésienne (67').

Toutes les propriétés trouvées jusqu'ici, caractérisent le couple des surfaces (x) et (x') mais non les surfaces elles-mêmes. Pour trouver des propriétés caractérisant les surfaces (S), on suit une autre voie. On sait que la projection faite d'un point fixe, qu'on a choisi en O, sur un plan fixe choisi, le plan (P), du point courant qui décrit une surface rapportée à ses asymptotiques, est un réseau. Ce réseau, avec ses transformées Laplace, a donné une propriété caractéristique de ces surfaces. Voilà comment on a abouti à cette propriété. Soit x la projection du point courant. Les tangentes asymptotiques à la surface dans ce point, coupent le plan (P) dans les points x_2 et x_3, qui sont sur la section (C) faite par ce plan dans la quadrique de Lie considérée dans le point de la surface, parceque les tangentes asymptotiques sont elles mêmes entièrement situées sur cette quadrique. Sur les droites xx_2 et xx_3 se trouvent les transformées de Laplace x_1 et x_{-1} du réseau x. La condition nécessaire et suffisante pour que la surface soit (S), est que la droite $x_1 x_{-1}$ soit la polaire du point x par rapport à la conique (C). La même configuration donne la sousdivision des surfaces (S) dans les trois classes, à savoir: si les points x_1 et x_{-1} se trouvent sur la conique (C) (c'est-à-dire sont confondus avec x_2 et x_3) la surface est Tzitzéica: si un des points x_1 ou x_{-1} se trouve sur la conique (C), la surface est Mayer; si aucun des points x_1 et x_{-1} ne se trouve sur la conique (C), la surface est (S_2). Il n'est pas dépourvu d'intérêt d'observer que toute la configuration formée par les points x, x_2, x_3, x_1, x_{-1} et la conique (C) est la même pour la surface (x') aussi.

Dans la dernière partie, l'Auteur a donné encore deux propriétés pour les surfaces (S_2). Soit (Σ_u) et (Σ_v) les deux réglées asymptotiques de la surface. Les plans déterminés par l'origine et les deux tangentes asymptotiques sont tangents à ces deux réglées, chacun en un point qu'on désigne respectivement par C_1 et C_2, points supposés à distance finie. A l'aide de ces points, on a la propriété suivante. On considère le couple des surfaces (S_2), décrites par les points x et x'; les tangentes asymptotiques aux deux surfaces, par les points x et x'; les tangentes asymptotiques aux deux surfaces, forment un tétraèdre $xx'\,x_2\,x_3$. L'arrête xx' passe par un point fixe O, $x_2\,x_3$ est située dans un plan fixe (P), pendant que les quatre autres arrêtes décrivent chacune une surface réglée. Les faces du tétraèdre sont tangentes (chacune deux fois) à ces surfaces réglées, en six points parmi lesquels x et x'. Les quatre autres points décrivent chacun une courbe située sur la surface réglée correspondante. Les tangentes à ces courbes concourent toutes dans un point, qui est le point où la droite xx' coupe le plan fixe (P).

Une autre propriété s'obtient comme suit. O. Mayer dans son mémoire sur la géométrie centro-affine des surfaces [4] a introduit la notion suivante. Si de l'origine on mène une parallèle à la tangente au point C_1 (défini plus haut) à la courbe (C_1), cette parallèle coupe la tangente asymptotique xx_u en un point I_1, qui décrit sur la surface (Σ_u) une courbe nommée par O. Mayer, indicatrice centrale. La condition nécessaire et suffisante,

pour que le point I_1 et son analogue situé sur la surface (Σ_φ), se confondent entre eux et avec le point courant de la surface, est que la surface soit (S_2). Dans ce cas les deux indicatrices des réglées asymptotiques sont les asymptotiques des surfaces elles-mêmes.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Fubini ed E. Cech, *Geometria proiettiva differenziale*, Bologna, 1926, v.I.
2. — *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces.* Paris. 1931.
3. Gh. Țițeica, *Géométrie différentielle projective des réseaux.* București, 1923.
4. O. Mayer, *Géométrie centro-affine différentielle des surfaces.* Analele științifice ale Universității din Iași, 1935, v.XXI, p. 1.
5. L. Godeaux, *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie.* Bull. Acad. de Belgiques, seria V, v. XIV, p. 158—173, 173—187.
6. Gh. Th. Gheorghiu, *Sur certaines transformations asymptotiques.* Disquisitiones Mathematicae et Physicae, București 1945, v.IV, p. 131—173, Bull. Sci. Math., Ianuarie-Februarie 1945, 2e série, t. LXIV.
7. — *Sur un couple des surfaces* (I). Bull. de Sci. et Techn. de la Polytechnique de Timișoara, 1948, v.XIII p. 141—155.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul III, Nr. 3—4, 1952

CONSIDERAŢII PRIVIND SPAŢIILE CU CONEXIUNE PROIECTIVĂ P_2

DE

ŞT. PETRESCU

INTRODUCERE

1°. Lucrarea de faţă are drept scop clasificarea spaţiilor cu conexiune proiectivă cu două dimensiuni P_2, cu torsiune, însă fără curbură, după grupurile maxime de transformări proiective de congruenţe (3), pe care ele le pot admite, prin metoda Vrănceanu, utilizată de noi în cazul spaţiilor cu conexiune afină A_2 [1][1]). Vom da astfel forma canonică corespunzătoare a conexiunii spaţiului, ca şi grupul lui maxim de automorfisme.

Presupunând torsiunea afină a spaţiului diferită de zero, i se poate ataşa, ca şi pentru un A_2, o formă Pfaff invariantă $d\sigma$, ce poate fi sau nu o diferenţială totală exactă.

In primul caz, luând în discuţie relaţiile în termeni finiţi ale problemei, se arată că grupul proiectiv de transformări de congruenţe al spaţiului P_2, se reduce la grupul identitate, afară de cazul când sunt îndeplinite condiţiile (20) şi când el este de forma (19), cu două funcţii oarecare de variabilele x^1, x^2. Grupul maxim de automorfisme al unui spaţiu P_2 cu grup (19), depinde de 4 parametri, acest maxim fiind efectiv atins.

Când forma invariantă $d\sigma$ nu este o diferenţială totală exactă, grupul maxim de transformări de congruenţe al spaţiului este grupul identitate.

Concluzia ce se desprinde atunci este următoarea: spaţiile P_2 cu torsiune, însă fără curbură, se împart în două categorii. Una formată de spaţiile P_2 cu grup proiectiv de transformări de congruenţe (19) şi grup maxim de automorfisme depinzând de 4 parametri. Ele se caracterizează prin aceea că admit formele Pfaff ds^1, ds^0 ca forme invariante diferenţiale totale exacte şi forma canonică (36) în care μ este constant.

A doua, constituită de spaţiile P_2 cu grup $d\bar{s}^\alpha = ds^\alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2$) şi care posedă, dacă coeficienţii w^α_{bc}, γ^α_{bc} ($b, c = 1, 2$) sunt constanţi, un grup maxim de automorfisme cu 2 parametri.

In partea a doua a lucrării, se consideră spaţiile P_2 fără curbură şi fără torsiune afină, dar având torsiunea proiectivă diferită de zero. Aplicând normalizarea lui Thomas [2][2]), se arată că ele pot să aibă un grup (3) maximum cu 3 funcţii oarecare de variabilele x^1, x^2, de forma (58), grupul

[1]) p. 1—42.
[2]) p. 377-

maxim de automorfisme al spaţiului fiind, în acest caz, cu 5 parametri. Dintr'un exemplu dat de G. Vrănceanu [2][1]), se constată că el este efectiv atins.

Dacă anumite condiţii sunt îndeplinite, un astfel de spaţiu poate avea un grup (3) ortogonal în ds^1, ds^2, deci cu o singură funcţie arbitrară de x^1, x^2 şi când i se poate ataşa o conexiune metrică invariantă, ori de forma (62), ori (64), ultimul caz nefiind însă posibil.

Aşa dar, când torsiunea afină este nulă, în acelaşi timp cu curbura proiectivă, spaţiul P_2 nu admite un grup (3) depinzând de două funcţii arbitrare.

Pentru cazul (62), forma canonică a conexiunii spaţiului este (75'), iar grupul maxim de automorfisme corespunzător, depinde de 3 parametri.

I

1. Se ştie că, fiind dat un spaţiu cu conexiune proiectivă P_2, raportat la un sistem de $n+1$ congruenţe de curbe independente (λ), ale căror diferenţiale ale arcelor sunt date de formele Pfaff

$$ds^a = \lambda_i^a\, dx^i\,, \quad ds^0 = dx^0 + \lambda_i^0\, dx^i\,, \quad (i, j, \ldots = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

cu λ_i^a, λ_i^0 funcţii de $x^1, \ldots, x^n$, conexiunea proiectivă a spaţiului are, pe aceste congruenţe, componentele γ_{bc}^a, γ_{bc}^0 $(a, b, c, \ldots = 1, \ldots, n)$ definite prin relaţiile [2][2]).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} &= \gamma_{bc}^a\, \lambda_i^b\, \lambda_j^c - \lambda_i^a\, \lambda_j^0 - \lambda_j^a\, \lambda_i^0 - \Gamma_{ij}^r\, \lambda_r^a\,, \\ \frac{\partial \lambda_i^0}{\partial x^j} &= \gamma_{bc}^0\, \lambda_i^b\, \lambda_j^c - \lambda_i^0\, \lambda_j^0 - \Gamma_{ij}^0 - \Gamma_{ij}^r \lambda_r^0\,, \end{aligned} \tag{2}$$

Γ_{ij}^r, Γ_{ij}^0 fiind componentele conexiunii în variabilele $x^1, \ldots x^n$.

Făcând o transformare de congruenţe de forma

$$d\bar{s}^a = c_b^a\, ds^b, \quad d\bar{s}^0 = ds^0 + c_b^0\, ds^b \tag{3}$$

n care c_b^a, c_b^0 s unt funcţii de $x^1, \ldots, x^n$, iar $|\, c_b^a\,| \neq 0$, avem

$$d\bar{s}^a = \bar{\lambda}_i^a\, dx^i, \quad d\bar{s}^0 = dx^0 + \bar{\lambda}_i^0\, dx^i \tag{4}$$

prin faptul că ea păstrează forma lui ds^a şi ds^0, deci

$$\bar{\lambda}_i^a = c_b^a\, \lambda_i^b\,, \quad \bar{\lambda}_i^0 = \lambda_i^0 + c_b^a\, \lambda_i^b\,. \tag{4'}$$

Transformările (3) constitue ceea ce se cheamă *grupul proiectiv de transformări de congruenţe* al spaţiului P_2. Faţă de acest grup, componentele conexiunii proiective se transformă după formulele [2][3]),

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} &= \bar{\gamma}_{ef}^a\, c_b^e\, c_c^f - c_b^a\, c_c^0 - c_c^a\, c_b^0 - \gamma_{bc}^e\, c_e^a\,, \\ \frac{\partial c_b^0}{\partial s^c} &= \bar{\gamma}_{ef}^0\, c_b^e\, c_c^f - c_b^0\, c_c^0 - \gamma_{bc}^0 - \gamma_{bc}^e\, c_e^a\,, \end{aligned} \tag{5}$$

[1]) p. 390.
[2]) p. 380.
[3]) p. 381.

care dau legea de transformare a conexiunii proiective în calculul diferențial absolut de congruențe.

2. Presupunând că spațiul P_n este cu torsiune și notând cu t^a_{bc}, t^0_{bc} ($t^a_{0c} = t^0_{0c} = 0$ componentele tensorului de torsiune al conexiunii Υ^a_{bc}, Υ^0_{bc}, avem

$$t^\alpha_{bc} = \Upsilon^\alpha_{bc} - \Upsilon^\alpha_{cb} - w^\alpha_{bc}, \tag{6}$$

w^a_{bc} și w^0_{bc} fiind coeficienții covarianților bilineari ai formelor (1).

Ținând seama că c^a_b c^0_b nu depind de variabila x^0, formulele fundamentale ale grupului (3) se scriu [2] [1])

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^a_b}{\partial s^c} - \frac{\partial c^a_c}{\partial s^b} &= \bar{w}^a_{ef}\, c^e_b\, c^f_c - w^e_{bc}\, c^a_e, \\ \frac{\partial c^0_b}{\partial s^c} - \frac{\partial c^0_c}{\partial s} &= \bar{w}^0_{ef}\, c^e_b\, c^f_c - w^e_{bc}\, c^0_e. \end{aligned} \tag{5'}$$

Componentele t^a_{bc}, t^0_{bc} se transformă, în raport cu grupul (3), după formulele

$$\begin{aligned} \bar{t}^a_{ef}\, c^e_b\, c^f_c &= t^e_{bc}\, c^a_e, \\ \bar{t}^0_{ef}\, c^e_b\, c^f_c &= t^0_{bc} + t^e_{bc}\, c^a_e \end{aligned} \tag{7}$$

și se vede că t^0_{bc} nu constitue componentele unui tensor, decât dacă $t^a_{bc} = 0$, adică dacă conexiunea afină a spațiului P_2 este simetrică.

Când tensorul de torsiune proiectivă nu este nul, atunci se pot asocia lui P_2, $n+1$ forme pătratice alternate, în n variabile

$$\varphi^\alpha = t^\alpha_{bc}\, ds^b\, \delta s^c, \tag{8(}$$

transformându-se prin grupul (3), după legea

$$\bar{\varphi}^a = c^a_b\, \varphi^b, \quad \bar{\varphi}^0 = \varphi^0 + c^0_b\, \varphi^b \tag{8'}$$

și ele pot servi, reducându-le la anumite forme canonice, la a micșora numărul $n(n+1)$ de funcții arbitrare c^α_b, ce intervin în (3), deci la a reduce acest grup la un subgrup al său.

3. Acestea fiind spuse, să considerăm cazul $n = 2$, deci al unui *spațiu P_2 cu torsiune, dar având curbura proiectivă nulă*. Tensorul său de torsiune are, dat fiind că $t^\alpha_{bc} = -t^\alpha_{cb}$ ($\alpha = 0, 1, 2$), componentele distincte

$$t^1_{12},\ t^2_{12},\ t^0_{12}. \tag{9}$$

Să presupunem că vectorul de torsiune afină

$$t_c = t^a_{ac},\ (a,c = 1,2) \tag{10}$$

nu este nul. Atunci îi putem atașa spațiului nostru, forma Pfaff invariantă

$$d\sigma = t_c\, ds^c, \tag{10'}$$

[1]) p. 381.

care, printr'o transformare (3) convenabilă, poate fi redusă la forma canonică

$$d\sigma = ds^1, \tag{10''}$$

deci reduce vectorul de torsiune afină t_c, la a avea componentele

$$t_1 = t^2_{21} = 1, \; t_2 = t^1_{12} = 0. \tag{11}$$

Luând pe $d\sigma$ drept formă ds^1 în grupul (3) aceasta revine la a spune că

$$c^1_1 = 1, \; c^1_2 = 0. \tag{11'}$$

Pe de altă parte, ţinând seama de (11) şi (11'), ultima din (7) ne dă, pentru $b = 1$, $c = 2$, relaţia în termeni finiţi

$$\bar{t}^0_{12} c^2_2 = t^0_{12} - c^0_2. \tag{12}$$

Luând pe $c^0_2 = t^0_{12}$, rezultă că $\bar{t}^0_{12} = 0$ şi această valoare se menţine nulă, împreună cu (11), numai faţă de grupul

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= ds^1, \\ d\bar{s}^2 &= \alpha\, ds^1 + \beta\, ds^2, \\ d\bar{s}^0 &= ds^0 + \gamma\, ds^1, \end{aligned} \tag{13}$$

cu α, β, γ funcţii oarecare de variabilele x^1, x^2, β neputând fi nul.

Aşa dar:

Dacă vectorul de torsiune afină al spaţiului P_2 *este diferit de zero, se poate ataşa spaţiului o formă Pfaff invariantă, iar grupul său proiectiv de transformări de congruenţe are forma* (13).

4. Comparând (13) cu (3) deducem că

$$c^1_1 = 1, \quad c^1_2 = c^0_2 = 0.$$

Primele formule (5') şi formulele (5) de transformare ale conexiunii proiective ne dau atunci, pentru $a = b = 1$, $c = 2$; $a = 1, b = c = 1, 2$ şi $b = 2$, $c = 1, 2$, relaţiile în termeni finiţi

$$\bar{w}^1_{12}\, \beta = w^1_{12}, \tag{14}$$

$$\bar{\Gamma}^1_{ef}\, c^e_b\, c^f_e - c^1_b\, c^0_c - c^1_c\, c^0_b = \Gamma^1_{bc},$$

$$\bar{\Gamma}^0_{ef}\, c^e_2\, c^f_c - \Gamma^0_{2c} = \Gamma^1_{2c}\, c^0_1. \tag{15}$$

Prima ne arată că trebue să deosebim două cazuri, după cum forma ds^1 este o diferenţială totală exactă ($w^1_{12} = 0$), sau nu ($w^1_{12} \neq 0$).

I. *Cazul* $w^1_{12} = 0$. Prin faptul că $t^1_{12} = 0$, avem şi $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21}$, iar relaţiile (15) se scriu explicit, cele dintâi

$$\begin{aligned} &\bar{\Gamma}^1_{11} + 2\bar{\Gamma}^1_{12}\,\alpha + \bar{\Gamma}^1_{22}\,\alpha^2 - 2\gamma = \Gamma^1_{11}, \\ &(\bar{\Gamma}^1_{12} + \bar{\Gamma}^1_{22}\,\alpha)\,\beta = \Gamma^1_{12}, \\ &\bar{\Gamma}^1_{22}\,\beta^2 = \Gamma^1_{22}, \end{aligned} \tag{16}$$

iar cele de al doilea

$$\begin{aligned} &\bar{\gamma}^0_{21}\beta + \bar{\gamma}^0_{22}\alpha\beta - \gamma^0_{21} = \gamma^1_{21}\gamma, \\ &\bar{\gamma}^0_{22}\beta^2 - \gamma^0_{22} = \gamma^1_{22}\gamma. \end{aligned} \tag{16'}$$

Ultima din (16) ne arată că atunci când $\gamma^1_{22} \neq 0$; putem să-l reducem pe $\bar{\gamma}^1_{22}$ la unitate, cu ajutorul lui β și menținând valoarea $\gamma^1_{22} = 1$, va trebui ca $\beta = 1$. Odată făcut acest lucru, ne putem servi de α, ca să anulăm coeficientul γ^1_{12}, deci să ajungem la situația

$$\gamma^1_{12} = \gamma^1_{21} = 0 \quad , \quad \alpha = 0.$$

Ulterior, coeficientul γ^1_{11} poate fi totdeauna anulat, din primă relație (16), utilizându-l pe γ și păstrând valoarea $\gamma^1_{11} = 0$, grupul spațiului nostru se reduce la grupul identitate.

Dacă $\gamma^1_{22} = 0$, a doua relație (16) arată că putem avea, când $\gamma^1_{12} \neq 0$,

$$\gamma^1_{12} = \gamma^1_{21} = 1 \quad , \quad \beta = 1$$

iar prima devine

$$\bar{\gamma}^1_{11} + 2\alpha - 2\gamma = \gamma^1_{11}.$$

Luând pentru γ valoarea particulară $\gamma = \alpha - \frac{1}{2}\gamma^1_{11}$, $\bar{\gamma}^1_{11}$ devine nul și valoarea $\gamma^1_{11} = 0$ se menține numai dacă $\alpha = \gamma$.

Așa fiind, din (16') obținem

$$\bar{\gamma}^0_{21} + \bar{\gamma}^0_{22}\alpha - \alpha = \gamma^0_{21}$$

și se vede că, dacă invariantul $\gamma^0_{22} \neq 1$, anulându-l pe $\bar{\gamma}^0_{21}$ și păstrându-l astfel mai departe, vom avea $\alpha = 0$ $(= \gamma)$, deci recădem peste grupul identitate. Nu același lucru se petrece și când $\gamma^0_{22} = 1$, $\bar{\gamma}^0_{21} = \gamma^0_{21}$, deoarece α nu mai poate fi determinat prin relația precedentă.

Dar, dat fiind că $\beta = 1$ $(= c^2_2)$, primele relații (5) ne dau, făcând $a = b = 2$, $c = 1, 2$

$$\bar{\gamma}^2_{21} + \bar{\gamma}^2_{22}\alpha - \gamma - \gamma^1_{21}\alpha = \gamma^2_{21} \quad , \quad \bar{\gamma}^2_{22} = \gamma^2_{22}$$

așa încât se poate ajunge la grupul identitate, afară de cazul când avem

$$\gamma^2_{22} = 2 \quad , \quad \bar{\gamma}^2_{21} = \gamma^2_{21}$$

și când grupul spațiului P_2 capătă forma

$$d\bar{s}^1 = ds^1 \quad , \quad d\bar{s}^2 = \alpha\, ds^1 + ds^2 \quad , \quad d\bar{s}^0 = ds^0 + \alpha\, ds^1 \tag{17}$$

$\alpha\,(x^1, x^2)$ fiind oarecare.

Este însă de observat că, dacă $\bar{I} = I$ este un invariant absolut, prin transformările grupului (17) avem

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{s}^1} + \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{s}^2}\alpha = \frac{\partial I}{\partial s^1},$$

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{s}^2} = \frac{\partial I}{\partial s^2},$$

aşa încât, pentru ca α să nu poată fi determinat, este necesar ca şi $\frac{\partial I}{\partial s^2} = 0$. Deci, pentru grupul precedent, va trebui să adăugăm, dacă vrem ca el să depindă de α, condiţiile $\frac{\partial \gamma_{21}^0}{\partial s^2} = \frac{\partial \gamma_{21}^2}{\partial s^2} = 0$.

Vom reveni mai departe asupra acestui grup.

5. Să presupunem acum că $\gamma_{22}^1 = \gamma_{12}^1 = 0$. Atunci avem şi $\gamma_{21}^1 = 0$. Ultima din (16′) se scrie

$$\bar{\gamma}_{22}^0 \beta^2 = \gamma_{22}^0 \tag{17′}$$

şi se vede că. dacă $\gamma_{22}^0 \neq 0$, putem avea

$$\gamma_{22}^0 = 1 \quad , \quad \beta = 1.$$

Celelalte relaţii (16), (16′) devin atunci

$$\bar{\gamma}_{11}^1 - 2\gamma = \gamma_{11}^1 \quad , \quad \bar{\gamma}_{21}^0 + \alpha = \gamma_{21}^0$$

şi ne permit să anulăm întotdeauna pe γ_{11}^1, γ_{21}^0, adică să ne reducem la grupul identitate.

Când $\gamma_{22}^0 = 0$, însă $\gamma_{21}^0 \neq 0$, relaţia

$$\bar{\gamma}_{21}^0 \beta = \gamma_{21}^0, \tag{18}$$

ne conduce la situaţia

$$\gamma_{21}^0 = 1 \quad , \quad \beta = 1$$

în virtutea căreia, prima din (16) scriindu-se

$$\bar{\gamma}_{11}^1 - 2\gamma = \gamma_{11}^1,$$

ne arată că anulându-l pe $\bar{\gamma}_{11}^1$ şi menţinându-l nul, rezultă că

$$\gamma_{11}^1 = 0 \quad , \quad \gamma = 0$$

iar grupul spaţiului nostru devine de forma

$$d\bar{s}^1 = ds^1 \quad , \quad d\bar{s}^2 = \alpha\, ds^1 + ds^2 \quad , \quad d\bar{s}^0 = ds^0 \tag{18′}$$

deci conţine tot o singură funcţie arbitrară de variabilele x^1, x^2.

Dacă însă $\gamma^0_{22} = \gamma^0_{21} = 0$, funcția β nu se mai determină prin relația (18). Totuși, având la dispoziție pe

$$\bar{\gamma}^1_{11} - 2\gamma = \gamma^1_{11},$$

anulându-l pe $\bar{\gamma}^1_{11}$, ajungem să avem

$$\gamma^1_{11} = 0, \quad \gamma = 0,$$

așa încât, transformările de congruențe ale lui P_2 sunt date, în acest caz, prin grupul

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= ds^1, \\ d\bar{s}^2 &= \alpha\, ds^1 + \beta\, ds^2, \\ d\bar{s}^0 &= ds^0, \end{aligned} \tag{19}$$

în care funcțiile α, β sunt arbitrare de x^1, x^2, iar ds^1 este diferențială totală exactă.

Din cele spuse până aci, se desprinde următoarea concluzie:

Grupul proiectiv de transformări de congruențe al unui spațiu P_2 *cu torsiune afină nenulă, însă fără curbură, ce admite o formă Pfaff invariantă diferențială totală exactă, este grupul identitate, ori de forma* (17), (18′), *afară de cazul când sunt îndeplinite condițiile*

$$\begin{aligned} &\gamma^1_{11} = \gamma^1_{12} = \gamma^1_{21} = \gamma^1_{22} = \gamma^0_{22} = \gamma^0_{21} = 0, \\ &\gamma^2_{21} - \gamma^2_{12} - w^2_{21} = 1, \quad \gamma^0_{12} = w^2_{12}, \, w^1_{12} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

și când el este de forma (19), *cu* α, β *funcții oarecare de variabilele* x^1, x^2.

II. *Cazul* $w^1_{12} \neq 0$. Forma ds^1 ne mai fiind o diferențială totală exactă, putem face totdeauna, prin (14)

$$w^1_{12} = 1, \quad \beta = 1. \tag{21}$$

Din (15) vedem apoi, făcând mai întâi $\beta = 1$, că dacă invariantul $\gamma^1_{22} \neq$ îl putem anula, fie pe γ^1_{12}, fie pe γ^1_{21}, servindu-ne de α și ulterior pe γ^1_{11} cu ajutorul lui γ, deci să ne reducem la grupul identitate.

Dacă $\gamma^1_{22} = 0$, avem la dispoziție relațiile în termeni finiți

$$\begin{aligned} &\bar{\gamma}^1_{11} + (\bar{\gamma}^1_{12} + \bar{\gamma}^1_{21})\,\alpha - 2\gamma = \gamma^1_{11}, \\ &\bar{\gamma}^0_{21} + \bar{\gamma}^0_{22}\,\alpha - \gamma^0_{21} = \gamma^1_{21}\gamma, \end{aligned} \tag{22}$$

${}^1_2\gamma$, ${}^1_{21}\gamma$, γ^0_{22} fiind invarianți absoluți.

Prima ne spune că folosindu-l pe γ pentru a anula coeficientul $\bar{\gamma}^1_{11}$ și păstrând mai departe valoarea

$$\gamma^1_{11} = 0,$$

relația ulterioară

$$(\gamma^1_{12} + \gamma^1_{21})\,\alpha = 2\gamma,$$

permite, pentru $\gamma_{12}^1 + \gamma_{21}^1 \neq 0$, să facem cu ajutorul lui α,

$$\gamma_{12}^1 + \gamma_{21}^1 = 1,$$

și această valoare se conservă numai pentru $\alpha = 2\gamma$.

Deoarece avem însă $\gamma_{12}^1 - \gamma_{21}^1 = w_{12}^1 = 1$, urmează că

$$\gamma_{21}^1 = 1, \gamma_{21}^1 = 0.$$

Dar atunci, a doua relație în termeni finiți (22) devine

$$\bar{\gamma}_{21}^0 + \bar{\gamma}_{22}^0 \alpha = \gamma_{21}^0,$$

așa încât, posibilitatea ce o avem, pentru $\gamma_{22}^0 \neq 0$, este

$$\gamma_{21}^0 = 0, \alpha = 0 (= \gamma)$$

adică se recade peste grupul identitate.

Reducerea lui α la zero nu mai este însă posibilă, când $\gamma_{22}^0 = 0$ și când grupul spațiului nostru capătă forma

$$d\bar{s}^1 = ds^1, \quad d\bar{s}^2 = \alpha\, ds^1 + ds^2, \quad d\bar{s}^0 = ds^0 + \frac{1}{2}\alpha\, ds^1, \tag{23}$$

γ_{21}^0 fiind un invariant absolut.

Când $\gamma_{12}^1 + \gamma_{21}^1 = 0$, avem de fapt

$$\gamma_{12}^1 = -\gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}, \quad w_{12}^1 = 1$$

și prima din relațiile (22) devine

$$\bar{\gamma}_{11}^1 - 2\gamma = \gamma_{11}^1,$$

permițând să facem

$$\gamma_{11}^1 = 0, \gamma = 0.$$

Pe de altă parte, cea de a doua ecuație (22) scriindu-se acum

$$\bar{\gamma}_{21}^0 + \left(\bar{\gamma}_{22}^0 + \frac{1}{2}\right)\alpha = \gamma_{21}^0, \tag{24}$$

se vede că, pentru $\gamma_{22}^0 \neq -\frac{1}{2}$ se poate ajunge la grupul identitate. Dacă însă $\gamma_{22}^0 = -\frac{1}{2}$, aceasta nu mai este posibil prin (24). Dar, dat fiind că $c_1^0 = 0$ avem încă relațiile în termeni finiți

$$\begin{gathered}\bar{\gamma}_{11}^0 + (\bar{\gamma}_{12}^0 + \bar{\gamma}_{21}^0)\,\alpha - \frac{1}{2}\,\alpha^2 = \gamma_{11}^0, \\ \bar{\gamma}_{12}^0 - \frac{1}{2}\alpha = \gamma_{12}^0, \bar{\gamma}_{21}^0 - \frac{1}{2}\alpha = \gamma_{21}^0\end{gathered} \tag{25}$$

și ca atare, anulându-l pe γ_{12}^0 sau γ_{21}^0, ne putem totdeauna reduce la grupul identitate.

In concluzie, rezultatul la care am ajuns, poate fi enunțat după cum urmează:

Dacă spațiul P_2 *fără curbură proiectivă, însă cu torsiune nenulă, admite o formă Pfaff invariantă nediferențială totală exactă, atunci grupul său proiectiv de transformări de congruențe este grupul identitate, afară de cazul când sunt îndeplinite condițiile*

$$\gamma_{11}^1 = \gamma_{21}^1 = \gamma_{22}^1 = \gamma_{22}^0 = 0, \gamma_{12}^1 = 1,$$

$$\gamma_{21}^2 - \gamma_{12}^2 - w_{21}^2 = 1, w_{12}^1 = 1\ \gamma_{12}^0 - \gamma_{21}^0 = w_{12}^0, \frac{\partial \gamma_{21}^0}{\partial s^2} = 0, \tag{26}$$

In acest caz, el are expresia (23), *cu* α *funcție oarecare de variabilele* x^1, x^2.

6. In mod natural, se pune deci problema de a vedea, dacă se pot găsi condiții necesare și suficiente pentru ca spațiul nostru să admită unul din grupurile semnalate mai sus.

Vom considera, în primul rând, cazul grupului maxim (19).

După cum s'a văzut, relațiile (16), (16') ne-au permis, prin anumite normalizări, să determinăm în parte sau în întregime funcțiile grupului (13), afară de cazul (20), când ele devin niște identități.

Plecând dela condițiile (20), al doilea grup din formulele fundamentale (5') ne dau, ținând seama și de $c_1^0 = 0$, relația în termeni finiți

$$\overline{w}_{12}^0 \beta = w_1^0 . \tag{27}$$

Urmează de aici că vom avea de deosebit două cazuri distincte, după cum $w_{12}^0 = 0$, sau $w_{12}^0 \neq 0$.

Să presupunem întâi că $w_{12}^0 = 0$, cu alte cuvinte că *forma* ds^0 *este*, la fel ca și ds^1, *o diferențială totală exactă*. Atunci avem și $\gamma_{12}^0 = 0$, iar γ_{11}^0 devine un invariant absolut. Deoarece pentru un astfel de invariant $\bar{I} = I$ avem

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{s}^1} + \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{s}^2} \alpha = \frac{\partial I}{\partial s^1},$$

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{s}^2} \beta = \frac{\partial I}{\partial s^2},$$

pentru ca α, β să nu poată fi determinat, trebue ca $\frac{\partial I}{\partial s^2} = 0$, deci $\frac{\partial \gamma_{11}^0}{\partial s^2} = 0$.

7. Până aici ne-am ocupat numai de relațiile în termeni finiți, ce leagă între ele funcțiile α, β. Or, considerând primele formule (5) de transformare

a conexiunii, scoatem respectiv, pentru $a = 2$, $b = c = 1$; $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$; $a = b = 2$, $c = 1$ şi $a = b = c = 2$, următoarele ecuaţii:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial s^1} &= \overline{\gamma}^2_{11} + (\overline{\gamma}^2_{12} + \overline{\gamma}^2_{21})\,\alpha + \overline{\gamma}^2_{22}\,\alpha^2 - \gamma^2_{11}\,\beta, \\
\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} &= \overline{\gamma}^2_{12}\,\beta + \overline{\gamma}^2_{22}\,\alpha\,\beta - \gamma^2_{12}\,\beta, \\
\frac{\partial \beta}{\partial s^1} &= \overline{\gamma}^2_{21}\,\beta + \overline{\gamma}^2_{22}\,\alpha\,\beta - \gamma^2_{21}\,\beta, \\
\frac{\partial \beta}{\partial s^2} &= \overline{\gamma}^2_{22}\,\beta^2 - \gamma^2_{22}\,\beta.
\end{aligned} \tag{28}$$

Ultima dintre ele ne permite ca, luând pe β drept soluţie a ecuaţiei

$$\frac{\partial \beta}{\partial s^2} = -\gamma^2_{22}\,\beta,$$

să anulăm coeficientul γ^2_{22}. Menţinând valoarea $\gamma^2_{22} = 0$, va trebui ca $\frac{\partial \beta}{\partial s^2} = 0$. Odată făcut acest lucru, a doua relaţie (28) ne arată că putem anula, de asemenea, pe $\overline{\gamma}^2_{12}$, alegându-l pe α ca soluţie a ecuaţiei

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = -\gamma^2_{12}\,\beta$$

şi valoarea $\gamma^2_{12} = 0$ se păstrează numai dacă $\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = 0$.

In felul acesta, sistemul (28) capătă forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial s^1} &= \overline{\gamma}^2_{11} + \overline{\gamma}^2_{21}\,\alpha - \gamma^2_{11}\,\beta, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = 0 \\
\frac{\partial \beta}{\partial s^1} &= \overline{\gamma}^2_{21}\,\beta - \gamma^2_{21}\,\beta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial s^2} = 0.
\end{aligned} \tag{28'}$$

Pe de altă parte, din al doilea grup de formule (5) mai obţinem, pentru $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, relaţia

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} - \frac{\partial \beta}{\partial s^1} = \overline{\omega}^2_{12}\,\beta - \omega^2_{12}\,\beta$$

care ne dă, ţinând seama de $\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = 0$ şi a doua ecuaţie (28'), invariantul absolut

$$\overline{\gamma}^2_{21} - \overline{\omega}^2_{21} = \gamma^2_{21} - \omega^2_{21}.$$

Deci, pentru ca β să nu poată fi determinat, trebue ca $\frac{\partial \Upsilon_{21}^2}{\partial s^2} = \frac{\partial w_{21}^2}{\partial s^2}$. Dar, prin normalizarea (11) avem

$$\Upsilon_{21}^2 - \Upsilon_{12}^2 - w_{21}^2 = 1$$

și cum $\Upsilon_{12}^2 = 0$, rezultă că $\Upsilon_{21}^2 = w_{21}^2 + 1$.

Considerând acum sistemul

$$\frac{\partial \beta}{\partial s^1} = -\Upsilon_{21}^2 \beta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial s^2} = 0 \tag{29}$$

aceasta înseamnă a anula coeficientul Υ_{21}^2, lucrul fiind posibil, deoarece condiția de integrabilitate

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial s^1 \partial s^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2 \partial s^1} = w_{12}^1 \frac{\partial \beta}{\partial s^1} + w_{12}^2 \frac{\partial \beta}{\partial s^2},$$

care se reduce la $\frac{\partial \Upsilon_{21}^2}{\partial s^2} = 0$, este identic satisfăcută, în virtutea faptului că spațiul P_2 fiind presupus fără curbură proiectivă. avem

$$\Upsilon_{212}^{*2} = \Upsilon_{212}^2 + \Upsilon_{21} - w_{21}^0 = 0,$$

unde

$$\Upsilon_{212}^2 = \frac{\partial \Upsilon_{21}^2}{\partial s^2} - \frac{\partial \Upsilon_{22}^2}{\partial s^1} + \Upsilon_{11}^2 \Upsilon_{22}^1 - \Upsilon_{12}^2 \Upsilon_{21}^1 + \Upsilon_{21}^2 w_{12}^1 + \Upsilon_{22}^2 w_{12}^2$$

și totul revine la a alege pentru funcția β, o soluție a unui sistem cu diferențiale totale exacte.

Conservând valoarea $\Upsilon_{21}^2 = 0$, este clar că β trebue să fie o constantă.

Revenind la sistemul (28'), el se scrie acum sub forma simplă

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^1} = \bar{\Upsilon}_{11}^2 - \Upsilon_{11}^2 \beta, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = 0. \tag{29'}$$

8. Dat fiind că $w_{12}^1 = 0$, deci forma ds^1 este o diferențială totală exactă, iar $w_{12}^2 = 1$, $w_{12}^0 = 0$, urmează că putem lua pentru formele ds^α expresiile

$$ds^1 = dx^1, \; ds^2 = m(x^1, x^2)\, dx^1 + n(x^1, x^2)\, dx^1, \; ds^0 = dx^0 \tag{30}$$

schimbând însă eventual variabila x^2, se poate presupune $n = 1$, deci că avem

$$ds^2 = m\, dx^1 + dx^2. \tag{30'}$$

Covariantul bilinear al formei ds^2 fiind

$$\Delta s^2 = ds^1\, \delta s^2 = dx^1\, \delta x^2 = \frac{\partial m}{\partial x^2} dx^1\, \delta x^2,$$

deducem de aici

$$\frac{\partial m}{\partial x^2} = 1; \quad m = x^2 + \varphi(x^1),$$

cu $\varphi(x^1)$ funcţie arbitrară. Această funcţie o putem reduce însă la zero, transformând pe x^2 în $x^2 + x(x^1)$, fapt ce nu alterează pe ds^1 şi rezultă atunci că formele ds^1, ds^2 au expresiile.

$$ds^1 = dx^1, \qquad ds^2 = dx^2 + x^2\,dx^1. \tag{31}$$

Ţinând seama de ele în grupul (19), în care presupunem pe β constant precum şi de faptul că

$$d\bar{s}^1 = d\bar{x}^1, \quad d\bar{s}^2 = d\bar{x}^2 + \bar{x}^2\,d\bar{x}^1,$$

obţinem sistemul de ecuaţii lineare de primul ordin

$$\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} = 1, \quad \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} = 0$$

$$\bar{x}^2 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} = \alpha + \beta x^2, \quad \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} = \beta.$$

De aici scoatem, mai întâi, că

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^1 + c_1, \\ \bar{x}^2 &= \beta x^2 + \tau(x^1) \end{aligned} \tag{32}$$

funcţia $\tau(x^1)$ fiind arbitrară şi apoi

$$\alpha = \tau' + \tau, \tag{32'}$$

τ' fiind derivata lui τ în raport cu x^1.

Observând că $\frac{\partial \alpha}{\partial x^2} = 0$, prima din ecuaţiile sistemului (29') ne dă

$$\tau'' + \tau' = \bar{\gamma}^2_{11} - \gamma^2_{11}\,\beta.$$

Pe de altă parte, curbura proiectivă a spaţiului nostru fiind nulă, avem relaţia

$$\gamma^{*2}_{112} = \gamma^2_{112} + \gamma^0_{11} = 0,$$

în care γ^2_{112} este dat de formula

$$\gamma^a_{bcd} = \frac{\partial \gamma^a_{bc}}{\partial s^d} - \frac{\partial \gamma^a_{bd}}{\partial s^c} + \gamma^a_{ed}\,\gamma^e_{bc} - \gamma^a_{ec}\,\gamma^e_{bd} + \gamma^a_{be}\,w^e_{bc} \qquad (a, b, \ldots = 1, 2). \tag{f}$$

iar $\bar{\gamma}^0_{11} = \gamma^0_{11}$ este un invariant absolut, deci $\frac{\partial \gamma^0_{11}}{\partial s^2} = 0$.

După cum se verifică uşor, găsim din relaţia de mai sus că

$$\frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial x^2} = -\mu; \quad \gamma^2_{11} = -\mu x^2 + \theta(x^1). \tag{33}$$

Așa fiind, ecuația (29'') devine, în baza lui (32),

$$\tau'' + \tau' + \mu\tau = \bar{\theta}(\bar{x}^1) - \theta(x^1)\,\beta$$

și ne dă posibilitatea, prin faptul că $\tau(x^1)$ este arbitrară, să-l anulăm pe $\bar{\theta}(\bar{x}^1)$.

Menținându-l pe θ nul și mai departe, rezultă că $\tau(x^1)$ este determinată de ecuația diferențială lineară, de al doilea ordin,

$$\tau'' + \tau' + \mu\tau = 0, \tag{34}$$

iar coeficientul γ_{11}^2 este dat de formula

$$\gamma_{11}^2 = -\mu(x^1)\,x^2. \tag{33'}$$

Prin urmare, putem să enunțăm teorema următoare:

Conexiunea unui spațiu P_2, *având torsiunea afină nenulă, cu grup proiectiv de transformări de congruențe* (19) *în care* ds^1, ds^0 *sunt diferențiale totale exacte, poate fi adusă la a avea, pe congruențele* (λ), *componentele*

$$\begin{aligned} &\gamma_{11}^1 = \gamma_{12}^1 = \gamma_{21}^1 = \gamma_{22}^1 = \gamma_{12}^2 = \gamma_{21}^2 = \gamma_{22}^2 = 0, \\ &\gamma_{11}^2 = -\mu x^2, \quad \gamma_{11}^0 = \mu, \quad \gamma_{12}^0 = \gamma_{21}^0 = \gamma_{22}^0 = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

unde μ *este un invariant funcție numai de variabila* x^1.

Transformările de variabile care păstrează această formă canonică, sunt de forma

$$\bar{x}^1 = x^1 + c_1, \quad \bar{x}^2 = \beta x^2 + c_2\tau_2 + c_3\tau_3, \quad \bar{x}^0 = x^0 \tag{32'}$$

τ_2, τ_3 *fiind două soluții linear independente ale ecuației* (34), *iar* β, c_i *niște constante arbitrare.*

Rezultă de aci imediat că:

Grupul maxim de automorfisme al unui spațiu P_2, *cu conexiune* (35) *depinde, dacă invariantul* μ *este constant, de 4 parametri.*

Observație. Este clar că dacă invariantul μ nu este constant, însă există o valoare $x'^1 = x^1 + k$, k având o valoare determinată, astfel încât identitatea

$$\bar{\mu}(\bar{x}^1) = \mu(x^1),$$

să fie satisfăcută, formulele (32') depind numai de 3 constante arbitrare și ca atare, grupul de automorfisme al spațiului P_2 poate avea, în acest caz, cel mult 3 parametri.

Este de remarcat, în plus, că *conexiunea lui Veblen*, ce se poate atașa spațiului nostru are, în ipotezele de mai sus, componentele (35) și

$$\gamma_{0\beta}^{\alpha} = \gamma_{\beta 0}^{\alpha} = -\delta_{\beta}^{\alpha}, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2) \tag{35'}$$

9. Calculând componentele conexiunii Γ_{jk}^i și Γ_{jk}^0 în sistemul de variabile (x), cu ajutorul formulelor (2), (35) și faptului că

$$\lambda_1^1 = 1, \quad \lambda_2^1 = 0, \quad \lambda_1^2 = x^2, \quad \lambda_2^2 = 1, \quad \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = 0,$$

găsim valorile

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^0_{21} = \Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{22} = 0,$$
$$\Gamma^2_{11} = -\mu x^2, \quad \Gamma^2_{12} = 1, \quad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{22} = 0, \quad \Gamma^0_{11} = \mu, \tag{36}$$

μ fiind invariantul dela (35).

Să examinăm cazul particular când $\mu = 0$. Atunci, ecuaţia (34) se integrează imediat şi conexiunea lui Veblen are forma canonică

$$\gamma^\alpha_{bc} = 0, \quad \gamma^\alpha_{0\beta} = \gamma^\alpha_{\beta 0} = -\delta^\alpha_\beta, \quad (b, c = 1, 2;\ \alpha, \beta = 0, 1, 2) \tag{37}$$

şi deci concluzia ce rezultă, este:

Un spaţiu P_2, *pentru care conexiunea lui Veblen ataşată, are componentele* (37), *admite un grup maxim de automorfisme cu 4 parametri, de forma*

$$x'^1 = x^1 + a, \quad x'^2 = bx^2 + ce^{x^1} + d, \tag{37'}$$

a, b, c, d *fiind nişte constante.*

10. Rămâne să ne ocupăm acum, tot în ipoteza (20), de cazul în care forma ds^0 nu mai este o diferenţială totală exactă, adică $w^0_{12} \neq 0$. Relaţia (27)

$$\overline{w}^0_{12}\,\beta = w^0_{12},$$

ne permite să ne reducem la situaţia

$$w^0_{12} = 1, \quad \beta = 1$$

şi urmează că avem de asemenea, $\gamma^0_{12} = 1$.

Dar, deoarece în grupul (19), $c^0_1 = 0$, obţinem, din egalităţile

$$\overline{\gamma}^0_{ef}\, c^e_b\, c^f_c = \gamma^0_{bc},$$

pentru $b = 1$, $c = 2$, relaţia în termeni finiţi

$$\overline{\gamma}^0_{11} + \alpha = \gamma^0_{11}. \tag{38}$$

Ea ne arată că servindu-ne de α, coeficientul $\overline{\gamma}^0_{11}$ poate fi anulat întotdeauna, aşa încât menţinând valoarea $\gamma^0_{11} = 0$, trebue ca $\alpha = 0$.

Prin urmare, *în condiţiile* (20), *dacă forma* ds^0 *nu este o diferenţială totală exactă, grupul proiectiv de transformări de congruenţe al spaţiului* P_2, *este grupul identitate.*

11. După cum am văzut, existau trei posibilităţi în care grupul (13) putea să depindă de o singură funcţie de variabilele x^1, x^2, anume $\alpha = \gamma$; α respectiv $\alpha = 2\gamma$, primele două prezentându-se numai dacă forma Pfaff invariantă admisă de spaţiu, era o diferenţială totală exactă.

Să vedem deci dacă este posibil în adevăr ca spaţiul P_2 să posede un astfel de grup proiectiv de transformări de congruenţe.

Mai întâi să observăm că, dacă condiţiile

$$\gamma^1_{11} = \gamma^1_{22} = 0, \quad \gamma^1_{12} = \gamma^1_{21} = \gamma^0_{22} = 1, \quad w^0_{12} = 0, \quad \overline{\gamma}^0_{21} = \gamma^0_{21}$$
$$\gamma^2_{21} - \gamma^2_{12} - w^2_{21} = 1, \quad \gamma^0_{12} - \gamma^0_{21} = w^0_{12}, \tag{39}$$

sunt îndeplinite, grupul spațiului nostru capătă forma

$$d\bar{s}^1 = ds^1, \quad d\bar{s}^2 = \alpha\, ds^1 + ds^2, \quad d\bar{s}^0 = ds^0 + \alpha\, ds^1. \tag{40}$$

Insă deoarece $c_2^2 = 1$, relația în termeni finiți ce se obține, anume

$$\bar{\gamma}_{21}^2 + (\bar{\gamma}_{22}^2 - 2)\,\alpha = \gamma_{21}^2,$$

cu γ_{22}^2 invariant, ne spune că avem o legătură pentru α, afară de cazul când

$$\gamma_{22}^2 = 2, \quad \bar{\gamma}_{21}^2 = \gamma_{21}^2. \tag{41}$$

De asemenea, ecuațiile (5) ne dau, în cazul de față, sistemul

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s^1} &= \bar{\gamma}_{11}^2 + (\bar{\gamma}_{12}^2 + \bar{\gamma}_{21}^2)\,\alpha - \gamma_{11}^2, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} &= \bar{\gamma}_{12}^2 - \gamma_{12}^2, \end{aligned} \tag{42}$$

și în același timp

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s^1} &= \bar{\gamma}_{11}^0 + (\bar{\gamma}_{12}^0 + \bar{\gamma}_{21}^0)\,\alpha - \gamma_{11}^0, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} &= \bar{\gamma}_{12}^0 - \gamma_{12}^0. \end{aligned} \tag{42'}$$

Din egalarea valorilor derivatelor $\frac{\partial \alpha}{\partial s^1}$ și $\frac{\partial \alpha}{\partial s^2}$, se găsește că, pentru ca α să nu se determine, este necesar ca

$$\begin{aligned} &\bar{\gamma}_{11}^2 - \bar{\gamma}_{11}^0 = \gamma_{11}^2 - \gamma_{11}^0, \quad \gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2 = \gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0 \\ &\bar{\gamma}_{12}^2 - \bar{\gamma}_{21}^0 = \gamma_{12}^2 - \gamma_{21}^0, \end{aligned} \tag{43}$$

derivatele în raport cu s^2, ale invarianților ce apar, trebuind să fie nule și ele

$$\frac{\partial \gamma_{11}^2}{\partial s^2} = \frac{\partial \gamma_{11}^0}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial \gamma_{12}^2}{\partial s^2} = \frac{\partial \gamma_{12}^0}{\partial s^2}. \tag{43'}$$

Ținând seama că γ_{21}^0 și γ_{21}^2 sunt și ei invarianți absoluți, punând

$$\gamma_{21}^0 = \lambda, \quad \gamma_{21}^2 = \mu, \quad \left(\frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial s^2} = 0\right), \tag{44}$$

a doua din rolațiile (43), împreună cu

$$\gamma_{12}^2 - \gamma_{21}^2 - \omega_{12}^2 = -1, \quad \gamma_{12}^0 - \gamma_{21}^0 = \omega_{12}^0 \tag{44'}$$

ne permite să scriem

$$\begin{aligned} &\gamma_{12}^0 = \omega_{12}^0 + \lambda, \quad \gamma_{12}^2 = \omega_{12}^2 + 2\lambda - \mu \\ &\omega_{12}^2 = \omega_{12}^0 + 2\lambda - 2\mu + 1. \end{aligned} \tag{44''}$$

Pe de altă parte, spaţiul P_2 fiind presupus fără curbură, componentele curburii sale proiective $\gamma^{*\alpha}_{bcd}(b, c, d = 1, 2;\ \alpha = 0, 1, 2)$ sunt nule şi deci avem

$$\begin{aligned} &\gamma^{a}_{bcd} - \delta^{a}_{c}\gamma^{0}_{bd} + \delta^{a}_{d}\gamma^{0}_{bc} - \delta^{a}_{b}\omega^{0}_{bc} = 0, \\ &\gamma^{*0}_{bcd} = \frac{\partial\gamma^{0}_{bc}}{\partial s^{d}} - \frac{\partial\gamma^{0}_{bd}}{\partial s^{c}} + \gamma^{0}_{ec}\gamma^{e}_{bd} - \gamma^{0}_{ed}\gamma^{e}_{bc} + \gamma^{0}_{be}\omega^{e}_{cd} = 0, \end{aligned} \tag{45}$$

γ^{a}_{bcd} fiind date de formula (f).

In cazul de faţă, primele ne dau relaţiile

$$\begin{aligned} &\gamma^{1}_{112} = \omega^{0}_{12} + \gamma^{0}_{12}, \quad \gamma^{1}_{212} = \gamma^{0}_{22}, \\ &\gamma^{2}_{212} = \omega^{0}_{12} - \gamma^{0}_{21}, \quad \gamma^{2}_{112} = -\gamma^{0}_{11}, \end{aligned} \tag{46}$$

şi în virtutea lui (39), (41), (44″) obţinem, din primele două, ca şi din $\gamma^{*0}_{212} = 0$, egalităţile

$$\begin{aligned} &\gamma^{2}_{12} + \omega^{2}_{12} = \gamma^{0}_{12} + \omega^{0}_{12}, \\ &-\gamma^{2}_{12} + 2\omega^{2}_{12} = \omega^{0}_{12} - \gamma^{0}_{21}, \qquad \gamma^{0}_{12} = 2\gamma^{0}_{21} - \gamma^{2}_{21} + \omega^{2}_{12}. \end{aligned} \tag{46′}$$

Adunând pe cele dintâi, membru cu membru, găsim $\omega^{2}_{12} = \omega^{0}_{12}$ şi apoi, combinând (46′) cu (44″), obţinem

$$\begin{aligned} &\lambda = \mu, \qquad (\text{căci } \gamma^{0}_{12} = 2\lambda - \mu + \omega^{0}_{12} = \omega^{0}_{12} + \lambda) \\ &\omega^{2}_{12} = \omega^{0}_{12} + 2\lambda - 2\mu + 1 = \omega^{0}_{12} \end{aligned} \tag{47}$$

deci în definitiv

$$\begin{aligned} 2\lambda - 2\mu &= -1, \\ \lambda - \mu &= 0, \end{aligned}$$

ceea ce este imposibil.

Aşa dar, rezultatul ce se deduce este următorul:

Un spaţiu P_2 *fără curbură, cu torsiunea afină diferită de zero, pentru care condiţiile* (39), (41), (44) *şi* (44″) *sunt îndeplinite, nu poate admite un grup proiectiv de transformări de congruenţe, de forma* (40).

12. Odată clarificat acest caz, să vedem dacă este posibil ca spaţiul nostru să aibă un grup de forma

$$d\bar{s}^{1} = ds^{1}, \quad d\bar{s}^{2} = \alpha\, ds^{1} + ds^{2}, \quad d\bar{s}^{0} = ds^{0} + \frac{1}{2}\alpha\, ds^{1}. \tag{48}$$

O asemenea posibilitate se prezenta când

$$\begin{aligned} &\gamma^{1}_{11} = \gamma^{1}_{21} = \gamma^{1}_{22} = 0, \quad \gamma^{1}_{12} = 1, \quad \gamma^{0}_{22} = 0, \quad \omega^{1}_{12} = 1 \\ &\gamma^{2}_{21} - \gamma^{2}_{12} - \omega^{2}_{21} = 1, \quad \gamma^{0}_{12} - \gamma^{0}_{21} = \omega^{0}_{12}, \quad \frac{\partial\gamma^{0}_{21}}{\partial s^{2}} = 0. \end{aligned} \tag{48′}$$

Deoarece $c_2^2 = 1$, rezultă relația în termeni finiți

$$\bar{\gamma}_{21}^2 + \left(\bar{\gamma}_{22}^2 - \frac{1}{2}\right)\alpha = \gamma_{21}^2,$$

γ_{22}^2 fiind un invariant absolut al grupului.

Din ea se vede că, pentru ca α să nu poată fi determinat, este necesar să avem

$$\gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{\partial \gamma_{21}^2}{\partial s^2} = 0. \tag{49}$$

Funcția α trebuind să verifice, ținând seama de (48′) și (49), sistemul linear

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s^1} &= \bar{\gamma}_{11}^2 + (\bar{\gamma}_{12}^2 + \bar{\gamma}_{21}^2)\,\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \gamma_{11}^2 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} &= \bar{\gamma}_{12}^2 - \alpha - \gamma_{12}^2 \end{aligned} \tag{50}$$

și în același timp sistemul

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s^1} &= 2\bar{\gamma}_{11}^0 + 2\,(\bar{\gamma}_{12}^0 + \bar{\gamma}_{21}^0)\,\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\gamma_{11}^0, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} &= 2\bar{\gamma}_{12}^0 - \alpha - 2\,\gamma_{12}^0, \end{aligned} \tag{50′}$$

din egalarea valorilor lui $\frac{\partial \alpha}{\partial s^2}$, deducem invariantul absolut

$$\bar{\gamma}_{12}^2 - 2\bar{\gamma}_{12}^0 = \gamma_{12}^2 - 2\gamma_{12}^0,$$

iar din acelea ale lui $\frac{\partial \alpha}{\partial s^1}$, relația în termeni finiți

$$\bar{\gamma}_{11}^2 - 2\bar{\gamma}_{11}^0 + [\bar{\gamma}_{12}^2 + \bar{\gamma}_{21}^2 - 2\,(\bar{\gamma}_{12}^0 + \bar{\gamma}_{21}^0)]\,\alpha = \gamma_{11}^2 - 2\gamma_{11}^0,$$

care trebuind să fie o identitate în α, ne dă

$$\bar{\gamma}_{11}^2 - 2\bar{\gamma}_{11}^0 = \gamma_{11}^2 - 2\gamma_{11}^0, \quad \bar{\gamma}_{12}^2 + \gamma_{21}^2 = 2\,(\gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0). \tag{51}$$

Totodată, având în vedere și $c_2^0 = 0$, găsim încă

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = \bar{\omega}_{12}^2 - \alpha - \omega_{12}^2 = 2(\bar{\omega}_{12}^0 - \omega_{12}^0) - \alpha$$

și ca atare invariantul

$$\bar{\omega}_{12}^2 - 2\bar{\omega}_{12}^0 = \omega_{12}^2 - 2\omega_{12}^0.$$

Așa fiind, ținând seama că γ_{21}^0 și γ_{21}^2 sunt invarianți, notându-i ca la (44) și observând (44') ca și a doua din (51), obținem

$$\gamma_{12}^0 = w_{12}^0 + \lambda, \quad \gamma_{12}^2 = 4\lambda - \mu + w_{12}^0$$
$$w_{12}^2 = 4\lambda - 2\mu + 2w_{12}^0 + 1. \tag{52}$$

Calculând însă expresiile (46), plecând dela (48'), (49) și (52), se verifică ușor că ajungem la o contradicție, anume $\lambda = 0$ și $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Deci, în consecință:

Grupul proiectiv de transformări de congruențe (48), *este incompatibil cu condițiile* (48'), (49), (44) și (52).

13. Rămâne să ne mai ocupăm de cazul în care avem condițiile

$$\gamma_{11}^1 = \gamma_{12}^1 = \gamma_{21}^1 = \gamma_{22}^1 = 0, \quad \gamma_{21}^0 = 1, \quad \gamma_{22}^0 = 0, \quad w_{12}^1 = 0,$$
$$\gamma_{12}^2 - \gamma_{21}^2 - w_{12}^2 = -1, \quad \gamma_{12}^0 = w_{12}^0 + 1,$$

și când grupul spațiului P_2 are expresia

$$d\bar{s}^1 = ds^1, \quad d\bar{s}^2 = \alpha\, ds^1 + ds^2, \quad d\bar{s}^0 = ds^0 \tag{53}$$

cu α funcție oarecare de variabilele x^1, x^2.

Având în vedere faptul că $c_1^0 = 0$, relația în termeni finiți ce rezultă, anume

$$\bar{\gamma}_{11}^0 + (\bar{\gamma}_{12}^0 + 1)\,\alpha = \gamma_{11}^0, \quad (\bar{\gamma}_{12}^0 = \gamma_{12}^0)$$

constitue o legătură pentru α, afară dacă

$$\gamma_{12}^0 = -1, \tag{54}$$

când γ_{11}^0 devine un invariant absolut, deci $\frac{\partial \gamma_{11}^0}{\partial s^2} = 0$.

Tot așa, din relația în termeni finiți ce se obține din cauză că $c_2^2 = 1$ și care se scrie, ținând seama de $\bar{\gamma}_{22}^2 = \gamma_{22}^2$,

$$\bar{\gamma}_{21}^2 + \gamma_{22}^2 \alpha = \gamma_{21}^2,$$

deducem noi condiții de conservare a lui α,

$$\gamma_{22}^2 = 0, \quad \frac{\partial \gamma_{21}^2}{\partial s^2} = 0. \tag{54'}$$

Acum este ușor de arătat că și în cazul de față se ajunge la o imposibilitate. In adevăr, dacă calculăm componentele de curbură proiectivă $\gamma_{212}^{*2} = 0$, $\gamma_{112}^{*1} = 0$, se găsesc egalitățile

$$\gamma_{21}^0 = w_{12}^0 \quad , \quad \gamma_{12}^0 + w_{12}^0 = 0 \tag{55}$$

așa încât, introducând valorile lui γ_{21}^0 (sau γ_{12}^0) și w_{12}^0, se ajunge la o contradicție.

Ca atare se poate afirma că:

Un spațiu P_2 *fără curbură proiectivă, cu torsiune afină nenulă, admițând o formă Pfaff invariantă diferențială totală exactă și cu conexiune* (53), (54), (54'), *nu posedă un grup proiectiv de transformări de congruențe de forma* (53').

In concluzie, este valabilă următoarea teoremă:

Grupul proiectiv de transformări de congruențe al unui spațiu P_2 *fără curbură, având torsiunea afină diferită de zero, ce admite o formă Pfaff invariantă, este grupul identitate, ori de forma* (19), *această ultimă posibilitate putând avea loc numai dacă forma Pfaff invariantă este o diferențială totală exactă.*

14. Rezultatele obținute până aici, ne permit ca să *clasificăm* spațiile P_2 cu torsiune, însă fără curbură proiectivă, după cum urmează:

1°. *Spații* P_2 *cu grup proiectiv de transformări de congruențe* (19) *și grup maxim de automorfisme depinzând de 4 parametri. Ele admit formele Pfaff invariante* ds^1, ds^0 *diferențiale totale exacte și sunt caracterizate prin forma canonică* (36), *în care* μ *este constant.*

2°. *Spații* P_2 *având grupul de transformări de congruențe* $d\bar{s}^\alpha = ds^\alpha$, $(\alpha = 0, 1, 2)$. *Acestea posedă, dacă coeficienții* w^α_{bc}, $\gamma^\alpha_{bc}(b,c = 1,2)$ *sunt constanți, un grup maxim de automorfisme cu 2 parametri.*

II

In cele ce urmează, vom presupune că *spațiul* P_2 *are, atât curbura proiectivă, cât și torsiunea afină, nule* ($t^1_{12} = t^2_{12} = 0$), *însă torsiunea proiectivă diferită de zero* ($t^0_{12} \neq 0$) și ne punem problema să vedem, care sunt grupurile de transformări de congruențe (3), pe care el le poate admite.

Vectorul de torsiune afină fiind nul, nu mai este posibil să atașăm spațiului o formă Pfaff invariantă, ca la început. Al doilea grup de formule (7) ne dă însă

$$\bar{t}^0_{12}\,\Delta = t^0_{12}, \quad \Delta = c^1_1 c^2_2 - c^1_2 c^2_1, \tag{56}$$

Δ fiind determinantul formelor ds^1, ds^2 în grupul (3).

Reducându-l pe t^0_{12} la unitate cu ajutorul lui Δ, se ajunge la a se obține

$$t^0_{12} = 1, \quad \Delta = 1. \tag{56'}$$

De asemenea, aplicând normalizarea lui Thomas [2] [1])

$$\gamma^1_{11} + \gamma^2_{21} = 0, \quad \gamma^1_{12} + \gamma^2_{22} = 0. \tag{57}$$

coeficienții c^0_1 c^0_2 din (3), pot fi reduși la zero și grupul proiectiv de transformări de congruențe al spațiului P_2, care conservă această situație, este de forma

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= a\ ds^1 + b\ ds^2, \\ d\bar{s}^2 &= \alpha\ ds^1 + \beta\ ds^2, \\ d\bar{s}^0 &= ds^0, \end{aligned} \tag{58}$$

și conține trei funcții arbitrare de x^1, x^2, forma ds^0 fiind invariantă.

[1]) p. 377.

Prin faptul că $c_1^0 = c_2^0 = 0$, rezultă relaţiile în termeni finiţi

$$(\bar{\gamma}_{1f}^0 c_b^1 + \bar{\gamma}_{2f}^0 c_b^2)\, c_c^f = \gamma_{bc}^0, \quad (b, c = 1,2) \tag{59}$$

care desvoltate se scriu

$$\begin{aligned}
&\bar{\gamma}_{11}^0 a^2 + (\bar{\gamma}_{12}^0 + \bar{\gamma}_{21}^0)\, a\alpha + \bar{\gamma}_{22}^0 \alpha^2 = \gamma_{11}^0,\\
&\bar{\gamma}_{11}^0 b^2 + (\bar{\gamma}_{12}^0 + \bar{\gamma}_{21}^0)\, b\beta + \bar{\gamma}_{22}^0 \beta^2 = \gamma_{22}^0,\\
&\bar{\gamma}_{11}^0 ab + \bar{\gamma}_{12}^0 a\beta + \bar{\gamma}_{21}^0 b\alpha + \bar{\gamma}_{22}^0 \alpha\beta = \gamma_{12}^0,\\
&\bar{\gamma}_{11}^0 ab + \bar{\gamma}_{12}^0 b\alpha + \bar{\gamma}_{21}^0 a\beta + \bar{\gamma}_{22}^0 \alpha\beta = \gamma_{21}^0.
\end{aligned} \tag{59'}$$

Adunând ultimele două, membru cu membru, mai obţinem încă

$$2\bar{\gamma}_{11}^0 ab + (\bar{\gamma}_{12}^0 + \bar{\gamma}_{21}^0)(a\beta + b\alpha) + 2\bar{\gamma}_{22}^0 \alpha\beta = \gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0 \tag{59''}$$

Să presupunem, mai întâi, că $\gamma_{11}^0 \cdot \gamma_{22}^0 \neq 0$. Atunci, primele două relaţii (59′) ne permit să facem

$$\bar{\gamma}_{11}^0 = \bar{\gamma}_{22}^0 = 1, \quad \bar{\gamma}_{12}^0 + \bar{\gamma}_{21}^0 = 0, \quad (\bar{\gamma}_{12}^0 = \bar{\gamma}_{12}^0, \quad \bar{\gamma}_{21}^0 = \gamma_{21}^0) \tag{60}$$

căci aceasta revine la a supune funcţiile grupului nostru la condiţiile

$$\begin{aligned}
&a^2 + \alpha^2 = \gamma_{11}^0, \quad b^2 + \beta^2 = \gamma_{22}^0,\\
&a\beta + b\alpha = 0 = \gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0.
\end{aligned} \tag{60'}$$

Menţinând valorile (60) şi mai departe, urmează că grupul (58) al spaţiului nostru se reduce la grupul ortogonal şi depinde deci de o singură funcţie arbitrară de x^1, x^2. Dat fiind însă că $c_1^0 = c_2^0 = 0$, rezultă că, în acest caz, se poate ataşa spaţiului P_2 o conexiune metrică invariantă

Dacă $\gamma_{11}^0 \neq 0$, dar $\gamma_{22}^0 = 0$, relaţiile (59′) ne dau

$$\begin{aligned}
&\bar{\gamma}_{11}^0 a^2 + (\bar{\gamma}_{12}^0 + \bar{\gamma}_{21}^0)\, a\alpha = \gamma_{11}^0,\\
&\bar{\gamma}_{11}^0 b + (\bar{\gamma}_{12}^0 + \bar{\gamma}_{21}^0)\, \beta = 0,
\end{aligned} \tag{61}$$

şi se observă că putem avea

$$\bar{\gamma}_{11}^0 = 1, \quad \bar{\gamma}_{12}^0 + \bar{\gamma}_{21}^0 = 0, \tag{61'}$$

iar conservarea acestor valori atrage după sine condiţiile

$$b = 0, \quad a = \beta = 1,$$

astfel încât grupul de transformări de congruenţe al spaţiului capătă forma

$$d\bar{s}^1 = ds^1, \quad d\bar{s}^2 = \alpha ds^1 + ds^2, \quad d\bar{s}^0 = ds^0 \tag{62}$$

cu $\alpha(x^1, x^2)$ oarecare.

In sfârşit, când $\gamma_{11}^0 = \gamma_{22}^0 = 0$, însă $\gamma_{12}^0 \neq 0$, se poate face

$$\gamma_{12}^0 = 1, \quad \gamma_{21}^0 = 0, \quad (w_{12}^0 = 0) \tag{63}$$

de unde condițile grupale de conservare a acestor valori,

$$\begin{aligned} &a\beta = 1, \quad a\alpha = 0, \quad a\beta + b\alpha = 1, \\ &b\alpha = 0, \quad b\beta = 0, \quad a\beta - b\alpha = 0. \end{aligned} \tag{63}$$

Deoarece a și b, respectiv α, β nu pot fi simultan nuli, valorile (63) nu se păstrează decât dacă

$$b = \alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{a},$$

adică pentru grupul

$$d\bar{s}^1 = a\, ds^1, \quad d\bar{s}^2 = \frac{1}{a} ds^2, \quad d\bar{s}^0 = ds^0, \tag{64}$$

în care funcția $a\,(x^1, x^2)$ este arbitrară.

Observație. In loc de a fi făcut normalizarea precedentă, putem proceda și în alt fel, ajungând la același grup (64). Intr'adevăr, dacă $\gamma^0_{11} = \gamma^0_{22} = 0$, însă $\gamma^0_{12} + \gamma^0_{21} \neq 0$, din (59″) putem să avem

$$\gamma^0_{12} + \gamma^0_{21} = 1, \quad a\beta + b\alpha = 1,$$

iar din celelalte relații

$$a\alpha = b\beta = 0, \quad a\beta - b\alpha = 0.$$

Acestea ne conduc la egalitățile

$$b = \alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{a}, \quad (\bar{\gamma}^0_{12} = \gamma^0_{12}, \quad \bar{\gamma}^0_{21} = \gamma^0_{21})$$

adică la grupul (64), pe câtă vreme, consecința $a = \beta = 0$, duce la o imposibilitate.

In concluzie, rezultatul obținut este următorul:

Grupul proiectiv de transformări de congruențe, al unui spațiu P_2 având torsiunea proiectivă diferită de zero, însă curbura proiectivă și torsiunea afină nule, este grupul identitate, ori depinzând de o singură funcție arbitrară de variabilele x^1, x^2, *afară de cazul când sunt îndeplinite condițiile*

$$\begin{aligned} &\gamma^1_{11} = -\gamma^2_{21}, \quad \gamma^1_{12} = -\gamma^2_{22}, \quad \gamma^0_{11} = \gamma^0_{12} = \gamma^0_{21} = \gamma^0_{22} = 0 \\ &\gamma^1_{12} - \gamma^1_{21} = w^1_{12}, \quad \gamma^2_{12} - \gamma^2_{21} = w^2_{12}, \quad w^0_{12} = 1 \end{aligned} \tag{65}$$

și când el are expresia (58).

16. Rămâne de văzut dacă există spații P_2 care, în condițiile specificate, admit grupurile semnalate mai sus și, ca atare, anumite grupuri maxime de transformări în ele însile.

In ceea ce privește grupul (58), care este maximum pentru cazul torsiunii proiective diferite de zero. se poate da exemplul următor [2] [1]).

$$\Gamma^0_{12} = -\Gamma^0_{21} = \frac{1}{2}, \quad \Gamma^0_{11} = \Gamma^0_{22} = \Gamma^i_{jk} = 0. \tag{66}$$

[1]) p. 390.

Spaţiul (66) admite un grup de automorfisme cu 5 parametri, anume grupul unimodular.

$$\begin{aligned} x'^1 &= ax^1 + bx^2 + \alpha, \\ & \qquad (ad - bc = 1) \\ x'^2 &= cx^1 + dx^2 + \beta. \end{aligned} \tag{66'}$$

17. Un alt caz ce se prezintă în ipoteza $t^a_{bc} = 0$ $t^0_{12} \neq 0$, este acela al grupului (62) şi când avem, ţinând seama de

$$\overline{\gamma}^1_{ef} c^e_b c^f_c = \gamma^1_{bc}, \quad (b, c, e, f = 1, 2)$$

condiţiile

$$\begin{aligned} &\gamma^0_{11} = 1, \quad \gamma^0_{12} = -\gamma^0_{21} = \mu, \quad \gamma^0_{22} = 0, \quad w^0_{12} = 2\mu - 1 \\ &\gamma^1_{22} = 0, \quad \gamma^1_{12} = -\gamma^1_{21} = -\gamma^2_{22} = \lambda, \quad w^1_{12} = 2\lambda, \\ &-\gamma^1_{11} = \gamma^2_{21}, \quad \gamma^2_{12} - \gamma^2_{21} = w^2_{12} \end{aligned} \tag{67}$$

λ, μ fiind nişte invarianţi absoluţi.

Deoarece $c^2_2 = 1$, se mai găseşte încă egalitatea

$$\overline{\gamma}^2_{21} = \gamma^2_{21}, \quad \text{deci} \quad \gamma^2_{21} = -\gamma^1_{11} = \rho = \text{invariant}.$$

Astfel stând lucrurile, funcţia α din grupul (62) trebue să verifice sistemul linear de primul ordin

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s^1} &= \overline{\gamma}^2_{11} + (\overline{\gamma}^2_{12} + \overline{\gamma}^2_{21})\alpha + \alpha^2 - \gamma^1_{11}\alpha - \gamma^2_{11}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} &= \overline{\gamma}^2_{12} + \gamma^2_{22}\alpha - \gamma^1_{12}\alpha - \gamma^2_{12}, \end{aligned} \tag{68}$$

în acelaşi timp cu ecuaţia

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = \overline{w}^2_{12} - w^1_{12}\alpha - w^2_{12}. \tag{68'}$$

Presupunând a fi anulat coeficientul $\overline{\gamma}^2_{12}$ cu ajutorul lui $\frac{\partial \alpha}{\partial s^2}$ şi păstrând valoarea $\gamma^2_{12} = 0$ (în care caz $w^2_{12} = -\rho$), sistemul (68) devine

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s^1} &= \overline{\gamma}^2_{11} + 2\gamma^2_{21}\alpha - \gamma^1_{12}\alpha^2 - \gamma^2_{11}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} &= -2\gamma^1_{12}\alpha. \end{aligned} \tag{69}$$

Scriindu-i condiţia de integrabilitate, ea constitue o legătură pentru α cu excepţia cazului când avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma^1_{12}}{\partial s^1} &= -3\gamma^1_{12}\gamma^2_{21}, \\ \frac{\partial \overline{\gamma}^2_{11}}{\partial \overline{s}^2} + 4\overline{\gamma}^1_{12}\overline{\gamma}^2_{11} &= \frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial s^2} + 4\gamma^1_{12}\gamma^2_{11}. \end{aligned} \tag{69'}$$

Cea de a doua condiție este satisfăcută identic, în virtutea faptului că un calcul direct al egalității $\gamma^{*2}_{112} = 0$, ne conduce la valoarea $\gamma^2_{112} = -\gamma^0_{11} = -1$, care este chiar valoarea expresiei de mai sus.

Mai mult încă, ținând seama de relațiile (67) și de faptul că $\gamma^2_{12} = 0$, egalitatea $\gamma^{*1}_{112} = 0$ ne dă

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s^1} + 3\lambda\rho + 3\mu - 1 = 0$$

și pe baza primei din (69'), deducem că $\mu = \frac{1}{3}$. De altfel, independent de (69'), din $\gamma^{*2}_{212} = 0$ scoatem $\frac{\partial \lambda}{\partial s^1} + 3\lambda\rho - 3\mu + 1 = 0$ și prin adunare cu precedenta, ajungem la același rezultat.

Pe de altă parte, calculul componentei $\gamma^{*0}_{112} = 0$, ne conduce la relația

$$-\frac{\partial \mu}{\partial s^1} + 3\lambda = 0$$

și deoarece μ este constant, rezultă $\lambda = 0$, cu alte cuvinte avem

$$\gamma^1_{12} = \gamma^1_{21} = \gamma^2_{22} = \omega^1_{12} = 0, \quad \gamma^0_{12} = -\gamma^0_{21} = -\omega^0_{12} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial \gamma^2_{11}}{\partial s^2} = -1. \tag{70}$$

Așa fiind, funcția α este determinată de sistemul

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s^1} = \bar{\gamma}^2_{11} + 2\alpha\rho - \gamma^2_{11}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = 0. \tag{70'}$$

Dar deoarece putem lua drept forme ds^1, ds^2 expresiile

$$ds^1 = dx^1, \; ds^2 = m\,(x^1, x^2)\,dx^1 + dx^2 \tag{71}$$

$m\,(x^1, x^2)$ fiind oarecare, ultima din (70) ne dă

$$\gamma^2_{11} = -x^2 + \sigma\,(x^1)$$

cu $\sigma\,(x^1)$ arbitrară.

Totodată, covariantul bilinear al formei ds^2 scriindu-se

$$\Delta s^2 = \omega^2_{12}\,dx^1\,\delta x^2 = \frac{\partial m}{\partial x^2}\,dx^1\,\delta x^2,$$

deducem de aci

$$\frac{\partial m}{\partial x^2} = -\rho; \quad m = -\rho x^2 + \theta\,(x^1)$$

și m este determinat în funcție de invariantul ρ, abstracție făcând de arbitrara $\theta\,(x^1)$. Schimbând însă convenabil pe x^2, funcția $\theta\,(x^1)$ poate fi anulată și ca atare avem

$$ds^1 = dx^1, \quad ds^2 = dx^2 - \rho x^2\,dx^1. \tag{71'}$$

Transformările de variabile corespunzătoare grupului (62) sunt prin urmare de forma

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^1 + c, \\ \bar{x}^2 &= x^2 + \tau(x^1) \end{aligned} \tag{72}$$

c fiind o constantă, iar $\tau(x^1)$ oarecare. Ulterior găsim că

$$\alpha = \tau' - \rho\tau.$$

Introducând această valoare a lui α în (70') obţinem, având în vedere şi expresia lui Υ^2_{11}, ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea

$$(\tau' - \rho\tau)' - 2\rho(\tau' - \rho\tau) + \tau = \bar{\sigma}(\bar{x}^1) - \sigma(x^1) \tag{73}$$

şi ea ne permite să anulăm, cu ajutorul lui $\tau(x^1)$, pe $\bar{\sigma}$, deci menţinând $\sigma(x^1) = 0$, să avem

$$\tau'' - 3\rho\tau' + (2\rho^2 - \rho' + 1)\tau = 0. \tag{73'}$$

18. Observând că diferenţa

$$\Delta s^0 - \frac{1}{3\rho}\Delta s^2,$$

este nulă, aceasta înseamnă că forma ds^0 este o diferenţială totală exactă, abstracţie făcând de un termen aditiv convenabil. Se găseşte astfel

$$ds^0 = dx^0 - \frac{1}{3}x^2 dx^1 \tag{71''}$$

şi în baza egalităţii $d\bar{s}^0 = ds^0$,

$$\bar{x}^0 = x^0 + \theta(x^1), \qquad \left(\theta' = \frac{1}{3}\tau\right)$$

unde $\tau(x^1)$ este o soluţie a ecuaţiei (73').

In definitiv, grupului (62) îi corespund transformările de variabile

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^1 + c, \\ \bar{x}^2 &= x^2 + c_1\tau_1 + c_2\tau_2, \\ \bar{x}^0 &= x^0 + \theta(x^1), \end{aligned} \tag{74}$$

c, c_1, c_2, fiind constante arbitrare, τ_1, τ_2 două soluţii linear independente ale ecuaţiei (73'), iar $\theta'(x^1) = \frac{1}{3}\tau(x^1)$.

Rezultă din cele spuse următoarea teoremă:

Componentele pe congruenţele (λ) ale conexiunii unui spaţiu P_2 *cu torsiunea proiectivă nenulă, însă cu curbura proiectivă şi torsiunea afină zero, având un grup de transformări de congruenţe* (62), *pot fi reduse la forma canonică*

$$\begin{aligned} &\Upsilon^1_{12} = \Upsilon^1_{21} = \Upsilon^1_{22} = \Upsilon^2_{22} = 0, \quad -\Upsilon^1_{11} = \Upsilon^2_{21} = \rho, \quad \Upsilon^2_{12} = 0 \\ &\Upsilon^2_{11} = -x^2, \ \Upsilon^0_{11} = 1, \ \Upsilon^0_{12} = -\Upsilon^0_{21} = \frac{1}{3}, \ \Upsilon^0_{22} = 0 \end{aligned} \tag{75}$$

unde ρ *este un invariant ce depinde numai de variabila* x^1.

In sistemul de variabile (x), conexiunea spațiului nostru are atunci, ținând seama de valorile momentelor congruențelor (λ),

$$\lambda_1^1=1,\ \lambda_2^1=0,\ \lambda_1^2=-\rho x^2,\ \lambda_2^2=1,\ \lambda_1^0=-\frac{1}{3}x^2,\ \lambda_2^0=0 \tag{76}$$

componentele

$$\Gamma_{11}^1=-\rho+\frac{2}{3}x^2,\ \Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1=\Gamma_{22}^1=0,\ \Gamma_{11}^2=-(1-\rho'+\rho^2)x^2,$$

$$\Gamma_{12}^2=\rho+\frac{1}{3}x^2=\Gamma_{21}^2,\ \Gamma_{11}^0=1-\frac{1}{3}\rho x^2+\frac{1}{9}(x^2)^2, \tag{75'}$$

$$\Gamma_{22}^2=0,\ \Gamma_{12}^0=\frac{2}{3},\ \Gamma_{21}^0=-\frac{1}{3},\ \Gamma_{22}^0=0,$$

iar transformările de variabile care conservă aceste valori sunt date de formulele

$$\bar{x}^1=x^1+a,\qquad \bar{x}^2=x^2+b\,\tau_1+c\,\tau_2, \tag{77}$$

în care τ_1, τ_2 *sunt soluții independente ale ecuației* (73'), *iar* a, b, c *constante oarecare*

Dat fiind că formulele de echivalență a două spații P_2, cu conexiune (75') depind, dacă echivalența este posibilă, de trei constante arbitrare, deducem teorema:

Grupul maxim de automorfisme al unui spațiu P_2 *cu conexiune* (75') *depinde, dacă invariantul* ρ *este constant, de* 3 *parametri.*

19. Să trecem acum la cazul grupului (64):

$$d\bar{s}^1=a\,ds^1,\ d\bar{s}^2=\frac{1}{a}ds^2,\ d\bar{s}^0=ds^0. \tag{64}$$

Am văzut că el se prezintă când avem condițiile

$$\begin{gathered}\gamma_{11}^1+\gamma_{21}^2=0,\ \gamma_{12}^1+\gamma_{22}^2=0,\ \gamma_{12}^1-\gamma_{21}^1=w_{12}^1,\ \gamma_{12}^2-\gamma_{21}^2=w_{12}^2\\ \gamma_{11}^0=\gamma_{22}^0=0,\ \gamma_{12}^0=1,\ \gamma_{21}^0=w_{12}^0=0.\end{gathered} \tag{78}$$

In primul rând, având în vedere că $c_2^1=c_1^2=0$, relațiile în termeni finiți ce decurg din aceasta, anume

$$\bar{\gamma}_{ef}^1 c_2^e c_c^f=\gamma_{2c}^e c_e^1,\ \bar{\gamma}_{ef}^2 c_1^e c_c^f=\gamma_{1c}^e c_c^2,\ (e,f,c=1,2) \tag{79}$$

ne dau egalitățile

$$\begin{aligned}&\bar{\gamma}_{21}^1 a^{-1}=\gamma_{21}^1,\qquad \bar{\gamma}_{22}^1 a^{-3}=\gamma_{22}^1,\\ &\bar{\gamma}_{11}^2 a^3=\gamma_{11}^2,\qquad \bar{\gamma}_{12}^2 a=\gamma_{12}^2,\end{aligned} \tag{79'}$$

și ele pot determina pe a, afară dacă

$$\gamma_{21}^1=\gamma_{22}^1=\gamma_{11}^2=\gamma_{12}^2=0,\ \gamma_{12}^1=w_{12}^1,\ \gamma_{21}^2=w_{21}^2. \tag{80}$$

De asemenea, din ecuaţiile

$$\gamma^{*2}_{212}=0, \quad \gamma^{*1}_{112}=1,$$

găsim, în baza lui (80), relaţiile

$$R\equiv\frac{\partial\gamma^2_{21}}{\partial s^2}-\frac{\partial\gamma^2_{22}}{\partial s^1}+\gamma^2_{21}w^1_{12}+\gamma^2_{22}w^2_{12}=0, \quad R=1$$

ceea ce, evident, nu este posibil.

Concluzia ce se trage este prin urmare:

Condiţiile (78), (80) *sunt incompatibile cu grupul* (64).

ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОСТРАНСТВ С ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ P_2

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Целью настоящей работы является классификация пространств с проективной связностью двух измерений P_2 без кривизны, но с кручением, согласно максимальным группам проективных трансформаций конгруенций (3), которые они допускают, методом Г. Врэнчану, использованным автором для случая пространств с аффинной связью A_2 [1].

Таким образом дается каноническая соответствующая форма связности пространства и равным образом его максимальная группа автоморфизмов.

Пространство P_2 отнесено к системе трех конгруенций независимых кривых (λ^α) $(\alpha, \beta, \ldots = 0,1,2)$, дуги которых даны (1). Пусть Γ^i_{jk} $i,j,\ldots=1,2)$, образующие его связности. Формулы (2) дают тогда образующие этой связности γ^a_{bc} $(a,b,\ldots=1,2)$ на конгруенциях (λ) [2, стр. 380].

Проективная группа трансформаций конгруенций пространства P_2 есть (3), где c^α_b суть какие-либо функции переменных x^1, x^2; вначале требуется определить какую форму принимает эта группа, предположив, что пространство с кручением, но с нулевой проективной кривизной. Кручение дано (6), где w^α_{bc} суть коэффициенты двулинейных ковариант форм Пфаффа (1).

Так как аффинное кручение t^a_{bc} не нулевое, можно по гипотезе, присоединить его bc к P_2, равным образом как в случае пространства A_2 — инвариантную форму Пфаффа (10′). Если брать как форму ds^1 в группе (3), что требует (11), и если сокращать t^0_{12} до нуля, группа (3) приобретает форму (13) с α, β, γ какими-либо функциями x^1, x^2 и $\beta\neq 0$.

Соотношения в конечных членах (14) и (15), когда $w^1_{12}=0$, следовательно, когда форма ds^1 есть точный тотальный дифференциал, приводят к группам (17) и (18), которые несовместимы, как будет доказано далее с тем, что проективная кривизна пространства P_2 нулевая, и к следующей теореме.

Проективная группа трансформаций конгруенций пространства P_2 с не нулевым аффинным кручением и без кривизны, допускающая инвариантную точную тотальную дифференциальную форму Пфаффа, есть группа тождество, только при наличии условий (20), ***когда она принимает форму*** (19) ***с α, β произвольными функциями переменных x^1, x^2.***

Когда $w_{12}^1 \neq 0$, инвариантная форма Пфаффа ds^1 не будет больше точным тотальным дифференциалом, и тогда приходят к группе тождество или к группе (23), которая также несовместима с отсутствием проективной кривизны пространства.

Отыскивая необходимые и достаточные условия, для того чтобы группа пространства имела форму (19), пользуются отношением (27), полагая $w_{12}^0 \neq 0$ и $w_{12}^0 = 0$.

Первый случай приводит к группе тождество. Во втором случае необходимо иметь $\gamma_{12}^0 = 0$, и $\gamma_{11}^0 = \mu$ становится абсолютным.

Первые формулы (5) дают систему (28) и можно получить

$$\gamma_{22}^2 = 0; \frac{\partial \beta}{\partial s^2} = 0; \gamma_{12}^2 = 0; \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = 0;$$

затем можно еще иметь $\gamma_{21}^2 =$, $w_{12}^2 = 1$, и тогда B становится постоянной. Что касается α, то она должна удовлетворять системе (29′).

Так как $w_{12}^1 = w_{12}^0 = 0$, $w_{12}^2 = 1$, можно взять в качестве форм ds^α ($\alpha = 0,1,2$) в группе (19) выражения (30), то получим

$$ds^1 = dx^1, \; ds^2 = dx^e + x^2 \, dx^1, \; ds^0 = dx^0,$$

Вследствие этого трансформации переменных, соответствующих этой группе, суть (32) с τ (x^1), проверяющие дифференциальное уравнение (34). Что касается коэффициента γ_{11}^2, то он дается (33′), где μ (x^1) есть инвариант.

Таким способом получается следующая теорема.

Связность пространств P_2 с кручением, но с нулевой проективной кривизной, допускающая точную тотальную дифференциальную инвариантную форму Пфаффа, может всегда быть сокращена до канонической формы (35), *причем μ является инвариантом, зависящим только от переменной x^1.*

Трансформации переменных, сохраняющих эту каноническую форму, имеют форму (32′), *причем τ_2 и τ являются решениями, независимыми от дифференциального уравнения* (34), *и p, c_i, произвольными постоянными.*

Следовательно:

Максимальная группа автоморфизмов пространства P_2 со связностью (35) *зависит, если инвариант μ постоянный, от 4 параметров.*

Переходя к случаю $w_{12}^1 \neq 0$, возвращаются вновь к группе тождество.

В заключение можно классифицировать пространства P_2 с проективной связностью с кручением, но без кривизны, следующим образом.

1. *Пространство P_2 с проективными группами трансформаций конгруенций* (19) *и с максимальными группами автоморфизмов, зависящих от 4 параметров. Они допускают инвариантные формы Пфаффа ds^1, ds^2 как точные тотальные дифференциалы и характеризуются каноническими формами* (36) *с постоянным u.*

2. *Пространства P_2, имеющие группу трансформаций конгруенций $d\bar{s}^{-\alpha} = ds^\alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2$). Они допускают максимальную группу автоморфизмов с 2 параметрами, когда коэффициенты w_{bc}^α, γ_{bc}^α ($b, c = 1, 2$) постоянны.*

Во второй части работы предполагается, что пространство имеет не только проективную кривизну, но и аффинное нулевое кручение t^{α}_{bc}. Так как проективные кручения отличны от нуля, то начиная с группы (3), можно посредством (56) сделать $t^{0}_{12} = 1, \Delta = 1$ и посредством нормализации Тома сократить коэффициенты c^{0}_{1}, c^{0}_{2} до нуля. Группа (3) становится таким образом (51) с $\Delta = 1$, следовательно она имеет три произвольные функции переменных x^1, x^2. Поэтому группа автоморфизмов может зависеть в этом случае не больше чем от пяти параметров и пример (66), приведенный Врэнчану доказывает, что максимум был действительно достигнут.

Обсуждение отношений в окончательных выражениях (59) приводит к группам (3), содержащим одну единственную функцию x^1, x^2, в частности к ортогональной или псевдоортогональной в ds^1, ds^2 группе, когда можно присоединить к пространству P_2 метрическую инвариантную связность либо к группе (62), либо к (64), причем последнее невозможно, так как пространство не имеет кривизны.

В случае (62) имеется следующий результат.

Если аффинное кручение и кривизна пространства P_2 нулевая, но проективное кручение отлично от нуля, то его связность может всегда принять каноническую форму (75′) *с* ρ, *инвариантом функции от* x^1. *Она сохраняется трансформацией переменных* (77), *где* $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ *суть два независимых решения дифференциального уравнения* (73′), *и* a, b, c — *произвольные константы.*

Следовательно:

Максимальная группа автоморфизмов пространства P_2 со связностью (75′) *зависит, когда инвариант* ρ *постоянный, от 3 параметров.*

CONSIDÉRATIONS CONCERNANT LES ESPACES Á CONNEXION PROJECTIVE P_2

(RÉSUMÉ)

Ce travail a pour but, la classification des espaces à connexion projective à deux dimensions P_2, sans courbure mais à torsion, d'après les groupes maximums de transformations projectives de congruences (3) qu'ils peuvent admettre, d'après la méthode de G. Vranceanu utilisée par l'Auteur dans le cas des espaces à connexion affine A_2 [1][1]). On donne ainsi la forme canonique correspondante de la connexion de l'espace et, de même, son groupe maximum d'automorphismes.

L'espace P_2 étant rapporté à un système de trois congruences de courbes indépendantes (λ^{α}) $(\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2)$ dont les arcs sont donnés par (1), soient Γ^{i}_{jk} $(i, j, \ldots = 1, 2)$ les composantes de sa connexion. Les formules (2) nous donnent alors les composantes de cette connexion γ^{a}_{bc} $(a, b, \ldots = 1, 2)$ sur les congruences (λ), [2][2]).

Le groupe projectif de transformations de congruences de l'espace P_2 étant (3), où c^{α}_{b} sont des fonctions quelconques des variables x^1, x^2, on se

[1]) p. 1—42.
[2]) p. 380.

propose, d'abord, de voir quelle forme prend ce groupe, en supposant que l'espace est à torsion, mais à courbure projective nulle. La torsion est donnée par (6), où w_{bc}^{a} sont les coefficients des covariants bilinéaires des formes de Pfaff, (1).

Puisque, par hypothèse, la torsion affine t_{bc}^{a} n'est pas nulle, on peut attacher à P_2 tout comme dans le cas d'un espace A_2, une forme de Pfaff invariante (10′). En la prenant comme forme ds^1 dans le groupe (3), ce qui impose (11), et en réduisant t_{12}^{0} à zéro, le groupe (3) reçoit la forme (13), avec α, β, γ fonctions quelconques de x^1, x^2 et $\beta \neq 0$.

Les relations en termes finis (14) et (15) conduisent, si $w_{12}^{1} = 0$, donc si la forme ds^1 est une différentielle totale exacte, aux groupes (17) et (18), qui sont, comme on le démontre ultérieurement, incompatibles avec le fait que la courbure projective de l'espace P_2 est nulle et, en conclusion, au théorème suivant.

Le groupe projectif de transformations de congruences d'un espace P_2 *à torsion affine non nulle et sans courbure, qui admet une forme de Pfaff invariante différentielle totale exacte, est le groupe identité, sauf si l'on a les conditions* (20), *quand il prend la forme* (19), *avec* α, β *fonctions arbitraires des variables* x^1, x^2.

Quand $w_{12}^{1} \neq 0$, la forme de Pfaff invariante ds^1 n'est plus une différentielle totale exacte et on en arrive au groupe identité ou au groupe (23), qui est, lui aussi, incompatible avec l'absence de la courbure projective de l'espace.

En cherchant les conditions, nécessaires et suffisantes, pour que le groupe de l'espace soit de la forme (19), on utilise les relations (27), dans l'hypothèse $w_{12}^{0} \neq 0$ et $w_{12}^{0} = 0$.

Dans le premier cas, on est conduit au groupe identité. Dans le second, on doit avoir $\gamma_{12}^{0} = 0$, et $\gamma_{11}^{0} = \mu$ devient un invariant absolu.

Les premières formules (5) nous donnent le système (28) et l'on peut faire que

$$\gamma_{22}^{2} = 0\,, \quad \frac{\partial \beta}{\partial s^2} = 0\,; \quad \gamma_{12}^{2} = 0\,, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s^2} = 0\,.$$

Ensuite, on peut encore avoir.

$$\gamma_{21}^{2} = 0\,, \quad w_{12}^{2} = 1$$

et β devient alors une constante. Quant à α, il doit satisfaire au système (29).

Puisque $w_{12}^{1} = w_{12}^{0} = 0$, $w_{12}^{2} = 1$, on peut prendre comme formes ds^{α} ($\alpha = 0, 1, 2$) dans le groupe (19), les expressions (30) et l'on obtient:

$$ds^1 = dx^1\,, \quad ds^2 = dx^2 + x^2\, dx^1\,, \quad ds^0 = dx^0\,.$$

Par suite, les transformations de variables correspondant à ce groupe sont les (32), avec $\tau(x^1)$ vérifiant l'équation différentielle (34). Quant au coefficient γ_{11}^{2}, il est donné par (33′) où $\mu(x^1)$ est un invariant.

On arrive de cette façon au théorème:

La connexion d'un espace P_2 *à torsion, mais ayant la courbure projective nulle, qui admet une forme de Pfaff invariante différentielle totale exacte, peut être toujours réduite à la forme canonique* (35), μ *étant un invariant qui dépend seulement de la variable* x^1.

Les transformations de variables qui conservent cette forme canonique ont la forme (32′), τ_2 *et* τ_3 *étant deux solutions indépendantes de l'équation différentielle* (34) *et* β, c *des constantes arbitraires.*

Il s'en suit que:

Le groupe maximum d'automorphismes d'un espace P_2 *à connexion* (35) *dépend, si l'invariant* μ *est constant, de* 4 *paramètres.*

En passant au cas $w_{12}^1 \neq 0$, on retombe sur le groupe identité.

En conclusion, on peut classifier de la manière suivante les espaces P_2 à connexion projective avec torsion mais sans courbure:

1°. *Espaces* P_2 *à groupe projectif de transformations de congruences* (19) *et à groupe maximum d'automorphismes dépendant de* 4 *paramètres. Ils admettent les formes de Pfaff invariantes,* ds^1, ds^0, *comme différentielles totales exactes et sont caractérisés par la forme canonique* (36) *avec* μ *constant.*

2°. *Les espaces* P_2 *qui ont le groupe de transformations de congruences* $d\bar{s}^\alpha = ds^\alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2$). *Ils admettent un groupe maximum d'automorphismes à* 2 *paramètres, si les coefficients* w_{bc}^α, γ_{bc}^α (b, c = 1, 2) *sont constants.*

Dans la seconde partie du travail, on suppose que l'espace P_2 a, non seulement la courbure projective, mais aussi la torsion affine t_{bc}^a, nulle. La torsion projective étant différente de zéro, en partant du groupe (3), on peut faire par (56), $t_{12}^0 = 1$, $\Delta = 1$, et par la normalisation de Thomas, on peut réduire les coefficients c_1^0, c_2^0 à zéro. Le groupe (3) devient ainsi (51) avec $\Delta = 1$; il possède donc trois fonctions arbitraires des variables x^1, x^2. Dans ce cas, le groupe d'automorphismes de l'espace peut donc dépendre de cinq paramètres, au plus, et l'exemple (66), donné par G. Vranceanu, démontre que le maximum est effectivement atteint.

La discussion des relations en termes finis (59) conduit à des groupes (3) contenant une seule fonction de x^1, x^2; en particulier, au groupe orthogonal ou pseudo-orthogonal en ds^1, ds^2, quand il est possible d'attacher à l'espace P_2 une connexion métrique invariante, soit au groupe (62), ou (64), le dernier n'étant pas possible, car l'espace est sans courbure.

Dans le cas (62), on a le résultat qui suit:

Si la torsion affine et la courbure d'un espace P_2 *sont nulles, mais la torsion projective est différente de zéro, alors sa connexion peut toujours recevoir la forme canonique* (75′) *avec* ρ, *un invariant fonction de* x^1. *Elle est conservée par les transformations de variables* (77), *où* τ_1, τ_2 *sont deux solutions indépendantes de l'équation différentielle* (73′), *et* a, b, c, *des constantes arbitraires.*

Par conséquent:

Le groupe maximum d'automorphismes d'un espace P_2 *à connexion* (75′) *dépend, si l'invariant* ρ *est constant, de* 3 *paramètres.*

BIBLIOGRAFIE

1. Ș t. P e t r e s c u, *Clasificarea spațiilor cu conexiune afină* A_2. Studii și Cercetări Matematice, vol. II, (2), 1951—

2. G. V r a n c e a n u, *Leçons de Géométrie différentielle*, București, 1947, vol. I.